Московский комитет образования
*
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
*
Московское математическое общество
*
Московский институт повышения квалификации
работников образования
*
Московский центр непрерывного математического образования

LXII Московская математическая олимпиада школьников 6 – 11 классов

Задачи и решения

МЦНМО
1999

Составители: В. Бугаенко, М. Вялый, В. Гуровиц, И. Изместьев, А. Канель-Белов, П. Кожевников, В. Произволов, В. Сендеров, Р. Федоров, Б. Френкин, А. Шень

Отв. за выпуск М. Панов

6 класс

►**6-1.** На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками отметили еще по точке. Такое «уплотнение» повторили еще дважды (всего 3 раза). В результате на прямой оказалось отмечено 113 точек. Сколько точек было отмечено первоначально?

►**6-2.** Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение — 420.

►**6-3.** Квадрат 4×4 разделен на 16 клеток. Раскрасьте эти клетки в черный и белый цвета так, чтобы у каждой черной клетки было три белых соседа, а у каждой белой клетки был ровно один черный сосед. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

►**6-4.** Из Москвы вылетел вертолет, который пролетел 300 км на юг, потом 300 км на запад, 300 км на север и 300 км на восток, после чего приземлился. Оказался ли он южнее Москвы, севернее ее или на той же широте? Оказался ли он восточнее Москвы, западнее Москвы или на той же долготе?

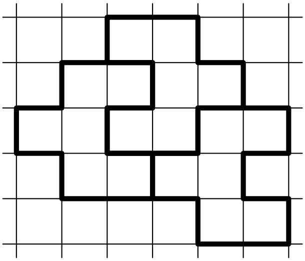
►**6-5.** Нарисуйте на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в углах клеток, две медианы которого перпендикулярны. (Медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.)

►**6-6.** На плоскости нарисован черный квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть черного квадрата (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

7 класс

►**7-1.** Числитель и знаменатель дроби — целые положительные числа, дающие в сумме 101. Известно, что дробь не превосходит $1/3$. Укажите наибольшее возможное значение такой дроби.

▶**7-2.** Разрежьте фигуру (по границам клеток) на три равные (одинаковые по форме и величине) части.



▶**7-3.** Из Москвы вылетел вертолет, который пролетел 300 км на юг, потом 300 км на запад, 300 км на север и 300 км на восток, после чего приземлился. Оказался ли он южнее Москвы, севернее ее или на той же широте? Оказался ли он восточнее Москвы, западнее Москвы или на той же долготе?

▶**7-4.** Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шел с постоянной скоростью. Один шел из A в B, другой — из B в A. Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один в B в 4 часа вечера, а другой — в A в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?

▶**7-5.** Нарисуйте на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в углах клеток, две медианы которого перпендикулярны. (Медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.)

▶**7-6.** Квадрат разбили на 100 прямоугольников девятью вертикальными и девятью горизонтальными прямыми (параллельными его сторонам). Среди этих прямоугольников оказалось ровно 9 квадратов. Докажите, что два из этих квадратов имеют одинаковый размер.

8 класс

▶**8-1.** Сравнив дроби $x = \frac{111110}{111111}$, $y = \frac{222221}{222223}$, $z = \frac{333331}{333334}$, расположите их в порядке возрастания. (*фольклор*)

▶**8-2.** Покажите как любой четырехугольник разрезать на три трапеции (параллелограмм тоже можно считать трапецией). (*В. Произволов*)

▶**8-3.** Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа a, b, c, d, для которых числа $a^2+2cd+b^2$ и $c^2+2ab+d^2$ являются полными квадратами.
(*В. Произволов, В. Сендеров*)

▶**8-4.** Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет? (*А. Толпыго*)

▶**8-5.** В прямоугольном треугольнике ABC точка O — середина гипотенузы AC. На отрезке AB взята точка M, а на отрезке BC — точка N так, что угол MON — прямой. Докажите, что $AM^2+CN^2=MN^2$. (*В. Произволов*)

▶**8-6.** В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым две партии: одну белыми фигурами, другую — черными. По окончании турнира оказалось, что все участники набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью — $\frac{1}{2}$ очка, за поражение — 0 очков). Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми. (*Б. Френкин*)

9 класс

▶**9-1.** На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 1999-го дня. (Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$, а средним гармоническим — число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$). (*А. Канель-Белов*)

▶**9-2.** Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы A или $Б$ (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ходом). После того, как оба игрока сделают по 1999 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т. е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)? (*И. Изместьев*)

▶**9-3.** Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, проходящая через точки A, O, B, касается прямой BC. Докажите, что окружность, проходящая через точки B, O, C, касается прямой CD.

(*А. Заславский*)

▶**9-4.** Найдите все такие целые положительные k, что число

$\underbrace{1\ldots1\overbrace{2\ldots2}^{k}}_{2000} - \underbrace{2\ldots2}_{1001}$ является квадратом целого числа.

(*Е. Осьмова*)

▶**9-5.** Вписанная окружность треугольника ABC ($AB > BC$) касается сторон AB и AC в точках P и Q соответственно, RS — средняя линия, параллельная AB, T — точка пересечения прямых PQ и RS. Докажите, что T лежит на биссектрисе угла B треугольника. (*М. Евдокимов*)

▶**9-6.** В соревнованиях по n-борью участвуют 2^n человек. Для каждого спортсмена известна его сила в каждом из видов программы. Соревнования проходят следующим образом: сначала все спортсмены участвуют в первом виде программы и лучшая половина из них выходит в следующий круг. Эта половина принимает участие в следующем виде и половина из них выходит в следующий круг, и т. д., пока в n-м виде программы не будет определен победитель. Назовем спортсмена “возможным победителем”, если можно так расставить виды спорта в программе, что он станет победителем.

а) докажите, что может так случиться, что хотя бы половина спортсменов является “возможными победителями”;

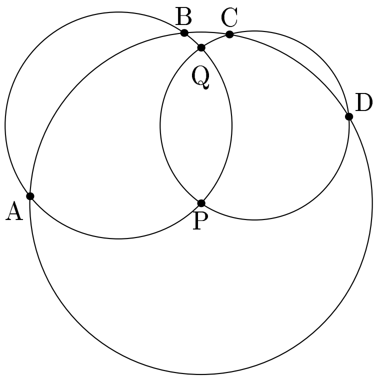
б) докажите, что всегда число “возможных победителей” не превосходит $2^n - n$;

в) докажите, что может так случиться, что “возможных победителей” ровно $2^n - n$. *(А. Герко)*

10 класс

▶**10-1.** Известно, что $(a + b + c)c < 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$. *(фольклор)*

▶**10-2.** Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром в точке P пересекает первую в точках A, B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что углы AQD и BQC равны. *(А. Заславский)*



▶**10-3.** Найдите все такие пары натуральных чисел x, y, что числа $x^3 + y$ и $y^3 + x$ делятся на $x^2 + y^2$. *(С. Злобин)*

▶**10-4.** $2n$ радиусов разделили круг на $2n$ равных секторов: n синих и n красных. В синие сектора, начиная с некоторого, подряд записывают против хода часовой стрелки числа от 1 до n. В красные сектора, начиная с некоторого, записываются те же числа и таким же образом, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдется полукруг, в котором записаны все числа от 1 до n. (*В. Произволов*)

▶**10-5.** Кузнечик прыгает по отрезку $[0,1]$. За один прыжок он может попасть из точки x либо в точку $x/\sqrt{3}$, либо в точку $x/\sqrt{3}+(1-1/\sqrt{3})$. На отрезке $[0,1]$ выбрана точка a. Докажите, что, начиная из любой точки, кузнечик может через несколько прыжков оказаться на расстоянии меньше $1/100$ от точки a. (*А. Буфетов*)

▶**10-6.** Для чисел $1, \ldots, 1999$, расставленных по окружности, вычисляется сумма произведений всех наборов из 10 чисел, идущих подряд. Найдите расстановку чисел, при которой полученная сумма наибольшая. (*Д. Дерягин*)

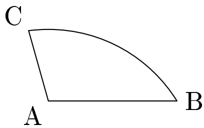
11 класс

▶**11-1.** a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ac}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3.$$

(*В. Сендеров*)

▶**11-2.** Плоская выпуклая фигура ограничена отрезками AB и AC и дугой BC некоторой окружности (см. рисунок). Постройте какую-нибудь прямую, которая делит пополам: а) периметр этой фигуры; б) ее площадь.



(*В. Произволов, В. Сендеров*)

▶**11-3.** Грани правильного октаэдра раскрашены в белый и черный цвет. При этом любые две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета. Докажите, что для любой точки внутри октаэдра сумма расстояний до плоскостей белых граней равна сумме расстояний до плоскостей черных граней. (*Д. Терешин*)

▶**11-4.** На лугу, имеющем форму квадрата, имеется круглая лунка. По лугу прыгает кузнечик. Перед каждым прыжком он выбирает вершину квадрата и прыгает по направлению к ней. Длина прыжка равна половине расстояния до этой вершины. Сможет ли кузнечик попасть в лунку? (*А. Буфетов, А. Канель-Белов*)

▶**11-5.** Граф — это набор вершин, причем некоторые из них соединены ребрами (каждое ребро соединяет ровно две вершины графа). Раскраска вершин графа называется правильной, если вершины одного цвета не соединены ребром. Некоторый граф правильно раскрашен в k цветов, причем его нельзя правильно раскрасить в меньшее число цветов. Докажите, что в этом графе существует путь, вдоль которого встречаются вершины всех k цветов ровно по одному разу. (*Н. Чернятьев*)

▶**11-6.** Решите в натуральных числах уравнение $(1+n^k)^l = 1+n^m$, где $l > 1$. (*Г. Челноков, В. Сендеров*)

▶**11-7.** Докажите, что первые цифры чисел вида 2^{2^n} образуют непериодическую последовательность. (*А. Канель-Белов*)

Из трех последних задач 11 класса в зачет шли две.

Решения

6 класс

▶**6-1.** Если (до уплотнения) было отмечено n точек, то после уплотнения будет отмечено $2n-1$ точек (из которых n старых и $n-1$ — новая). Следовательно, число точек до уплотнения можно найти, прибавив к числу точек после уплотнения единицу и поделив пополам. Таким образом, до последнего уплотнения было $(113+1)/2 = 57$ точек, до второго — $(57+1)/2 = 29$ точек, и в самом начале — $(29+1)/2 = 15$ точек.

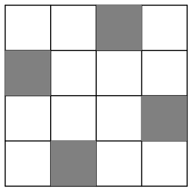
▶**6-2.** Для начала разложим 420 на множители:

$$420 = 6 \cdot 7 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Теперь уже несложно сгруппировать эти множители в пять групп так, чтобы в сумме получилось 20:

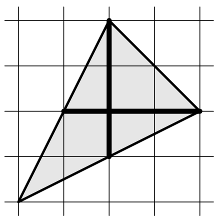
$$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 420; \quad 7 + 5 + 3 + 4 + 1 = 20.$$

▶**6-3.** Заметим для начала, что белых клеток должно быть втрое больше, чем черных, так что белых клеток будет 12, а черных — 4. После этого легко нарисовать требуемую картинку:

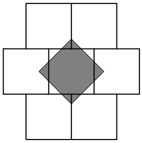


▶**6-4.** Вертолет летит на юг по московскому меридиану, затем по параллели, потом снова по меридиану на север, а затем по более северной параллели. Так как все меридианы одинаковы, широта его не изменится (сколько градусов он пролетел на юг, столько же он пролетит и на север). А параллели разные: чем севернее параллель, тем она короче, так что на северной параллели те же 300 км составят большее число градусов. Значит, вертолет окажется *восточнее Москвы на той же широте.*

▶**6-5.** Удобно сначала нарисовать перпендикулярные медианы треугольника, а потом уже вершины. Вот один из возможных вариантов:



►**6-6.** Задачу решить легче, если сначала понять, как поплотнее уложить плитки, а потом уже смотреть, где разместить черный квадрат:

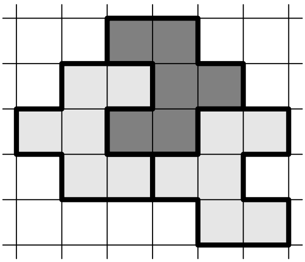


Видно, что каждая из семи плиток перекрывается с черным квадратом.

7 класс

►**7-1.** Сумма числителя и знаменателя равна 101. Значит, чем больше числитель дроби, тем меньше ее знаменатель — и тем больше сама дробь. Видно, что 25/76 еще меньше 1/3, а 26/75 — уже больше. Ответ: 25/76.

►**7-2.** Ответ:



►**7-3.** См. решение задачи 4 для 6 класса.

►**7-4.** Пусть от рассвета до полудня прошло x часов. Первый пешеход шел x часов до полудня и 4 часа после, второй — x часов до полудня и 9 часов после. Заметим, что отношение времен равно отношению длин путей до и после точки встречи, так что $x : 4 = 9 : x$.

$$\begin{array}{ccc} x & : & 4 \\ 9 & : & x \end{array}$$

Из этой пропорции находим, что $x = 6$. Ответ: рассвет был в 6 часов утра.

▶**7-5.** См. решение задачи 5 для 6 класса.

▶**7-6.** Если два квадрата из девяти находятся в одной горизонтальной строке, то они имеют одинаковую высоту, а будучи квадратами — и одинаковую ширину, так что в этом случае все доказано. Точно так же можно рассуждать, если два квадрата окажутся в одном вертикальном столбце. Осталось рассмотреть третий случай, когда все квадраты находятся в разных строках и в разных столбцах. Тогда они попадают в девять столбцов из десяти и в девять строк из десяти, и остается одна свободная строка и один свободный столбец. В пересечении свободной строки и свободного столбца будет еще один, десятый, квадрат. (В самом деле, ширину свободного столбца можно найти, вычтя суммарную ширину девяти квадратов из ширины большого квадрата. Точно так же высота свободной строки равна разности высоты большого квадрата и суммы высот девяти квадратов, а высота любого квадрата равна его ширине.) Но по условию десятого квадрата нет, так что третий случай невозможен.

8 класс

▶**8-1.** Рассмотрим числа

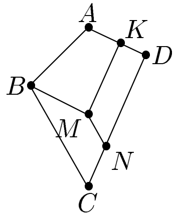
$$1 - x = \frac{1}{111111}, \quad 1 - y = \frac{2}{222223}, \quad 1 - z = \frac{3}{333334},$$

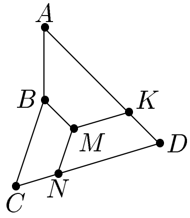
а также обратные к ним

$$\frac{1}{1-x} = 111111, \quad \frac{1}{1-y} = 111111\tfrac{1}{2}, \quad \frac{1}{1-z} = 111111\tfrac{1}{3}.$$

Мы видим, что $\frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-z} < \frac{1}{1-y}$. Поскольку все рассматриваемые числа положительны, $1-x > 1-z > 1-y$. Следовательно, $x < z < y$.

▶**8-2.** Пусть B — *наибольший* внутренний угол данного четырехугольника $ABCD$. Проведем разрез BM из вершины B, параллельный стороне AD (точка M попадет внутрь четырехугольника). Из точки M проводим разрезы MN и MK, параллельные сторонам BC и CD соответственно (рис.).





▶**8-3.** Предположим, что $ab = cd$. Тогда

$$a^2 + 2cd + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$

$$c^2 + 2ab + d^2 = c^2 + 2cd + d^2 = (c+d)^2.$$

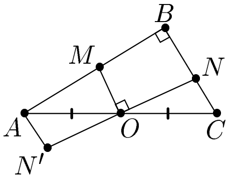
Таким образом, достаточно найти четыре различных натуральных числа a, b, c и d, для которых $ab = cd$. Для этого найдем число n, разлагающееся в произведение двух множителей различными способами. Например, таким числом является $n = 6$; в этом случае можно взять $a = 1$, $b = 6$, $c = 2$, $d = 3$.

▶**8-4.** Поскольку 300 и 198 делятся на 6, Петя сможет снять лишь сумму, кратную 6 долларам. Максимальное число, кратное 6 и не превосходящее 500, — это 498.

Докажем, что снять 498 долларов возможно. Произведем следующие операции: $500 - 300 = 200$, $200 + 198 = 398$, $398 - 300 = 98$, $98 + 198 = 296$, $296 + 198 = 494$. Сумма, лежащая в банке, уменьшилась на 6 долларов.

Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 96 долларов. Затем он может снять 300, положить 198 и снова снять 300. В результате у него будет 498 долларов.

▶**8-5.** Рассмотрим поворот на 180° по часовой стрелке вокруг центра O (см. рис). При этом повороте треугольник ONC перейдет в треугольник $ON'A$. Рассмотрим четырехугольник $MAN'O$; в нем углы MAN' и MON' прямые. В самом деле, $\angle MAN' = \angle BAC + \angle BCA$, а $\angle MON' = \angle MOA + \angle NOC = 180^\circ - \angle MON$. Следовательно, $MN'^2 = AM^2 + AN'^2 = OM^2 + ON'^2$. Далее, $ON' = ON$, $OM^2 + ON^2 = MN^2$. С другой стороны, $AN' = CN$, — и требуемое равенство доказано.



▶**8-6.** Всего в турнире были сыграны $n(n-1)$ партий, и в каждой разыгрывалось 1 очко. Поэтому при равенстве всех результатов участники набрали по $n-1$ очку. Каждый шахматист сыграл белыми $n-1$ партию, и количество выигранных им партий белыми равно одному из n чисел: $0, \ldots, n-1$. Предположим, что утверждение задачи неверно: все выиграли разное число партий белыми. Тогда реализованы все возможные варианты от 0 до $n-1$. Рассмотрим двух участников турнира: A, выигравшего $n-1$ партию белыми, и B, не выигравшего ни одной такой партии. Разберемся, каким мог быть результат партии, которую A играл против B черными. С одной стороны, A набрал $n-1$ очко, играя белыми, так что все свои партии черными, в том числе и эту, он должен был проиграть. Но B не выиграл белыми ни одной партии, значит, не мог выиграть и эту. Противоречие.

9 класс

▶**9-1.** Произведение чисел на доске не меняется. Действительно, $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = ab$. Поэтому искомое произведение равно 2.

▶**9-2.** Ответ: да. Приведем стратегию второго игрока. Первые 1000 ходов он пропускает. Ход с номером $n > 1000$ он делает так:

1) если на n-м и $(2000-n)$-м местах стоят одинаковые цифры — ничего не делает;

2) если на этих местах — разные цифры, то одна из них не совпадает с той, которая стоит на 1000-м месте. Второй игрок меняет ее с 1000-й цифрой.

▶**9-3.** По теореме об угле между касательной и хордой $\angle CBO = \angle BAC$. С другой стороны, $\angle BAC = \angle ACD$; следовательно, $\angle CBO = \angle OCD$. Но $\angle CBO$ — угол, вписанный в описанную окружность треугольника OBC и опирающийся в этой окружности на дугу OC. При этом $\angle OCD$ — угол между хордой OC и лучем CD. Следовательно, прямая CD совпадает с прямой, касающейся окружности в точке C.

Замечание. Рассмотренный в задаче параллелограмм обладает следующим свойством: если соединить середины его соседних сторон, то получится параллелограмм, подобный исходному. Для доказательства достаточно заметить, что треугольники BCD и COD подобны.

▶**8-4.** Ответ: $k = 2$.

Обозначим $n = 1000$. Имеем два случая:

1) $k > 1000$. Тогда

$$\underbrace{1\ldots1\overbrace{2\ldots2}^{k}}_{2n} - \underbrace{2\ldots2}_{n+1} = 10^{n+1}\cdot\underbrace{1\ldots1}_{2n-k}\,\underbrace{2\ldots2}_{k-(n+1)}\ .$$

Очевидно, что это число не является квадратом натурального: n четно, поэтому в разложение числа входит нечетное число пятерок.

2) $k \leqslant 1000$. Тогда

$$\underbrace{1\ldots1\overbrace{2\ldots2}^{k}}_{2n} - \underbrace{2\ldots2}_{n+1} = \underbrace{1\ldots1}_{2n-k}\underbrace{0\ldots0}_{k} - \underbrace{2\ldots2}_{n+1-k}\underbrace{0\ldots0}_{k} =$$

$$= 10^k(\underbrace{1\ldots1}_{2n-k} - \underbrace{2\ldots2}_{n+1-k}).$$

Получили: $k = 2l$, и достаточно найти все такие $l < n$, что число $A = \underbrace{1\ldots1}_{2n-2l} - \underbrace{2\ldots2}_{n+1-2l}$ — полный квадрат.

Заметим, что число x является полным квадратом в точности тогда, когда и $9x$. Имеем:

$$9A = \underbrace{9\ldots9}_{2n-2l} - 1\underbrace{9\ldots9}_{n-2l}8 = \underbrace{9\ldots9}_{n-2}8\underbrace{0\ldots0}_{n-2l}1.$$

«Близкий» к числу $9A$ полный квадрат — число $B = (10^{n-l})^2$. Очевидно, $B > 9A$. Очевидно также, что при $Y > Z$ будет $Y^2 - Z^2 \geqslant Y^2 - (Y-1)^2 = 2Y - 1$. А теперь найдем разность $B - 9A$:

$$10^{2n-2l} - 9\ldots980\ldots01 = 1\underbrace{9\ldots9}_{n-2l+1} = 2\cdot10^{n-2l+1} - 1.$$

Ясно, что $2\cdot10^{n-2l+1} - 1 \leqslant 2\cdot10^{n-l} - 1$, причем равенство имеет место в точности при $l = 1$, откуда сразу и получается ответ задачи.

►**9-5.** Будем считать, что R лежит на AC, S — на BC. Тогда

$$RQ = RC - QC = \frac{b}{2} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{c-a}{2}.$$

Поскольку треугольники AQP и RQT подобны, а треугольник AQP равнобедренный, то $RQ = RT$. Следовательно,

$$ST = RS - RT = RS - RQ = \frac{c}{2} - \frac{c-a}{2} = \frac{a}{2} = BS.$$

Отсюда треугольник TSB равнобедренный и $\angle SBT = \angle STB = \angle TBA$, а BT — биссектриса угла B треугольника ABC.

►**9-6.** а) Решение по индукции. База очевидна: один победитель единственного соревнования из двоих — это уже половина. Пусть есть пример n соревнований для 2^n спортсменов с 2^{n-1} возможными победителями. Докажем тогда, что есть и $(n+1)$ соревнований для 2^{n+1} спортсменов с 2^n возможными победителями. Разделим спортсменов на равные две группы A и A'. Будем считать, что в некотором виде соревнований a любой из A' сильнее любого из A, а в остальных видах — наоборот. Если первым соревнованием провести a, то останется группа A', если любое другое — останется группа A. Применяя индуктивное предположение к группам A и A' по отдельности, получаем пример с $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ возможными победителями.

б) Укажем для каждого вида соревнований спортсмена, который при любом порядке проведения соревнований выбывает в этом виде или раньше. Построение индуктивное.

Для 1-го вида соревнований — это самый слабый в 1-м виде.

Пусть уже построено множество $A_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$ спортсменов такое, что a_i выбывает в i-м виде соревнований или раньше.

Обозначим через a_{k+1} спортсмена, который в $(k+1)$-м виде слабее всех, не входящих в множество A_k. Докажем, что a_{k+1} выбывает в $(k+1)$-м виде соревнования или раньше при любом порядке соревнований. Пусть после $(k+1)$-й вид соревнований проходит r-м по порядку, а из множества A_k за первые $(r-1)$ соревнований выбыло w человек. В r-м по порядку виде соревнований выбывает 2^{n-r} человек. Поэтому a_{k+1} проходит в следующее соревнование только при выполнении условия $2^{n-r} \leq k - w$. Но после $(k+1)$-го вида соревнований должно пройти по крайней мере $k-w$ соревнований с номерами $1, \ldots, k$. Поэтому $k - w \leq n - r - 1 < 2^{n-r}$. Таким образом a_{k+1} выбывает в $(k+1)$-виде соревнований или раньше.

в) Обратим внимание на то, что в конструкции, описанной в пункте а), есть произвол в выборе соревнования, отбирающего группу A.

Максимальное число возможных победителей из 2^n

спортсменов, соревнующихся в *каких-то* n видах соревнований из $(n+1)$-го возможного, равно $2^n - 1$.

Легче доказать по индукции более сильное утверждение: для всех $n \geq 1$ существует такой пример $(n+1)$ соревнований с 2^n участниками, что, выбирая n соревнований и порядок их проведения, можно сделать победителями $2^n - 1$ участников, а единственному исключительному участнику (будем называть его аутсайдером) можно обеспечить выход в финал.

База при $n = 1$ очевидна (два соревнования, в каждом из которых сила спортсменов одинакова).

Индуктивный переход. Строим пример $(n+2)$ соревнований с 2^{n+1} участниками, предполагая известным пример для $(n+1)$ соревнований и 2^n участников. Опять разделим спортсменов на равные две группы B и B'. Будем считать, что в некотором виде соревнований b любой из B' сильнее любого из B, а в остальных видах — наоборот. Каждая из групп по отдельности в видах соревнований, отличных от b дает пример выполнения доказываемого утверждения. Дополнительно предположим, что аутсайдер в B — самый сильный среди B в виде b.

Проводя первым b, получим $2^n - 1$ возможных победителей из B', причем при некотором порядке аутсайдер из B' выйдет в финал по индуктивному предположению.

Если вообще не проводить b, то в первом соревновании выбывают все из B', а далее проводится $n - 1$ соревнование. По индуктивному предположению, выбором первого соревнования и порядка проведения остальных можно сделать победителями $2^n - 1$ спортсменов из B.

Осталось объяснить, как сделать победителем аутсайдера в B. Для этого первым проводим тот вид соревнований, который является финальным при порядке, обеспечивающем выход аутсайдера в финал. После этого останутся только спортсмены из B. Далее проводим соревнования в таком порядке, который обеспечивает выход аутсайдера из B в финал, а завершаем — соревнованием b. В нем аутсайдер побеждает по построению примера.

Завершим решение пункта в), используя при индуктивном переходе более точную оценку, доказанную выше. База индукции по-прежнему очевидна. Для индуктивного перехода повторим рассуждение пункта а) и заметим, что из группы A' победителями можно сделать $2^n - n$ человек, а из A — $2^n - 1$ человек. Итого получаем $2^n - n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - (n+1)$ возможных победителей.

10 класс

▶10-1. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + bx + ac$. Из условия следует, что $f(c) = c^2 + bc + ac = (a+b+c)c < 0$. В точке c функция $f(x)$ принимает отрицательное значение, следовательно, парабола $y = f(x)$ пересекает ось Ox в двух точках, т.е. имеет два различных корня. Значит, дискриминант этого квадратного трехчлена положителен: $b^2 - 4ac > 0$.

▶10-2. Треугольники APB и DPC равнобедренные. Обозначим углы при их основаниях $\angle ABP = \angle BAP = \alpha$, $\angle DCP = \angle CDP = \beta$. Четырехугольники $ABQP$ и $DCQP$ вписанные, отсюда $\angle AQP = \angle ABP = \alpha$ и $\angle DQP = \angle DCP = \beta$. Получаем: $\angle AQD = \angle AQP + \angle DQP = \alpha + \beta$. Далее, $\angle BQP = \pi - \angle BAP = \pi - \alpha$, также $\angle CQP = \pi - \beta$ и $\angle BQC = 2\pi - \angle BQP - \angle CQP = \alpha + \beta$.

▶10-3. Ответ: (1,1).

Докажем вначале, что x и y взаимно просты. Предположим противное. Тогда x и y делятся на некоторое простое число p; пусть p входит в разложения на простые множители чисел x и y соответственно в степенях $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 1$, положим для определенности $a \geqslant b$. Тогда максимальная степень p, на которую делится $x^3 + y$, равна b (поскольку x^3 делится на p^{3a} и тем более на p^{b+1}, а y делится на p^b и не делится на p^{b+1}). Но $x^2 + y^2$ делится на p^{2b}, следовательно, $x^3 + y$ не может делиться на $x^2 + y^2$. Это противоречие доказывает, что x и y взаимно просты.

Далее, из условия следует, что число $x(x^2 + y^2) - (x^3 + y) = y(xy - 1)$ делится на $x^2 + y^2$. Заметим, что y и

x^2+y^2 не имеют общего множителя, большего 1 (т. к. x и y взаимно просты), значит, $xy-1$ делится на x^2+y^2. Но если $xy>1$, то это невозможно, т. к. $x^2+y^2 \geqslant 2xy > xy-1$.

►**10-4.** Условимся называть красными числа, стоящие в красных секторах, и синими — стоящие в синих секторах. Расстоянием между двумя числами a и b назовем количество чисел, расположенных на меньшей дуге между числами a и b. Числа, расставленные по окружности, разбиваются на пары равных. Выберем ту пару равных чисел, расстояние между которыми наименьшее (если таких пар несколько, выберем любую из них). Пусть для определенности выбранная пара — красная единица и синяя единица, причем меньшая дуга ω между ними идет от красной единицы к синей против часовой стрелки. На дуге ω либо нет чисел (т. е. две единицы стоят рядом), либо все числа одного цвета, иначе красное и синее числа n были бы на расстоянии меньшем, чем расстояние между единицами. Пусть все числа на этой дуге (если они есть) — синие (случай, когда они красные, аналогичен). Проведем диаметр, отделяющий синюю единицу от числа, следующего за ним по часовой стрелке; покажем, что этот диаметр искомый. Действительно, рассмотрим полукруг, содержащий синюю единицу. Прочтем синие числа, записанные в этом полукруге начиная с единицы против часовой стрелки — это числа 1, 2, ..., l (l — некоторое число). Прочтем теперь красные числа. Поскольку на дуге ω нет красных чисел, то это будут числа n, $n-1$, ..., $n-m$ (m — некоторое число). Т. к. всего в полукруге n чисел, то в нем записаны все числа от 1 до n по одному разу.

►**10-5.** Пусть $f:[0;1]\to[0;1]$, $f(x)=x/\sqrt{3}$ и $g:[0;1]\to[0;1]$, $g(x)=1-(1-x)/\sqrt{3}$ — функции, отвечающие прыжкам кузнечика. Область значений f — отрезок $[0;1/\sqrt{3}]$, область значений g — отрезок $[1-1/\sqrt{3};1]$. Каждый из этих отрезков имеет длину $1/\sqrt{3}$, и вместе они покрывают отрезок $[0;1]$.

Пусть n — некоторое натуральное число. Рассмотрим всевозможные функции $h_1(h_2(\ldots(h_n(x))\ldots)) : [0;1] \to$

$[0;1]$, где каждая функция h_i — либо f, либо g. Легко видеть, что область значений каждой из этих функций есть отрезок длины $(1/\sqrt{3})^n$. Докажем индукцией по n, что эти отрезки покрывают отрезок $[0;1]$. Для $n = 1$ это утверждение уже проверено. Предположим, что области значений всевозможных функций $h_1(h_2(\ldots(h_{k-1}(x))\ldots))$ покрывают отрезок $[0;1]$. Фиксируем любую из функций $h_1(h_2(\ldots(h_{k-1}(x))\ldots))$. Область значений этой функции покрывается областями значений функций

$$h_1(h_2(\ldots(h_{k-1}(f(x)))\ldots))$$

и $h_1(h_2(\ldots(h_{k-1}(g(x)))\ldots))$. Тем самым утверждение доказано.

Пусть теперь на отрезке $[0;1]$ выбрана точка a. Рассмотрим интервал $(a - 0{,}01; a + 0{,}01)$ и покажем, что кузнечик сможет в него попасть. Выберем n столь большим, чтобы было выполнено неравенство $(1/\sqrt{3})^n < 0{,}01$. По доказанному, можно выбрать функцию $h_1(h_2(\ldots(h_n(x))\ldots))$ такую, что точка a принадлежит области ее значений. Тогда вся область значений рассматриваемой функции (отрезок длины $(1/\sqrt{3})^n$) лежит внутри интервала $(a - 0{,}01; a + 0{,}01)$. Это означает, что из любой точки отрезка $[0;1]$ кузнечик попадет внутрь интервала $(a - 0{,}01; a + 0{,}01)$, выполнив последовательно прыжки, соответствующие функциям h_n, h_{n-1}, …, h_1.

►**10-6.** Ответ: искомая расстановка на рисунке 4 (или получается из нее поворотом либо осевой симметрией).

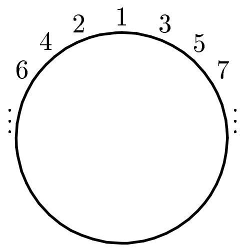
Лемма. Пусть по окружности расставлены 1999 различных положительных чисел a_1, a_2, …, a_{1999} и пусть $a_1 > a_{1998}$. Рассмотрим следующую операцию: числа a_i и a_{1999-i}, где $i = 1, 2, \ldots, 999$, меняем местами, если $a_i < a_{1999-i}$, и не меняем в противном случае. Если хотя бы одна пара чисел поменялась местами, то сумма произведений десяток чисел, идущих подряд, увеличилась.

Доказательство леммы. Рассмотрим симметричные группы по 10 чисел a_i, …, a_{i+9} и a_{1999-i}, …, a_{1990-i}.

Пусть z — произведение чисел, содержащихся одновременно и в первой, и во второй группе (произведение нулевого числа сомножителей считается равным единице); x и x' — произведения чисел, содержащихся соответственно только в первой и только во второй группе, оставшихся на своем месте после проведения операции; y и y' — произведения чисел, содержащихся соответственно только в первой и только во второй группе, поменявшихся местами в результате операции. Тогда сумма произведений чисел в рассматриваемых двух группах до операции равна $s_1 = zxy + zx'y'$, а после операции $s_2 = zxy' + zx'y$. Имеем: $s_1 - s_2 = z(x-x')(y-y')$. Нетрудно видеть, что эта разность неположительна. Кроме того, если в результате операции не все числа остались на своих местах, то хотя бы для одной пары симметричных групп из 10 чисел эта разность строго отрицательна, что и доказывает лемму.

Решение задачи. Считаем числа 1, 2, ..., 1999 расставленными так, что дуги между соседними числами равны. Пусть числа расставлены оптимальным образом, т.е. так, что сумма произведений десяток соседних чисел максимальна. Проведем диаметр через одно из чисел. Из леммы следует, что для всех пар чисел, симметричных относительно этого диаметра, меньшие числа расположены на одной полуокружности, а большие — на другой. С точностью до поворотов и осевых симметрий существует единственная расстановка чисел, удовлетворяющая этому свойству. Действительно, число 2 должно быть рядом с числом 1. Иначе найдется диаметр, отделяющий 2 от 1, причем числа 1 и 2 не симметричны относительно этого диаметра. Обозначим числа, симметричные числам 1 и 2 относительно этого диаметра, соответственно через A и B. Тогда $A > 1$ и $2 < B$, что противоречит лемме.

Далее строим искомую расстановку по индукции. Пусть мы доказали, что числа $1, 2, \ldots, 2k$ при $1 \leqslant k \leqslant 998$ расставлены как в ответе, т.е. в порядке (для определенности по часовой стрелке) $2k, 2k-2, \ldots, 2, 1, 3, \ldots, 2k-1$ подряд. Обозначим через A и B соответственно числа, следующее за $2k$ против часовой стрелки и следующее за $2k-1$ по часовой стрелке. Предположим, что число $2k+1$ отлично от A и B. Тогда пусть C — следующее за $2k+1$ по часовой стрелке число. C отлично от $1, 2, \ldots, 2k$. Числа C и $2k-1$, а также $2k+1$ и B симметричны относительно некоторого диаметра, но $C > 2k-1$, а $2k+1 < B$ — это противоречие. Предположим теперь, что число $2k+ + 2$ отлично от A и B. Тогда пусть C — следующее за $2k+2$ по часовой стрелке число, D – следующее за $2k+2$ против часовой стрелки число. Пусть $A \neq 2k+1$. Тогда $2k+2 < A$, но $D > 2k$ — это противоречит лемме. Если же $A = 2k+1$, то $B \neq 2k+1$ и получаем аналогичное противоречие ($2k+2 < B$, но $C > 2k-1$). Таким образом, получаем, что либо $A = 2k+1$ и $B = 2k+2$, либо $A = 2k+2$ и $B = 2k+1$. Нетрудно видеть, что лемме не противоречит только второй случай. Это завершает доказательство индукционного перехода.



11 класс

▶**11-1.** Ввиду неравенства треугольника $a^2 > (b-c)^2$. Отсюда $a^2 + 2bc > b^2 + c^2$. Правая часть положительна, и на нее можно разделить. Получаем, что первое слагаемое в левой части доказываемого неравенства больше 1. То же верно для двух других. Поэтому их сумма больше 3.

▶**11-2.** а) Достаточно провести прямую через середину дуги и середину ломаной BAD.

б) Пусть A — вершина угла, B и D — концы дуги, C — ее середина. Сегменты, опирающиеся на хорды BC и

CD, равны. Поэтому достаточно провести через точку C прямую, которая делит пополам площадь четырехугольника $ABCD$.

Проведем через середину диагонали BD прямую ℓ, параллельную AC. Пусть, для определенности, ℓ пересекает отрезок AB (случай пересечения ℓ с отрезком AD рассматривается аналогично). Обозначим $E = \ell \cap AB$; прямая CE — искомая. Это видно из рассмотрения площадей треугольников ACD, ACE и ACB (с общим основанием AC).

▶**11-3.** Плоскости, которым принадлежат грани каждого цвета, образуют равные правильные тетраэдры. Утверждение задачи следует из того, что сумма расстояний от внутренней точки правильного тетраэдра до его граней постоянна и равна утроенному объему тетраэдра, деленному на площадь грани. (Чтобы доказать это, соединим точку с вершинами правильного тетраэдра и рассмотрим объемы образовавшихся частей, основаниями которых являются грани исходного тетраэдра.)

▶**11-4.** Нужно доказать следующее утверждение. Пусть каждая сторона квадрата имеет длину 1 и разделена на 2^n равных частей ($n \geqslant 0$), а через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Тогда кузнечик сможет попасть в любую из 4^n полученных клеток.

При $n = 0$ факт тривиален. Проведем индуктивный переход от n к $n+1$. Рассмотрим какую-то из клеток размера 4^{-n-1}. Выберем самую близкую к ней вершину исходного квадрата и выполним гомотетию с центром в этой вершине и с коэффициентом 2. Тогда выбранная клетка перейдет в одну из клеток размера 4^{-n}. По предположению индукции, кузнечик может в нее попасть. Если он прыгнет теперь на половину расстояния до указанной вершины, то он попадет в нужную клетку.

▶**11-5.** Цвета, в которые покрашен граф, занумеруем от 1 до k. Те вершины цвета 2, которые не соседствуют ни с какими вершинами цвета 1, перекрасим в цвет 1. Новая раскраска будет правильной, поэтому в ней k цветов. Значит, какие-то вершины цвета 2 не перекрашены и потому соседствуют с вершинами цвета 1. Аналогично, вершины цвета 3, которые не соседствуют с вершинами цвета 2, перекрасим в цвет 2, и т. д. вплоть до последнего цвета.

После этого рассмотрим какую-либо вершину цвета k. Она не перекрашена, и потому соседствует с вершиной цвета $k-1$. Эта вершина тоже не перекрашена, так как иначе ее первоначальный цвет был бы k, и она не могла бы соседствовать с вершиной того же цвета. Раз вершина не перекрашена, то она соседствует с вершиной цвета $k-2$, и т. д. Продолжая этот процесс, построим путь из вершин k цветов, которые не были перекрашены.

▶**11-6.** Единственное решение уравнения: $n = 2$, $k = 1$, $l = 2$, $m = 3$. Докажем это.

Пусть p — простой множитель l. Поскольку $n^m = (1 + n^k)^l - 1$, то n^m делится на $(1 + n^k)^p - 1$. Но это выражение равно $n^k \cdot p + n^{2k} \cdot p(p-1)/2 + n^{3k} \cdot r$, где r — неотрицательное целое число. Разделив на n^k, получим $p + n^k \cdot p(p-1)/2 + n^{2k} \cdot r$. Если n не делится на p, то это выражение взаимно просто с n, и n^m не может на него делиться. Значит, p — делитель n. Тогда $1 + n^k \cdot (p-1)/2 + (n^{2k}/p) \cdot r$ — натуральное число, большее единицы. Если $k > 1$ или p нечетно, то второе слагаемое делится на n (третье делится всегда), сумма взаимно проста с n, и n^m не может на нее делиться. Следовательно, $k = 1$ и l имеет вид 2^s.

Вспомним теперь, что $n^m = (1+n^k)^l - 1 = (1+n)^l - 1 = ln + \ldots$ В правой части все члены, начиная со второго, делятся на n^2. Из этого, поскольку $m > 1$, следует, что l делится на n. Значит, n, как и l, является степенью двойки. Но

$$(1+n)^l - 1 = [(1+n)^{l/2} + 1] \cdot [(1+n)^{l/2} - 1] = [(1+n)^{l/2} + 1] \ldots (n+2)n,$$

откуда $n + 2$ также является степенью двойки. Следовательно, $n = 2$. Множитель разложения, предшествующий $n + 2 = 4$, равнялся бы $3^2 + 1 = 10$ и не был бы степенью двойки. Значит, $l = 2$, откуда $m = 3$.

7. Рассмотрим окружность длины 1 как отрезок $[0;1]$ с отождествленными концами. Тогда дробную часть f числа $k \cdot \lg 2$ можно рассматривать как точку этой окружности. Первая цифра числа 2^k управляется положением f относительно точек деления $0, \lg 2, \ldots, \lg 9$. (Например, если 2^k начинается с 7, то $7 \cdot 10^s < 2^k < 8 \cdot 10^s$ для натурального s. Дробная часть числа $k \cdot \lg 2$ равна $k \cdot \lg 2 - s$, и она находится между $\lg 7$ и $\lg 8$.)

Предположим, что первые цифры чисел 2^{2^n} повторяются с периодом k. Тогда при любом n дробные части чисел $2^n \cdot \lg 2$ и $2^{n+k} \cdot \lg 2$ попадают в один и тот же интервал окружности; длина любого из этих интервалов не превосходит $\lg 2 < \frac{1}{3}$.

Пусть на окружности отложены дробные части двух положительных чисел A и B; эти дробные части различны и не являются диаметрально удаленными точками окружности; длина меньшей из двух дуг, на которые эти точки делят окружность, равна x. Тогда, как легко показать непосредственно, длина одной из дуг, соединяющих дробные части чисел $2A$ и $2B$, равна $2x$. Пусть теперь дробные части чисел A и B лежат в одном интервале; рассмотрим пары $2A$ и $2B$, $4A$ и $4B$ и т. д. Из сказанного выше следует, что на некотором шаге одна из дуг, соединяющих дробные части пары, станет больше $\frac{1}{3}$, но меньше $\frac{2}{3}$. Значит, эти дробные части принадлежат разным интервалам окружности.

Применяя эти рассуждения к числам $A = 2^{n_0} \cdot \lg 2$ и $B = 2^{n_0+k} \cdot \lg 2$, где n_0 — некоторое фиксированное натуральное число, получаем противоречие с предположением о периодичности.

Математические школы

Лицей «Вторая Школа» объявляет набор в 7–8 математические классы. Запись на экзамены в начале апреля.
Телефоны: 137–1769, 137–6931.

Школа №7 объявляет набор в 8–11 математические классы. Запись на экзамены в апреле–мае.
Телефон: 131-8110.

Школа №54 с классами при механико-математическом факультете МГУ объявляет набор в 9 класс. Собеседования проводятся по пятницам с 10 часов.
Телефоны: 245–9972, 245–5425.

Московская Государственная пятьдесят седьмая школа объявляет набор в 8–9 математические классы и 9 гуманитарный. Собеседования состоятся в апреле.
Телефон: 291–8572.

Школа №91 проводит набор в 9 математический класс. Запись на экзамены в марте. Телефон: 290–3558.

Школа №109 проводит набор в 9 физико-математический класс. Запись на экзамены в марте.
Телефоны: 434–5106, 434–5146.

Школа №218 объявляет набор в 9–10 математические классы. Прием заявлений с 1 апреля.
Телефоны: 976–4087, 976–0320.

Школа №257 объявляет набор в 10 физико-математический класс. Собеседования состоятся в апреле.
Телефоны: 432–8768, 432–4620.

Школа №1134 с классами при механико-математическом факультете МГУ проводит набор в 9 физико-математический класс. Экзамены по профильным предметам — 3 и 10 апреля в 14 часов, для не попавших на экзамен — собеседования каждую субботу с 15 часов.
Телефоны: 932–0000, 932–0801.

Гимназия на Юго-Западе №1543 объявляет набор в 8 математический класс. Экзамены состоятся в апреле.
Телефон: 434–1644.

Механико-математический факультет

Механико-математический факультет (мехмат) является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. Не много найдется крупных научно-исследовательских центров ил учебных заведений, где бы успешно не трудились выпускники мехмата. Исключительно высокий уровень фундаментальной математической подготовки позволяет им не только решать самые сложные задачи, связанные с приложениями математики и механики, но и быстро осваивать новые профессии — например, в области компьютерных технологий или в банковской сфере.

Механико-математический имеет два отделения: математики и механики. Выпускники нашего факультета могут получить одну из трех квалификаций: «математик, математик-прикладник», «математик, математик-прикладник в области экономики», «механик, математик-проводник».

На каждом отделении на первом и втором курсах обучение происходит по общей программе для всех студентов. На третьем курсе студенты разделяются по кафедрам. Каждый студент выбирает научного руководителя, который руководит его первыми научными исследованиями. Традиционно около трети от общего числа выпускников распределяется в аспирантуру. Студенты и аспиранты публикуют результаты своих исследований в ведущих научных журналах.

Бытует мнение, что поступить и учиться на мехмате могут только вундеркинды. Это ни в коей мере не соответствует действительности. Никаких требований, выходящих за рамки средней школы, к поступающим на экзамене не предъявляется. Конечно, для поступления нужно хорошо владеть школьным материалом, а для учебы — иметь склонность к точным наукам.

Примерный график проведения математических олимпиад в г. Москве

- Московская математическая олимпиада для учащихся 6–7 классов (Математический праздник) проводится в одно из воскресений февраля. В программе мероприятия: двухчасовая письменная работа, лекции для родителей, разбор задач, лекции для участников, награждение победителей, показ работ. Все мероприятия проводятся в один день.
- Московская математическая олимпиада для учащихся 8–11 классов проводится в одно из воскресений февраля или марта. Разбор задач, показ работ и награждение победителей проводятся в одно из воскресений марта.
- Осенний тур Международного математического турнира городов проводится в октябре для учащихся 8–11 классов.
- Турнир им. М. В. Ломоносова для учащихся 7–11 классов проводится в конце сентября. Турнир включает конкурсы по математике, физике, химии, истории, наукам о Земле, биологии и лингвистике.

Благодарности

Олимпиада прошла при финансовой поддержке Московского комитета образования и Соросовской Образовательной программы в области точных наук (ISSEP).

Оргкомитет Олимпиады благодарен издательствам Аванта+, Мир, МЦНМО, Фазис, Факториал, ЧеРо за замечательные книги, переданные безвозмездно для призов победителям Олимпиады.