Московский комитет образования
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт повышения квалификации работников образования
Дом научно-технического творчества молодёжи
Московский центр непрерывного математического образования

LXIII Московская математическая олимпиада

Москва
2000

Результаты проверки работ будут высланы участникам по почте.

Закрытие олимпиады состоится в воскресенье, 19 марта, в Главном здании МГУ на Воробьёвых горах.

Время	Мероприятие	Место проведения (аудитория)			
		8 класс	9 класс	10 класс	11 класс
11^{00}	Разбор задач	01	02	16–24	16–10
12^{00}	Показ работ и апелляция	12–08 12–12 12–13	14–02 14–03 14–04	13–02 13–03 13–04	14–08
13^{00}	Лекция	01			
15^{00}	Торжественное закрытие и награждение победителей	ДК МГУ (Главное здание)			

После 19 марта результаты можно узнать в Московском центре непрерывного математического образования по телефону 241–12–37, или в сети Интернет по адресу `http://www.mccme.ru/olympiads`

Р. Е. Анно, В. Д. Арнольд, А. Д. Блинков, В. В. Вакулюк, В. В. Доценко, М. А. Евдокимов, А. А. Заславский, А. К. Ковальджи, Р. М. Кузнец, А. Ю. Митягин, Б. Р. Френкин, В. В. Ященко, И. В. Ященко

LXIII Московская математическая олимпиада

Редакторы *В. М. Гуровиц, Е. Н. Осьмова.* Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Изд. лицензия ЛР №071150 от 11/IV 1995 г. Подписано в печать 25/II 2000 г. Объём 1,5 л. Формат бумаги 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Тираж 3500 экз. Заказ 619.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11.

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ. 140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554–21–86.

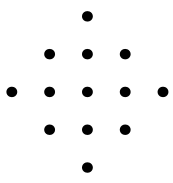
Условия задач

6 класс

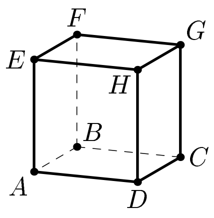
1. В записи $\star\, 1 \star 2 \star 4 \star 8 \star 16 \star 32 \star 64 = 27$ вместо знаков «$\star$» поставьте знаки «$+$» или «$-$» так, чтобы равенство стало верным. (*А. Митягин*)

2. В квадрате 7×7 клеток закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по 3 закрашенных клетки. (*А. Митягин*)

3. Шифр кодового замка является двузначным числом. Буратино забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог быстрее открыть замок. (*А. Митягин, В. Клепцын*)



4. Зачеркните все 13 точек (расположенных, как показано на рисунке) пятью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды. (*Фольклор*)



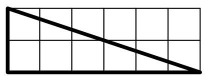
5. В одной из вершин куба $ABCDEFGH$ сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну из трёх соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа. (В решении достаточно написать четыре тройки вершин, в которые стреляют охотники.) (*А. Спивак*)

7 класс

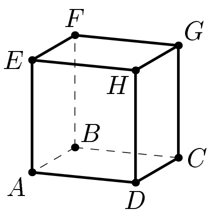
1. В квадрате 7×7 клеток закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по 3 закрашенных клетки. (*А. Митягин*)

2. Карлсон написал дробь $\frac{10}{97}$. Малыш может: 1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, 2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь, а) равную $\frac{1}{2}$; б) равную 1? (*В. Клепцын*)



3. Дан прямоугольный треугольник. Приложите к нему какой-нибудь треугольник (эти треугольники должны иметь общую сторону, но не должны перекрываться даже частично) так, чтобы получился треугольник с двумя равными сторонами. Укажите (нарисуйте) несколько различных решений. (*А. Шень*)



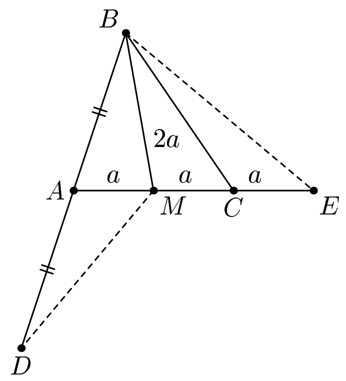
4. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных чётных чисел? (*В. Произволов*)

5. В вершинах куба $ABCDEFGH$ расставлены натуральные числа так, что числа в соседних (по ребру) вершинах отличаются не более чем на единицу. Докажите, что обязательно найдутся две диаметрально противоположные вершины, числа в которых отличаются не более чем на единицу. (*Г. Гальперин*)

8 класс

1. Два различных числа x и y (не обязательно целых) таковы, что $x^2 - 2000x = y^2 - 2000y$. Найдите сумму чисел x и y. (*С. Злобин*)

2. В выборах в 100-местный парламент участвовали 12 партий. В парламент проходят партии, за которые проголосовало строго больше 5% избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов (т. е. если одна из партий набрала в x раз больше голосов, чем другая, то и мест в парламенте она получит в x раз больше). После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий (недействительных бюллетеней, голосов «против всех» и т. п. не было) и каждая партия получила целое число мест. При этом Партия любителей математики набрала 25% голосов. Какое наибольшее число мест в парламенте она могла получить? (Ответ объясните.) (*И. Ященко*)



3. Длины оснований трапеции равны m см и n см (m и n — натуральные числа, $m \neq n$). Докажите, что трапецию можно разрезать на равные треугольники. (*А. Шаповалов*)

4. В треугольнике ABC длина медианы BM равна длине стороны AC. На продолжениях сторон BA и AC выбраны точки D и E соответственно, так что выполняются равенства $AD = AB$ и $CE = CM$ (см. рис.). Докажите, что прямые DM и BE перпендикулярны. (*Р. Женодаров*)

5. В колоде часть карт лежит «рубашкой вниз». Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат «рубашкой вниз», переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут «рубашкой вверх», как бы ни действовал Петя. (*А. Шаповалов*)

6. Какое наибольшее число коней можно расставить на доске 5×5 клеток, так чтобы каждый из них бил ровно двух других? (Приведите пример и объясните, почему больше коней расставить нельзя.) (*М. Горелов*)

9 класс

1. Решите уравнение

$$(x+1)^{63} + (x+1)^{62}(x-1) + (x+1)^{61}(x-1)^2 + \ldots + (x-1)^{63} = 0.$$

(*Р. Кузнец*)

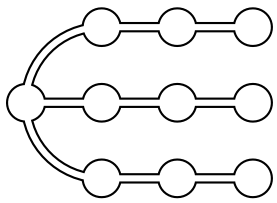
2. В строку выписано 23 натуральных числа (не обязательно различных). Докажите, что между ними можно так расставить скобки, знаки сложения и умножения, что значение полученного выражения будет делиться на 2000 нацело. (*А. Шестаков*)

3. Дана окружность и точка A внутри её. Найдите геометрическое место вершин C всевозможных прямоугольников $ABCD$, где точки B и D лежат на окружности. (*М. Панов*)

4. Гриша записал в клетки шахматной доски числа 1, 2, 3, $\ldots$, 63, 64 в некотором порядке. Он сообщил Лёше только сумму чисел в каждом прямоугольнике из двух клеток и добавил, что 1 и 64 лежат на одной диагонали. Докажите, что по этой информации Лёша может точно определить, в какой клетке какое число записано. (*А. Шаповалов*)

5. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются внешним образом в точке M, отличной от точки пересечения диагоналей четырёхугольника. Окружность, проходящая через точки A, M и C, вторично пересекает прямую, соединяющую точку M и середину AB, в точке K, а окружность, проходящая через точки B, M и D, вторично пересекает ту же прямую в точке L. Докажите, что $|MK - ML| = |AB - CD|$. (*И. Шарыгин*)

6. Система укреплений состоит из блиндажей. Некоторые из блиндажей соединены траншеями, причём из любого блиндажа можно перебежать в какой-нибудь другой. В одном из блиндажей спрятался пехотинец. Пушка может одним выстрелом накрыть любой блиндаж. В каждом промежутке между выстрелами пехотинец обязательно перебегает по одной из траншей в соседний блиндаж (даже если по соседнему блиндажу только что стреляла пушка, пехотинец может туда перебежать). Назовём систему надёжной, если у пушки нет гарантированной стратегии поражения пехотинца (т. е. такой последовательности выстрелов, благодаря которой пушка поразит пехотинца независимо от его начального местонахождения и последующих передвижений).



а) Докажите, что система укреплений, изображённая на рисунке, надёжна.

б) Найдите все надёжные системы укреплений, которые перестают быть надёжными после разрушения любой из траншей.

(*А. Шаповалов, А. Спивак*)

10 класс

1. Точки A и B взяты на графике функции $y = 1/x$, $x > 0$. Из них опущены перпендикуляры на ось абсцисс, основания перпендикуляров — H_A и H_B; O — начало координат. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной прямыми OA, OB и дугой AB, равна площади фигуры, ограниченной прямыми AH_A, BH_B, осью абсцисс и дугой AB. (*Р. Анно, В. Кириченко*)

2. Пусть $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Решите уравнение

$$f(f(f(f(f(x))))) = 0.$$

(*М. Евдокимов*)

3. На бумаге «в клеточку» нарисован выпуклый многоугольник, так что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не идёт по вертикали или горизонтали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключённых внутри многоугольника, равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки внутри многоугольника. (*Г. Гальперин*)

4. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются внешним образом в точке M, отличной от точки пересечения диагоналей четырёхугольника. Окружность, проходящая через точки A, M и C, вторично пересекает прямую, соединяющую точку M и середину AB, в точке K, а окружность, проходящая через точки B, M и D, вторично пересекает ту же прямую в точке L. Докажите, что $|MK - ML| = |AB - CD|$. (*И. Шарыгин*)

5. Последовательность x_1, x_2, …, x_n, … будем обозначать $\{x_n\}$. Из имеющихся последовательностей $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ (возможно, $\{b_n\}$ совпадает с $\{c_n\}$) разрешается получать последовательности $\{b_n+c_n\}$, $\{b_n-c_n\}$, $\{b_n \cdot c_n\}$ и $\left\{\frac{b_n}{c_n}\right\}$ (если все c_n отличны от 0). Кроме того, из любой имеющейся последовательности можно получить новую, вычеркнув несколько начальных членов. Сначала есть только последовательность $\{a_n\}$. Можно ли получить из неё описанными выше операциями последовательность $\{n\}$, т. е. 1, 2, 3, 4, …, если а) $a_n = n^2$; б) $a_n = n + \sqrt{2}$; в) $a_n = \dfrac{n^{2000}+1}{n}$?

(*А. Шаповалов, В. Доценко*)

6. Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали и раздали Грише и Лёше по 3 карты, а оставшуюся карту а) спрятали; б) отдали Коле.

Гриша и Лёша могут по очереди сообщать вслух любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом Коля не смог вычислить местонахождение ни одной из тех карт, которых он не видит? (Гриша и Лёша не договаривались о каком-либо особом способе общения; все переговоры происходят *открытым текстом.*)

(*А. Шаповалов*)

11 класс

1. Наибольший общий делитель (НОД) натуральных чисел m и n равен 1. Каково наибольшее возможное значение НОД чисел $m + 2000n$ и $n + 2000m$? (*С. Злобин*)

2. Вычислите

$$\int\limits_0^\pi \big(|\sin 1999x| - |\sin 2000x|\big)\,dx.$$

(*Фольклор*)

3. Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке K. Пусть M и N — центры окружностей, описанных около треугольников AKB и CKD соответственно. Докажите, что $OM = KN$.

(*А. Заславский*)

4. У Феди есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в нуль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т. д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно? (*А. Шаповалов*)

5. В круговом шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым один раз. Назовём партию неправильной, если выигравший её шахматист в итоге набрал очков меньше чем проигравший. (Победа даёт 1 очко, ничья — 1/2, поражение — 0.)

Могут ли неправильные партии составлять

а) более 75% от общего количества партий в турнире;

б) более 70%? (*С. Токарев*)

6. Можно ли расположить бесконечное число равных выпуклых многогранников в слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями, так чтобы ни один многогранник нельзя было вынуть из слоя, не сдвигая остальных? (*А. Канель-Белов*)

Решения задач

6 класс

1. Знаки можно расставить следующим образом:

$$+1-2+4+8-16-32+64=27.$$

2. На рисунке 6.1 приведены примеры такой закраски.

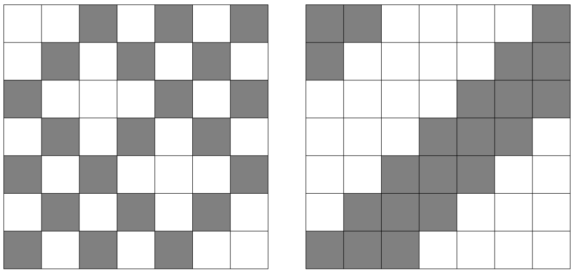


Рис. 6.1

3. Пусть первая цифра кода x, а вторая y. Тогда само число записывается как $10x+y$, а условие задачи можно записать уравнением $(x+y)+$ $+\,x\cdot y=10x+y$. Следовательно, $x\cdot y=9x$.

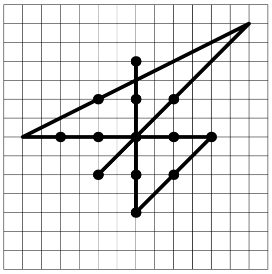


Рис. 6.2

Так как код — двузначное число, то $x\neq 0$, а значит, $y=9$. При этом x можно взять любым, кроме 0. Проверьте!

Ответ: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

4. Пример приведён на рисунке 6.2.

5. Покрасим вершины A, C, F и H в чёрный цвет, а остальные вершины — в белый (рис. 6.3). Заметим, что любые две соседние вершины будут покрашены в разные цвета. Значит, после каждого залпа заяц перебегает в вершину другого цвета. Сделаем первый залп по вершинам C, F и H.

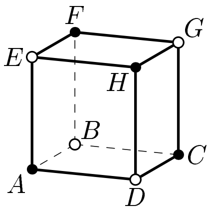


Рис. 6.3

Если заяц находился в чёрной вершине, то либо охотники сразу попали в него, либо заяц находился в вершине A. В последнем случае после залпа заяц перебежит в одну из трёх соседних вершин, и залп (BDE) обязательно достигнет цели.

Если заяц находился в белой вершине, то после двух выстрелов он снова окажется в белой вершине. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, убеждаемся, что залпы (DEG), а потом (ACF) обязательно поразят зайца.

Ответ: охотники обязательно попадут в зайца, сделав следующие залпы: (CFH), (BDE), (DEG), (ACF). (Порядок залпов важен!)

7 класс

1. См. решение задачи 2 варианта 6 класса.

2. а) Да, достаточно прибавить к числителю и знаменателю по 77. (К этому числу приводит уравнение $2(10 + x) = 97 + x$.)

б) Нет. Действительно, дробь равна единице, если её числитель и знаменатель равны. А Малыш никак не сможет из неравных чисел сделать равные.

3. На рисунке 7.1 цифрами отмечены вершины семи приложенных треугольников.

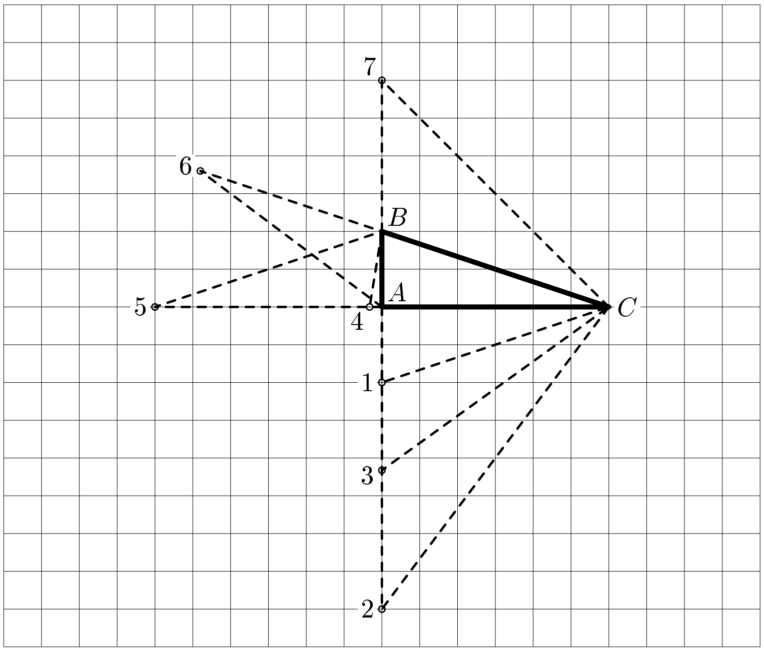


Рис. 7.1

4. Ответ: нет, не может.

Докажем методом от противного. Предположим, что найдутся два натуральных числа k и n такие, что $n(n + 1) = 2k(2k + 2)$. Отметим числа $2k$ и $2k + 2$ на числовой оси и рассмотрим два случая: $n \leqslant 2k$ и $n > 2k$.

Если $n \leqslant 2k$, то $n + 1 < 2k + 2$, поэтому $n(n + 1) < 2k(2k + 2)$. Противоречие.

Если $n > 2k$, то $n + 1 \geqslant 2k + 2$, поэтому $n(n + 1) > 2k(2k + 2)$. Противоречие.

5. Обозначим числа, стоящие в вершинах куба, соответствующими маленькими латинскими буквами: a, b, c, d, e, f, g и h.

Рассмотрим наименьшее из этих чисел. Без ограничения общности мы можем считать, что это число a (оно находится в вершине A). Тогда числа в соседних с A вершинах (это вершины B, D и E) могут принимать только значения a или $a+1$ (так как $a-1<a$). Значит, какие-нибудь два из чисел b, d и e равны.

Пусть равные числа стоят в вершинах B и E (остальные случаи рассматриваются аналогично). В этом случае ответом будут диаметрально противоположные вершины E и C: $e=b$, а числа c и b отличаются не более, чем на 1, поэтому числа e и c отличаются не более чем на 1.

8 класс

1. Данное в условии равенство перепишем следующим образом:

$$2000(x-y)=(x-y)(x+y).$$

Так как $x \neq y$, можно сократить на $x-y$. Отсюда $x+y=2000$.

2. Ответ: 50 мест. Если 10 партий наберут ровно по 5% голосов, а две, включая Партию любителей математики (ПЛМ), — по 25%, то представители ПЛМ получат ровно 50 мест в парламенте. Докажем, что большее число мест ПЛМ получить не может. Действительно, количество мест, полученных ПЛМ в парламенте, равно

$$100 \cdot \frac{\text{количество голосов, набранных ПЛМ}}{\begin{matrix}\text{количество голосов, набранных всеми}\\ \text{партиями, прошедшими в парламент}\end{matrix}} =$$

$$= 100 \cdot \frac{\text{количество голосов, набранных ПЛМ}}{\begin{matrix}\text{общее количество}\\ \text{избирателей}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{количество голосов, набранных всеми}\\ \text{партиями, не прошедшими в парламент}\end{matrix}}.$$

Отсюда видно, что наибольшее число мест ПЛМ получит в том случае, если общее количество голосов, отданных за непрошедшие партии, максимально. Если бы в парламент не прошли 11 партий, они вместе набрали бы не более 55% голосов, но $55\% + 25\% < 100\%$. Значит не прошли в парламент максимум 10 партий, и они набрали в сумме не более 50% голосов. Поэтому ПЛМ получит в парламенте не более 50 мест.

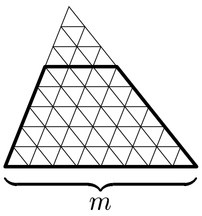


Рис. 8.1

3. Пусть $m>n$. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения и разобьём каждую сторону получившегося треугольника на m равных частей. Через точки деления проведём прямые, параллельные сторонам треугольника (см. рис. 8.1), и по теореме Фалеса получим разбиение треугольника на равные маленькие треугольники. Верхнее основание трапеции является одной из проведённых линий, так как его длина выражается целым числом сантиметров. Таким образом, мы получили разбиение трапеции на равные треугольники.

4. Пусть K — точка, симметричная M относительно точки A. Треугольник KMB равнобедренный ($KM = MB$), треугольник EMB тоже равнобедренный. Обозначим через α величину угла при основании треугольника KMB, через β — величину угла при основании треугольника EMB. Так как сумма углов любого треугольника равна $180°$, то $\angle KBE = \alpha + \beta = 90°$ (см. рис. 8.2), т. е. $KB \perp BE$. Заметим, что четырёхугольник $DKBM$ — параллелограмм, т. е. $DM \parallel KB$. Следовательно, $DM \perp BE$.

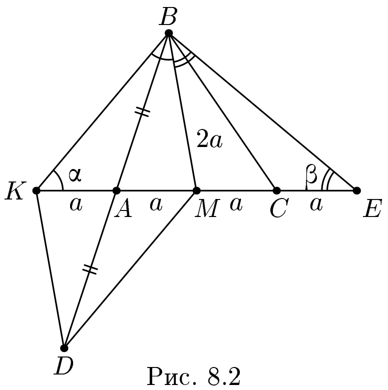


Рис. 8.2

5. Расположению карт в колоде сопоставим число, в котором цифр столько, сколько в колоде карт, причём на k-м месте справа стоит «1», если k-я карта снизу лежит рубашкой вверх, и «2» в противном случае. Тогда после каждого преобразования это число уменьшается. (Действительно, сравним полученное число с предыдущим. Среди всех цифр, которые изменились, выберем самую левую, т. е. найдём самый старший изменившийся разряд. Очевидно, в этом разряде цифра «2» сменилась на «1».)

Поскольку количество n-значных чисел из единиц и двоек конечно (не больше 2^n), в конце концов мы получим число, состоящее из одних единиц, что соответствует расположению всех карт рубашкой вверх.

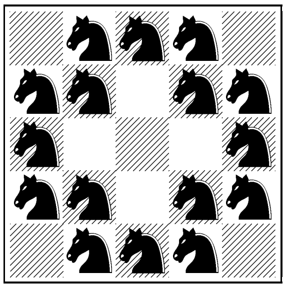


Рис. 8.3

6. На рис. 8.3 приведено расположение 16 коней, удовлетворяющее условию задачи. Покажем, что большее число коней расставить нельзя. Раскрасим клетки доски, как показано на рис. 8.3. Заметим, что количество коней, расположенных на чёрных клетках, равно количеству коней, расположенных на белых клетках. Значит, если число пустых белых клеток равно n, то число пустых чёрных клеток равно $n + 1$.

При любом оптимальном расположении коней центральная клетка пуста. В противном случае из восьми клеток, которые бьёт конь, стоящий на центральном поле, ровно шесть пустых белых. Отсюда $n \geqslant 6$ и число коней не превосходит $25 - n - (n + 1) \leqslant 12$.

Разобьём белые клетки на четыре группы, как показано на рис. 8.4 (клетки одной группы отмечены одинаковыми цифрами). Покажем, что при оптимальном расположении по крайней мере одна клетка каждой группы пуста (отсюда будет следовать, что $n \geqslant 4$). Предположим противное, например, что на всех клетках группы 3 стоят кони. Обозначим их буквами a, b и c (рис. 8.5). Конь, стоящий на клетке a, бьёт клетки f, d и центральную. Но, как было показано выше, центральная клетка пуста, значит, на

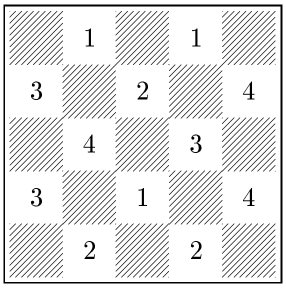


Рис. 8.4

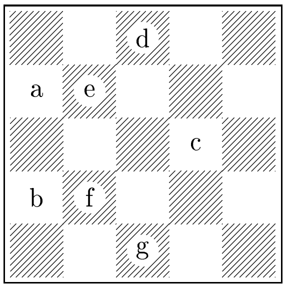


Рис. 8.5

клетках f и d стоят кони. Аналогично можно показать, что на клетках e и g тоже стоят кони. Но тогда конь, стоящий на клетке c, бьёт четырёх коней, расположенных на d, e, f и g, что противоречит условию.

Итак, $n \geqslant 4$. Значит, число коней не больше $25 - n - (n+1) \leqslant 16$.

9 класс

1. Ответ: $x = 0$. Умножим обе части уравнения на $(x+1)-(x-1) = 2$. Тогда оно преобразуется к виду

$$(x+1)^{64} - (x-1)^{64} = 0$$

и легко решается:

$$(x+1)^{64} = (x-1)^{64},$$
$$|x+1| = |x-1|,$$

поскольку $x+1 \neq x-1$, получаем $x+1 = -(x-1)$, откуда $x = 0$.

2. Разобьём данные 23 числа на восемь групп из стоящих подряд чисел: три группы по пять чисел и четыре группы по два числа (в каком порядке эти группы расположены — неважно). Каждую группу заключим в скобки, а между группами расставим знаки умножения. Если расставить знаки внутри каждой группы так, чтобы результат операций в группе из двух чисел делился на 2, а в группе из пяти чисел — на 5, то всё выражение будет делиться на $2^4 \cdot 5^3 = 2000$.

Покажем, что такая расстановка знаков в группах существует. Если числа в группе из двух чисел разной чётности, то между ними нужно поставить знак умножения, если одинаковой чётности — сложения. Результат, очевидно, будет делиться на 2. Рассмотрим группу из чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, идущих именно в таком порядке. Выпишем остатки от деления на 5 следующих пяти сумм:

$$a_1, \quad a_1+a_2, \quad a_1+a_2+a_3, \quad a_1+a_2+a_3+a_4, \quad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5.$$

Если один из остатков равен 0, то соответствующая сумма делится на 5. В этом случае нужно расставить знаки сложения между числами, входящими в эту сумму, саму сумму (если требуется) заключить в скобки, а все оставшиеся промежутки между числами группы заполнить знаками умножения. Если же ни один из остатков нулю не равен, то, согласно принципу Дирихле, среди них найдутся два одинаковых остатка. Пусть, например, суммы $a_1+\ldots+a_i$ и $a_1+\ldots+a_j$ $(i<j)$ дают одинаковые остатки при делении на 5. Тогда их разность, представляющая собой сумму подряд стоящих чисел $a_{i+1}+\ldots+a_j$, делится на пять, и мы опять расставляем знаки сложения, заключаем эту сумму в скобки, а оставшиеся позиции заполняем знаками умножения. Таким образом, в любом случае нам удастся расставить знаки в группе из пяти чисел так, чтобы результат делился на 5.

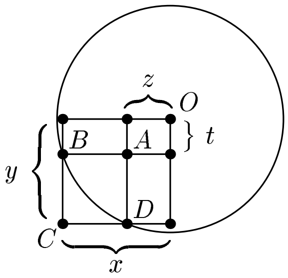


Рис. 9.1

3. Докажем, что для точки C выполняется равенство $OC^2 = 2R^2 - OA^2$, где O — центр данной окружности, R — её радиус. Введём обозначения, как показано на рис 9.1. Отрезок OC является гипотенузой в прямоугольном треугольнике с катетами x и y (см. рис. 9.1), по теореме Пифагора получаем:

$$OC^2 = x^2 + y^2 = (x^2 + t^2) + (y^2 + z^2) - (z^2 + t^2).$$

Осталось заметить, что $x^2 + t^2 = y^2 + z^2 = R^2$, $z^2 + t^2 = OA^2$.

Отсюда следует, что искомым ГМТ является окружность с центром O и радиусом $\sqrt{2R^2 - OA^2}$.

4. Пусть у Лёши есть достаточный запас доминошек 1×2. Если он положит на доску две доминошки, так чтобы они перекрывались ровно по одной клетке, то, вычтя из суммы чисел под одной доминошкой сумму чисел под другой, он узнает разность чисел, накрытых ровно одной доминошкой (эти числа записаны в клетках одного цвета). Третью доминошку нужно положить так, чтобы одна её половина накрывала одно из этих двух чисел, а вторая — ещё не покрытую клетку. Складывая ранее полученную разность с суммой чисел под новой доминошкой, Лёша получит сумму тех двух чисел, которые покрыты ровно одной из трёх доминошек (эти числа записаны в клетках разного цвета). Так, добавляя всё новые и новые доминошки, можно построить цепочку, соединяющую любые две клетки доски, и, если эти клетки одного цвета, узнать их разность, а если разного — их сумму.

Известно, что числа 1 и 64 расположены на одной диагонали, т. е. в клетках одного цвета. Их разность равна 63, а разность любых двух других натуральных чисел между 1 и 64 меньше 63. Поэтому Лёша может определить, в каких клетках записаны 1 и 64. Он пока не знает только, в какой из этих клеток какое число записано. Зато он знает сумму числа в каждой из этих двух клеток с любым числом, записанным в клетке другого цвета. Для клетки с числом 1 все эти суммы не превосходят 64, а для клетки с числом 64 — не меньше 66. Так что Лёша может определить, где именно записано 64. Теперь, зная сумму (или разность) числа 64 с числом в любой другой клетке, Лёша легко определит, где какое число записано.

5. Пусть P и Q — середины AB и CD, O_1 и O_2 — центры окружностей, проходящих через точки A, M, C и B, M, D соответственно, H_1 и H_2 — проекции O_1 и O_2 на прямую PQ (рис. 9.2).

1°. Точки M, P и Q лежат на одной прямой. В самом деле, прямые PM и QM содержат радиусы окружностей, касающихся в точке M, и, следовательно, перпендикулярны общей внутренней касательной к этим окружностям.

2°. P и Q лежат на окружности с диаметром O_1O_2. Действительно, $PO_1 \perp PO_2$, поскольку эти прямые — серединные перпендикуляры к отрезкам MB и MA, угол между которыми прямой (M лежит на окружности с диаметром AB). Аналогично, $QO_1 \perp QO_2$.

3°. Ясно, что $KH_1 = H_1M$, $LH_2 = H_2M$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам).

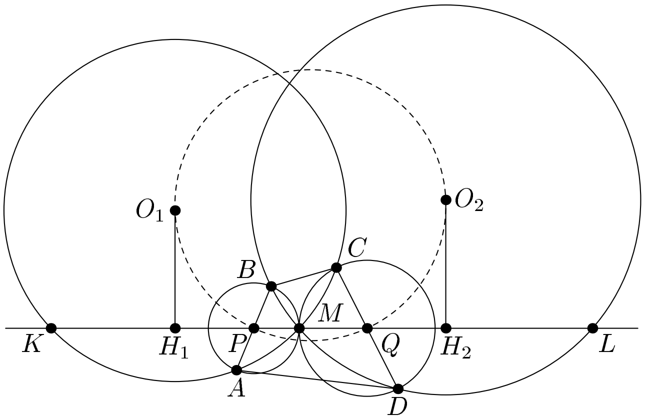


Рис. 9.2

4°. $PH_1 = QH_2$, так как проекция середины отрезка O_1O_2 делит отрезок H_1H_2 пополам, но эта проекция делит пополам и отрезок PQ. Наконец, $|MK - ML| = 2|MH_1 - MH_2| = 2|MP - MQ| = 2\left|\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD\right| = |AB - CD|$.

6. а) Докажем, что указанная в условии система укреплений (будем называть её трилистником) надёжна. Обозначим блиндажи, как показано на рисунке 9.3. Ограничим начальные положения пехотинца блиндажами O, A_2, B_2 и C_2 (эти блиндажи мы будем называть чётными, а остальные —

нечётными). Мы считаем, что пехотинец настолько удачлив, что спасается, если только это возможно. Заметим, что выстрел пушки по одному из нечётных блиндажей заведомо бесполезен. Если пушка выстрелит по блиндажу O (удачливый пехотинец, конечно, не там), то из оставшихся трёх чётных блиндажей пехотинец сможет перебежать в любой из шести нечётных. Теперь, если пушка выстрелит по одному из этих нечётных блиндажей, то пехотинец из оставшихся пяти сможет перебежать в любой из четырёх чётных. Таким образом, повторится начальная расстановка.

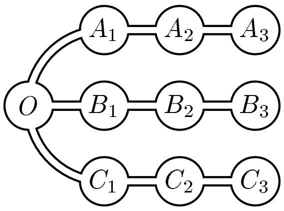


Рис. 9.3

Если же первым своим выстрелом пушка накроет один из чётных блиндажей на ветвях трилистника, скажем A_2 (сначала блиндажи A_2, B_2 и C_2 ничем друг от друга не отличаются), то пехотинец из оставшихся блиндажей O, B_2 и C_2 сможет перебежать в любой из блиндажей A_1, B_1, B_3, C_1, C_3. Если после этого пушка стреляет не по блиндажу A_1, то пехотинцу доступна любая из четырёх чётных вершин. Снова начальная ситуация. Если же второй выстрел пушка производит по A_1, то из оставшихся четырёх блиндажей пехотинец сможет перебежать в блиндажи O, B_2 и C_2. Дальнейший перебор сведём в таблицу. В левом её столбце — блиндажи, по которым стреляет пушка, в правом — блиндажи, куда после этого может перебежать пехотинец. Горизонтальными линиями разделены различные варианты. Некоторые случаи не разобраны (про них написано «то же»). Это означает, что получается та же ситуация с точностью до перестановки ветвей. Каждый случай разбирается до повторения ситуации, которая уже встречалась.

Поражённый блиндаж	Пехотинец
O	B_1, B_3, C_1, C_3
любой блиндаж	O, B_2, C_2
B_2 (для C_2 — то же)	A_1, B_1, C_1, C_3
A_1 (для B_1 — то же)	O, B_2, C_2
B_2 (для C_2 — то же)	A_1, B_1, C_1, C_3
C_1 или C_3	O, A_2, B_2, C_2

Итак, после каждого выстрела пехотинец может оказаться более чем в одном блиндаже. Так что у него каждый раз есть выбор, благодаря которому он спасётся. Поэтому система-трилистник надёжна.

б) Ответ: такими (минимальными) надёжными системами укреплений являются трилистник и все системы, состоящие только из одного цикла блиндажей A_1—A_2—$\ldots$—A_n—A_1.

Если в системе есть цикл из нескольких блиндажей A_1—A_2—$\ldots$ $\ldots$—A_n—A_1, то такая система укреплений надёжна. Ведь пехотинец, перебегая только по этому циклу, каждый раз может выбирать тот из двух доступных ему блиндажей, который не будет накрыт следующим выстрелом.

Заметим, что если какая-то часть системы укреплений сама по себе надёжна, то пехотинец может спасаться только в этой части, таким образом и вся система надёжна. Поэтому, если кроме цикла A_1—A_2— … —A_n—A_1 имеются другие траншеи, то такая система уже не минимальна. Покажем, что любой цикл минимален. Разрушив, скажем, траншею A_n—A_1, мы получим линейный лабиринт A_1—A_2— … —A_n. Вот как должна действовать пушка. Она последовательно стреляет по блиндажам A_2, A_3, …, A_n. Если сначала пехотинец был в блиндаже с чётным номером, то один из этих выстрелов его накроет. Если же этого не произошло, то пушка производит ещё одну серию выстрелов, начиная с блиндажа A_1 или A_2 и последовательно перемещаясь по возрастанию номера блиндажа. То, с какого блиндажа она начинает вторую серию, зависит от чётности номера блиндажа, в котором в этот момент находится пехотинец (это легко вычислить, так как сначала номер был нечётен и после каждого перебегания чётность номера меняется).

Осталось рассмотреть системы укреплений без циклов. Покажем, что единственная минимальная надёжная среди них — это трилистник. Возьмём любую систему, не содержащую ни цикла, ни трилистника, и укажем, как должна действовать пушка. (Мы опишем стратегию для связной системы. Если же система несвязна, т. е. состоит из нескольких участков, не связанных между собой траншеями, то пушка должна последовательно реализовать эту стратегию для каждого участка.)

Назовём блиндаж перекрёстком, если из него выходят три или более траншеи. Траншею, ведущую из блиндажа, назовём сквозной, если, пробежав через неё, пехотинец может перебежать ещё два раза, не побывав дважды ни в одном блиндаже. Например, в трилистнике траншея A_1—A_2, ведущая из блиндажа A_1, не сквозная, а траншея A_2—A_1 из A_2 сквозная. Наконец, блиндаж назовём тупиковым, если из него ведёт единственная траншея.

Так как наша система не содержит трилистника, из любого блиндажа выходит не более двух сквозных траншей. Определим, откуда пушка начнёт атаку. Возьмём любой перекрёсток. Если из него ведут две сквозные траншеи, причём каждая ведёт к другому перекрёстку, то выберем одну из них и проследуем через неё до ближайшего перекрёстка. Если из этого нового перекрёстка выходит ещё одна сквозная траншея, ведущая к перекрёстку, перейдём по этой траншее до следующего ближайшего перекрёстка. Действуем так, пока не придём к перекрёстку с единственной выходящей из него сквозной траншеей или с двумя, через одну из которых можно дойти до тупикового блиндажа, не проходя ни одного перекрёстка. В первом случае пройдём по любой несквозной траншее в соседний блиндаж, во втором — пройдём по этой са́мой сквозной траншее до блиндажа, соседнего с тупиковым. Таким образом мы определили, с какого блиндажа начать обстрел.

Разобьём блиндажи на чётные и нечётные, так что пехотинец каждый раз перебегает из блиндажа одной чётности в блиндаж другой чётности (это возможно, поскольку циклов в системе нет). Покажем, как нужно стрелять, чтобы гарантированно поразить пехотинца при условии, что он изначально находится в блиндаже той же чётности, что и блиндаж, с которого начнётся обстрел. (Если, сделав все эти выстрелы, пушка так и не накроет пехотинца, значит, он находился в блиндаже другой чётности; теперь уже точно известна чётность блиндажа с пехотинцем.)

Пусть пушка последовательно поразит блиндажи, начиная с выбранного и заканчивая перекрёстком. Тогда на обстрелянном линейном участке системы пехотинца нет. Мы так выбрали начальный блиндаж, чтобы среди траншей, ведущих в другие участки системы, было не более одной сквозной. (Если всего их две, то вторая ведёт в только что обстрелянный участок.) Любая несквозная траншея ведёт либо в тупиковый блиндаж, либо в блиндаж, из которого можно попасть в несколько тупиковых или же вернуться на перекрёсток. В обоих случаях за этой траншеей всего один блиндаж чётности, противоположной чётности рассматриваемого перекрёстка. После того как пушка накрыла перекрёсток, пехотинец перебежал как раз в блиндаж, чётность которого противоположна чётности перекрёстка, так что если он находится за этой траншеей, то, ударив по блиндажу, в который ведёт эта траншея, пушка поразит пехотинца. Если же нет, пушка снова бьёт по перекрёстку, не давая пехотинцу пробежать на уже проверенные участки системы укреплений. Проверив все несквозные траншеи, пушка приступает к единственной сквозной, поражает блиндаж, в который ведёт эта траншея, и далее последовательно все блиндажи до ближайшего перекрёстка. Там повторяется проверка несквозных проходов и т. д. Так можно проверить всю систему.

Тем самым, любая система, не содержащая ни циклов, ни трилистника, ненадёжна. Разрушив любую траншею в трилистнике, мы получим ненадёжную систему, так что трилистник является минимальной надёжной системой. Наконец, любая система, состоящая из трилистника и чего-то ещё, надёжна, но не минимальна.

10 класс

1. Можно считать, что абсцисса точки A меньше абсциссы точки B (рис. 10.1). Рассмотрим точку K пересечения отрезков AH_A и OB. Тогда разность рассматриваемых площадей равна разности площадей треугольника OAK и четырёхугольника H_AKBH_B, которая, в свою очередь, равна разности площадей треугольников OAH_A и OBH_B. А поскольку $OH_A \cdot AH_A = OH_B \cdot BH_B = 1$ (вспомните, что A и B лежат на графике), эти площади равны между собой.

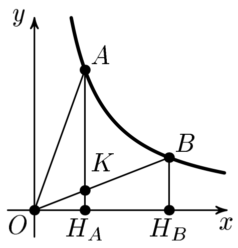


Рис. 10.1

2. Заметим, что

$$f(x) = (x+6)^2 - 6.$$

Отсюда видно, что
$$f(f(f(f(f(x))))) = (x+6)^{32} - 6.$$
Осталось выписать ответ: $x = -6 \pm \sqrt[32]{6}$.

3. Докажем, что каждая из рассматриваемых величин равна площади многоугольника. Проверим это для суммы длин горизонтальных отрезков. Проведём эти отрезки. Тогда многоугольник разобьётся на два треугольника и несколько трапеций, причём высоты этих фигур будут равны 1. Осталось выразить площади этих фигур через основания и высоты по известной формуле и сложить. Видно, что каждый горизонтальный отрезок войдёт в сумму два раза, то есть с коэффициентом единица, что и требовалось.

4. См. решение задачи 5 варианта 9 класса.

5. Ответ: а), в) можно; б) нельзя. Объясним, как можно действовать в пунктах а) и в). Очевидно, что разрешёнными операциями можно получить из последовательности $\{a_n\}$ последовательность $\{a_{n+1} - a_n\}$. Такое преобразование обозначим через T, а m-кратное применение преобразования T обозначим через T^m. Заметим, что если $P(n)$ — многочлен от n степени $m-1$, то применение T к последовательности $\{P(n)\}$ даёт последовательность $\{Q(n)\}$, где $Q(n)$ — многочлен степени $m-2$. Отсюда, в частности, следует, что применение T^m к $\{P(n)\}$ даёт нулевую последовательность. Ещё нам пригодится последовательность I, все члены которой — единицы (её можно получить делением данной последовательности на себя). Теперь легко предъявить последовательность операций для каждого из пунктов:

а) $$\{n^2\} \xrightarrow{T} \{2n+1\} \xrightarrow{-I} \{2n\} \xrightarrow{/(I+I)} \{n\};$$

в) $$\left\{\frac{n^{2000}+1}{n}\right\} \xrightarrow{T^{2000}} \left\{\frac{2000!}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+2000)}\right\} \xrightarrow{I/}$$
$$\xrightarrow{I/} \left\{\frac{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+2000)}{2000!}\right\} \xrightarrow[2000!\ \text{раз}]{\times(\underbrace{I+I+\ldots+I})} \{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+2000)\} \xrightarrow{T^{2000}}$$
$$\xrightarrow{T^{2000}} \{an+b\},$$
где a и b — целые числа, $a \neq 0$. Дальнейшие действия ясны.

б) Докажем, что последовательность $\{n\}$ получить нельзя. Для этого заметим, что все последовательности, которые можно получить из $\{n+\sqrt{2}\}$, имеют вид $\left\{\dfrac{P(n+\sqrt{2})}{Q(n+\sqrt{2})}\right\}$, где P и Q — многочлены с целыми коэффициентами. (В самом деле, исходная последовательность такой вид имеет.

При почленном сложении, вычитании, умножении или делении последовательностей такого вида, очевидно, снова получится последовательность такого вида, а выбрасывание нескольких членов равносильно замене $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на $\frac{P(x+r)}{Q(x+r)}$ для некоторого натурального r, что можно представить в требуемом виде, раскрыв все скобки в числителе и знаменателе.) Если в таком виде представляется последовательность $\{n\}$, то в таком виде представляется и последовательность, все члены которой равны $\sqrt{2}$. Но из равенства $\frac{P(n+\sqrt{2})}{Q(n+\sqrt{2})} = \sqrt{2}$ следует, что отношение старших коэффициентов многочленов P и Q равно $\sqrt{2}$, что невозможно. Противоречие.

6. а) Пусть Гриша скажет: «У меня либо {называет свои карты}, либо {называет три карты, которых у него нет}». После этого Лёша должен сказать: «У меня либо {называет свои карты}, либо {называет три карты Гриши, если второй из наборов, названных Гришей, не совпадает с его набором, и любые другие три карты, которых у него нет, иначе}». После этого каждый из них, очевидно, знает весь расклад. Коле же ничего не ясно. Действительно, названо три набора карт: A, B и C. Наборы B и C пересекаются по двум картам, Гриша сказал: «У меня либо A, либо B», Лёша сказал: «У меня либо A, либо C». Это означает, что либо у Гриши набор A, а у Лёши — C, либо у Гриши — B, а у Лёши — A. Конечно, эти расклады различны, и даже закрытую карту определить нельзя.

б) Заметим, что предыдущий способ не работает: зная закрытую карту, Коля может всё определить. Занумеруем карты числами от 0 до 6. Пусть Гриша и Лёша по очереди назовут остатки от деления суммы номеров своих карт на 7. Тогда они узна́ют расклад: каждый из них должен лишь прибавить к своей сумме сумму другого и найти остаток, противоположный этой общей сумме по модулю 7 (т. е. такой, который при прибавлении к этой сумме даёт число, делящееся на 7). Это и будет номер закрытой карты. После этого восстановление расклада не составляет труда. Проверим, что Коля ничего не узнал. Рассмотрим карту с номером s. Покажем, что она могла попасть к Грише, если он назвал сумму a. Для этого надо дополнить эту карту двумя другими с суммой номеров $a-s$. Легко видеть, что существует три различные пары номеров, дающие в сумме $a-s$. Из них две, возможно, испорчены тем, что туда входит карта с номером s или закрытая карта, но как минимум одна пара остаётся. Ей мы и дополним набор Гриши. Такие же рассуждения показывают, что любая карта могла оказаться и у Лёши.

11 класс

1. Ответ: 2000^2-1. Пусть $a=2000m+n$, $b=2000n+m$, d — наибольший общий делитель a и b. Тогда d делит также числа

$$2000a-b=(2000^2-1)m \quad \text{и} \quad 2000b-a=(2000^2-1)n.$$

Поскольку m и n взаимно просты, то d делит 2000^2-1. С другой стороны, при $m=2000^2-2000-1$, $n=1$, получаем $a=(2000^2-1)(2000-1)$, $b=2000^2-1=d$.

2. Ответ: 0. График функции $|\sin kx|$ на отрезке $[0;\pi]$ состоит из k одинаковых «шапочек», которые получаются из графика функции $\sin x$ на том же отрезке путём сжатия к оси ординат в k раз. При этом площадь под графиком также уменьшается в k раз. Как следствие, площадь под k «шапочками» одинакова при любом k.

3. Пусть X — середина KB. Тогда $\angle KMX=\frac{1}{2}\angle KMB=\angle KAB=\angle KDC$. Поскольку $MX\perp BD$, то $KM\perp CD$. Так как при этом $ON\perp CD$, $ON\parallel KM$. Аналогично, $OM\parallel KN$.

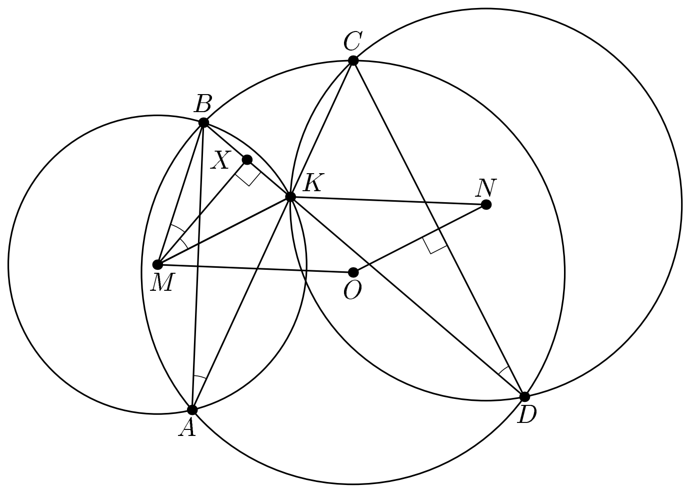


Рис. 11.1

Если точки O, K, M, N не лежат на одной прямой, то $OMKN$ — параллелограмм и $OM=KN$. В противном случае рассмотрим ортогональные проекции отрезков OM и KN на AC. Так как точки O, M, N проектируются соответственно в середины отрезков AC, AK, KC, то проекции обоих параллельных отрезков равны $\frac{1}{2}KC$. Следовательно, равны и длины самих отрезков.

4. Ответ: может. Многочлен $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ имеет корень t, больший 1, поскольку $P(1) < 0$, а $P(2) > 0$. Тогда $t^3 = t^2 + t + 1 > t^2 + t$. Возьмём длины палочек равными t^3, t^2, t. После первого отпиливания получим палочки с длинами t^2, t, 1. Так как отношение длин не изменилось, процесс будет продолжаться бесконечно.

5. Ответ: а) не могут; б) могут.

а) Пусть N — число игроков, $M = [N/2]$. Игроков, занявших первые M мест, назовём сильными, а остальных — слабыми (между участниками с одинаковой суммой очков места распределяются произвольно). Пусть X — число правильных партий между сильными и слабыми. Сумма очков, набранных сильными во встречах между собой, равна $M(M-1)/2$, а во встречах со слабыми — не больше X. Поэтому средний результат сильного не больше $(M-1)/2+X/M$. Аналогично, средний результат слабого не меньше $(N-M-1)/2+(M(N-M)-X)/(N-M)$. Если есть неправильные партии, то не все игроки набрали поровну, и средний результат сильного больше, чем слабого. Отсюда $X > M(N-M)/2 \geqslant N(N-1)/8$. Так как общее число партий равно $N(N-1)/2$, доля правильных партий больше 1/4.

б) Возьмём сначала турнир $2k+1$ игрока, в котором каждый участник с номером $i \leqslant k$ проиграл участникам с номерами $i+1, \ldots, i+k$ и выиграл у остальных, а каждый участник с номером $i > k$ выиграл у участников с номерами $i-k, \ldots, i-1$ и проиграл остальным. Очевидно, что все игроки набрали по k очков, причём в таблице турнира выше главной диагонали единицы стоят лишь в $\frac{k(k+1)}{2}$ клетках из $\frac{2k(2k+1)}{2}$. Теперь «размножим» каждого игрока, заменив его блоком из n новых, и пусть участники из разных блоков играют друг с другом так же, как соответствующие прежние участники, а участники из одного блока играют друг с другом вничью. Получим новую таблицу, в которой по-прежнему у всех игроков поровну очков. Исправим эту таблицу так, чтобы суммы очков игроков перестали быть равными. Для этого будем менять результаты участников из блока $k+1$: в их встречах против участников из блока $k+1-i$ заменим in выигрышей ничьими, так что сумма очков каждого участника блока $k+1$ уменьшится, а каждого участника блока $k+1-i$ увеличится на $\frac{i}{2}$. Напротив, в партиях с игроками блока $k+1+i$ заменим ничьими in проигрышей. Число неправильных партий станет равно $n^2\frac{2k(2k+1)}{2} - n^2\frac{k(k+1)}{2} - 2n\frac{k(k+1)}{2}$. При этом общее число партий равно $\frac{n(2k+1)(n(2k+1)-1)}{2}$. При $n = k = 20$ неправильные партии составляют $\frac{235\,600}{335\,790} > 0{,}7$ от общего числа партий.

6. Будем помещать между плоскостями правильные тетраэдры, расстояние между противоположными рёбрами которых равно расстоянию между плоскостями. Пусть одно из рёбер каждого тетраэдра лежит в одной из граничных плоскостей, а противоположное ему — в другой. Два тетраэдра можно расположить так, чтобы конец «верхнего» ребра первого совпадал с серединой «верхнего» ребра второго, а середина «нижнего» ребра первого — с концом «нижнего» ребра второго, и при этом как «верхние», так и «нижние» рёбра обоих тетраэдров были перпендикулярны. Распространив этот процесс на весь слой, получим, что каждый тетраэдр окружён четырьмя другими (рис. 11.2); два из них не позволяют выдвинуть его «вверх», два остальных — «вниз».

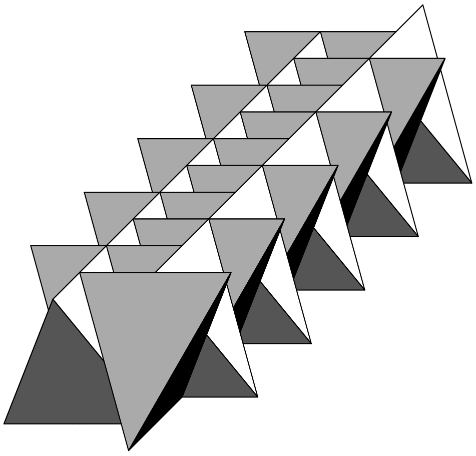


Рис. 11.2