Условия

8 класс

8.1. На острове $\frac{2}{3}$ всех мужчин женаты и $\frac{3}{5}$ всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке? (В. Гуровиц)

8.2. Квадрат суммы цифр числа A равен сумме цифр числа A^2. Найдите все такие двузначные числа A. (А. Блинков)

8.3. Дана окружность с диаметром AB. Другая окружность с центром в A пересекает отрезок AB в точке C, причём $AC < \frac{1}{2}AB$. Общая касательная двух окружностей касается первой окружности в точке D. Докажите, что прямая CD перпендикулярна AB. (А. Заславский)

8.4. Двое игроков по очереди выставляют на доску 65×65 по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтали или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре? (А. Бучин, А. Иванищук)

8.5. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M. Докажите, что если угол AMB

а) прямой;

б) острый,

то $AC + BC > 3AB$. (И. Богданов)

8.6. В клетчатом прямоугольнике $m \times n$ каждая клетка может быть либо живой, либо мёртвой. Каждую минуту одновременно все живые клетки умирают, а те мёртвые, у которых было нечётное число живых соседей (по стороне), оживают. При каких m и n найдётся такая начальная расстановка живых и мёртвых клеток, что жизнь в прямоугольнике будет существовать вечно, то есть в каждый момент времени хотя бы одна клетка будет живой? (А. Горбачёв)

9 класс

9.1. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?
(Фольклор, формулировка — А. Шаповалов)

9.2. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$. (В. Сендеров)

9.3. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AB и BC соответственно в точках F и G. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что четырёхугольник $BFIG$ — ромб. (В. Жгун)

9.4. Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению $x^4 - 2y^2 = 1$. (В. Сендеров)

9.5. В ряд расположили n лампочек и зажгли некоторые из них. Каждую минуту после этого все лампочки, горевшие на прошлой минуте, гаснут, а те лампочки, которые на прошлой минуте соседствовали ровно с одной горящей лампочкой, загораются. При каких n можно так зажечь некоторые лампочки вначале, чтобы потом в любой момент нашлась хотя бы одна горящая лампочка? (А. Горбачёв)

9.6. Остроугольный треугольник разрезали прямолинейным разрезом на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей — опять на две части, и так далее: на каждом шаге выбирали любую одну из уже имеющихся частей и разрезали её (по прямой) на две. Через несколько шагов оказалось, что исходный треугольник распался на несколько треугольников. Могут ли все они быть тупоугольными? (Г. Гальперин)

10 класс

10.1. Тангенсы углов треугольника — натуральные числа. Чему могут быть равны эти числа? (А. Заславский)

10.2. Про положительные числа a, b, c известно, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant a+b+c$. Докажите, что $a+b+c \geqslant 3abc$. (С. Злобин)

10.3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки E и F являются серединами сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE, AF и EF делят четырёхугольник на 4 треугольника, площади которых равны последовательным натуральным числам. Каково наибольшее возможное значение площади треугольника ABD? (С. Шестаков)

10.4. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он сможет рассадить всех на свои места? (А. Шаповалов)

10.5. В городе Удоеве выборы мэра проходят следующим образом. Если в очередном туре голосования никто из кандидатов не набрал больше половины голосов, то проводится следующий тур с участием всех кандидатов, кроме последнего по числу голосов. (Никогда два кандидата не набирают голосов поровну, если кандидат набрал больше половины голосов, то он становится мэром и выборы заканчиваются.) Каждый избиратель в каждом туре голосует за одного из кандидатов. Если этот кандидат вышел в следующий тур, то избиратель снова голосует за него. Если же кандидат выбыл, то все его избиратели голосуют за одного и того же кандидата из числа оставшихся.

На очередных выборах баллотировалось 2002 кандидата. Мэром стал Остап Бендер, занявший в первом туре k-е место по числу голосов. Определите наибольшее возможное значение k, если Остап был избран

а) в 1002-м туре;

б) в 1001-м туре. (Б. Френкин)

10.6. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в чёрный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества чёрных точек были подобны друг другу (возможно с различными коэффициентами подобия). (Г. Гальперин)

11 класс

11.1. Тангенсы углов треугольника — натуральные числа. Чему могут быть равны эти числа? (А. Заславский)

11.2. Докажите, что на графике функции $y=x^3$ можно отметить такую точку A, а на графике функции $y=x^3+|x|+1$ — такую точку B, что расстояние AB не превысит $1/100$. (А. Спивак, А. Хачатурян)

11.3. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он сможет рассадить всех на свои места? (А. Шаповалов)

11.4. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в последовательности найдётся некоторое число, начиная с которого каждое число равно сумме всех предыдущих. (А. Шаповалов)

11.5. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC; O_A, O_B, O_C — центры вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно; T_A, T_B, T_C — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA, AB соответственно. Докажите, что все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны. (Л. Емельянов)

11.6. В городе Удоеве выборы мэра проходят следующим образом. Если в очередном туре голосования никто из кандидатов не набрал больше половины голосов, то проводится следующий тур с участием всех кандидатов, кроме последнего по числу голосов. (Никогда два кандидата не набирают голосов поровну, если кандидат набрал больше половины голосов, то он становится мэром и выборы заканчиваются.) Каждый избиратель в каждом туре голосует за одного из кандидатов. Если этот кандидат вышел в следующий тур, то избиратель снова голосует за него. Если же кандидат выбыл, то все его избиратели голосуют за одного и того же кандидата из числа оставшихся.

На очередных выборах баллотировалось 2002 кандидата. Мэром стал Остап Бендер, занявший в первом туре k-е место по числу голосов. Определите наибольшее возможное значение k, если Остап был избран

а) в 1002-м туре;

б) в 1001-м туре. (Б. Френкин)

Решения

8 класс

8.1. Ответ: $\frac{12}{19}$ населения острова.

Пусть число супружеских пар на острове равно N, то есть замужем N женщин, женаты N мужчин. Замужние женщины составляют $\frac{3}{5}$ всех женщин острова, значит, на острове $\frac{5}{3}N$ женщин. Женатые мужчины составляют $\frac{2}{3}$ всех мужчин острова, значит, на острове $\frac{3}{2}N$ мужчин. Всего на острове $\frac{5}{3}N + \frac{3}{2}N = \frac{19}{6}N$ жителей, а в браке состоит $2N$ жителей. Искомая доля равна

$$\frac{2N}{\frac{19}{6}N} = \frac{12}{19}.$$

8.2. Ответ: 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31.

Решение 1. Заметим, что $A^2 \leqslant 99^2 = 9801 < 9999$. Поэтому сумма цифр A^2 меньше $9 \cdot 4 = 36$. Так как она равна квадрату суммы цифр A, то сумма цифр A меньше $\sqrt{36} = 6$, то есть меньше или равна 5. Остаётся 15 вариантов: 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 40, 41, 50, из которых условию удовлетворяют только 9 вариантов, указанных в ответе.

Решение 2. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. Заметим, что при сложении двух чисел «столбиком» возможен только перенос единицы в старший разряд, и каждый такой перенос уменьшает сумму цифр на 9. Поэтому сумма цифр суммы любого количества слагаемых не превосходит суммы цифр слагаемых. Как следствие, $S(n) \leqslant n$, так как $n = 1+1+\ldots+1$ (n единиц), причём равенство достигается лишь для однозначных чисел, ведь при прибавлении очередной единицы к сумме девяти единиц уже возникнет перенос. Кроме того, от дописывания справа нуля сумма цифр не меняется, то есть $S(10n) = S(n)$.

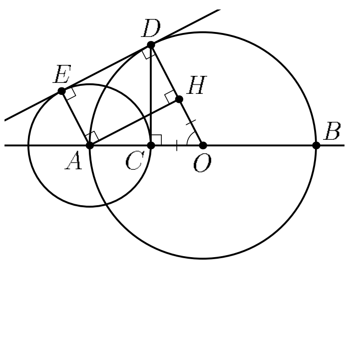
Пусть искомое двузначное число $A = \overline{ab} = 10a + b$. Тогда

$$\begin{aligned} S(A^2) = S\big((10a+b)^2\big) = S\big(100a^2 + 10 \cdot 2ab + b^2\big) \leqslant \\ \leqslant S\big(100a^2\big) + S\big(10 \cdot 2ab\big) + S\big(b^2\big) = S\big(a^2\big) + S\big(2ab\big) + S\big(b^2\big) \leqslant \\ \leqslant a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = \big(S(A)\big)^2, \end{aligned}$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда a^2, $2ab$ и b^2 — однозначные числа (если это так, то при сложении $100a^2$, $10 \cdot 2ab$ и b^2 переносов не происходит, так как они в разных разрядах). Итак, необходимо и достаточно, чтобы числа a^2, b^2 и $2ab$ были меньше 10, то есть $1 \leqslant a \leqslant 3$, $0 \leqslant b \leqslant 3$ и $ab \leqslant 4$.

Отсюда находим все перечисленные в ответе варианты.

8.3.



Здесь должен быть еще один рисунок — к решению 2

Решение. Обозначим через E точку касания второй окружности с общей касательной, через O — центр первой окружности. Треугольник AOD — равнобедренный, поэтому $\angle ODA = \angle OAD$. Так как $OD \parallel AE$, то $\angle DAE = \angle ODA$, откуда $\triangle DEA = \triangle DCA$ (по двум сторонам и углу между ними). Значит, $\angle DCA = \angle DEA = 90^\circ$ и прямые DC и AB перпендикулярны.

Замечание. Легко проверить, что утверждение задачи остаётся верным при любом радиусе второй окружности, меньшем AB.

8.4. Ответ: выигрывает второй.

Решение 1. Пусть первый поставил на доску первую шашку. Заметим, что от перестановки горизонталей доски ничего не изменяется. То же относится и к перестановкам вертикалей. Переставим горизонтали и вертикали так, чтобы первая шашка оказалась в средней вертикали, но не в центре доски.

Второй игрок должен делать ходы симметрично ходам первого игрока относительно центра доски. Тогда вторая шашка тоже окажется в средней вертикали, и первый не сможет занять центральную клетку. Легко проверить, что второй всегда сможет сделать симметричный ход (отдельно следует рассмотреть случай хода в среднюю горизонталь).

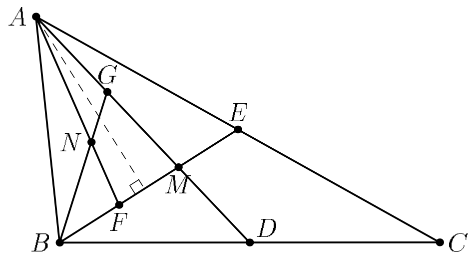
Решение 2. Опишем эту игру по-другому. Есть два ряда по 65 точек в каждом (точки одного ряда обозначают горизонтали доски, точки другого — вертикали).

Постановке шашки на пересечение горизонтали и вертикали соответствует проведение отрезка, соединяющего точки, которые обозначают эти горизонталь и вертикаль. Таким образом, правила запрещают проводить из одной точки больше двух отрезков.

Второй игрок должен играть (за исключением последнего хода) так, чтобы после каждого его хода проведённые отрезки образовывали незамкнутую ломаную (возможно самопересекающуюся). Тогда после k-го хода второго игрока ломаная будет состоять из $2k$ звеньев и проходить через $2k+1$ точку (k точек на одной прямой и $k+1$ точку на другой). Поэтому первые 64 хода второй игрок всегда сможет продолжить ломаную или соединить её с отдельным отрезком, проведённым первым на предыдущем ходе. Последним, 65-м ходом, второй игрок должен соединить отрезком начало и конец ломаной превращая её в замкнутую, проходящую через все 130 точек. После этого первый игрок не сможет сделать ход.

8.5 а), б). Решение 1. Проведём в треугольнике AMB медианы AF и BG и обозначим через N точку их пересечения. Заметим, что $MF = \frac{1}{2}MB = ME$, так как M — точкой пересечения медиан — делит BE в отношении $2:1$. Поскольку $\angle AMF \leqslant 90^\circ$, то основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую EB, лежит на луче MB. Поэтому $AF \leqslant AE$ (равенство достигается в случае $\angle AMB = 90^\circ$). $AN = \frac{2}{3}AF \leqslant \frac{2}{3}AE = \frac{1}{3}AC$. Аналогично, $BN \leqslant \frac{1}{3}BC$. Используя неравенство треугольника, получаем требуемое неравенство:

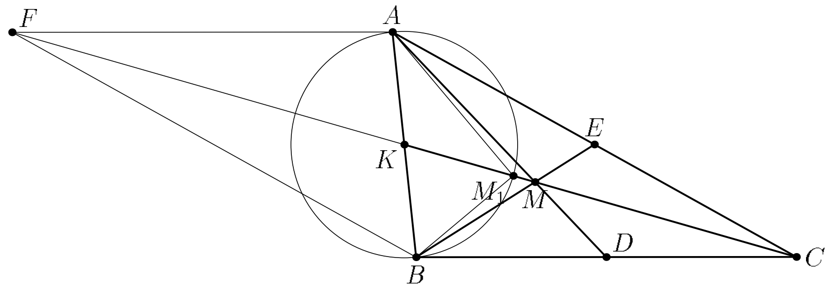
$$AC + BC \geqslant 3(AN + NB) > 3AB.$$



Решение 2. Проведём медиану CK и продолжим её на отрезок той же длины, получим точку F, такую что $KF = CK$. Четырёхугольник $ACBF$ — параллелограмм. Из $\triangle ACF$ имеем: $AC + AF > FC = 2CK$, значит, $AC + CB > 2CK$.

Построим на стороне AB как на диаметре окружность. Поскольку угол AMB не тупой, точка M не лежит внутри этой окружности (это можно понять, если рассмотреть точку M_1 пересечения CK с окружностью, угол AM_1B — прямой, а $\angle AMB \leqslant \angle AM_1B$). Значит, $MK \geqslant AK = \frac{1}{2}AB$. Но $MK \geqslant M_1K = \frac{1}{3}CK$, поэтому

$$AC + CB > 2CK = 6MK \geqslant 3AB.$$



8.6. Ответ: при всех парах чисел (m, n), кроме пар $(1, 1)$, $(1, 3)$ и $(3, 1)$.

Достаточно рассмотреть случай $m \leqslant n$.

Пусть для некоторого n в прямоугольнике $1 \times n$ существует вечно живая расстановка. Тогда такая расстановка существует и во всех прямоугольниках $m \times n$. Достаточно рассмотреть следующий вариант: берём вечно живую расстановку $1 \times n$ и копируем её во все строки прямоугольника $m \times n$. Тогда в нём столбцы будут эволюционировать так же, как клетки в соответствующем столбце прямоугольника $1 \times n$. Действительно, все клетки живого столбца умирают, как и соответствующая клетка прямоугольника $1 \times n$. У каждой клетки мёртвого столбца соседи сверху и снизу мертвы, поэтому количество её живых соседей равно количеству живых соседних столбцов, а значит, и количеству живых соседей у соответствующей клетки в прямоугольнике $1 \times n$. Поскольку в нём всегда остаётся хотя бы одна живая клетка, то в построенной расстановке $m \times n$ всегда остаётся хотя бы один живой столбец.

Заметим, что при $n = 2$ и $n \geqslant 4$ вечно живые расстановки $1 \times n$ существуют: каждая из нижеперечисленных расстановок имеет период 2, то есть каждую вторую минуту возвращается в исходное состояние (+ — живая, − — мёртвая):

$$\begin{aligned} n = 2:&\quad + - \leftrightarrow - + \\ \text{чётное } n \geqslant 4:&\quad (+-)(-+)(+-)(-+)\cdots \leftrightarrow (-+)(+-)(-+)(+-)\ldots \\ \text{нечётное } n \geqslant 4:&\quad (+-) - (-+)(+-)(-+)\cdots \leftrightarrow (-+) - (+-)(-+)(+-)\ldots \end{aligned}$$

Кроме того, есть расстановка (также периода 2) в прямоугольнике 3×3:

$$\begin{matrix} + & + & - \\ - & - & - \\ - & + & + \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} - & - & + \\ + & - & + \\ + & - & - \end{matrix}$$

Тем самым, во всех прямоугольниках, кроме 1×1 и 1×3, примеры вечно живых расстановок уже построены. Покажем, что в прямоугольниках 1×1 и 1×3 любая расстановка рано или поздно умрёт. Случай 1×1 очевиден. Для случая 1×3 можно считать (возможно, начиная отсчёт со второго шага), что первая клетка мертва. Тогда остаётся 3 варианта, в которых есть хотя бы одна живая клетка. Эволюция варианта $-++$ включает в себя и $-+-$:

$$-++ \to +-- \to -+- \to +-+ \to ---,$$

а вариант $--+$ симметричен варианту $+--$, который также входит в рассмотренный выше пример.

9 класс

9.1. Ответ: всегда.

Договоримся в случае, когда сержант стоит в строю, обозначать буквой m количество человек, стоящих за сержантом к нему лицом, а буквой n — количество человек, стоящих перед сержантом к нему лицом.

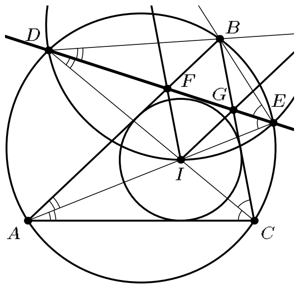
Пусть сначала сержант встанет в конец строя. Тогда за ним никого не будет ($m = 0$). Если и перед сержантом никто не будет стоять к нему лицом ($n = 0$), то задача решена. В противном случае ($n > 0$) пусть сержант идёт вдоль строя от человека к человеку. Если он проходит новобранца, стоявшего к нему спиной, то число m увеличивается на 1, а число n не изменяется. Если сержант проходит новобранца, стоявшего к нему лицом, то число n уменьшается на 1, а число m не изменяется. Иначе оба числа m и n остаются без изменений. Тем самым, число $m - n$ сначала отрицательно, а в процессе движения сержанта вдоль строя может увеличиваться не более чем на 1 при прохождении каждого новобранца. Но когда сержант дойдёт до начала строя, уже число n будет нулевым, а значит, число $m - n$ будет неотрицательным. Итак, начав с отрицательного числа $m - n$ и прибавляя к нему несколько раз по единице, мы получили неотрицательное число. Значит, в какой-то момент мы должны были получить ноль, то есть в тот момент $m = n$ и с обеих сторон от сержанта лицом к нему находилось поровну новобранцев.

9.2. Используя неравенство треугольника $a + b > c$ и то, что $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$, получаем цепочку неравенств:

$$a^3 + b^3 + 3abc = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > c(a^2 - ab + b^2) + 3abc =$$
$$= c(a^2 + 2ab + b^2) = c(a+b)^2 > c \cdot c^2 = c^3.$$

9.3. Отразим треугольник ABC относительно прямой DE. По свойству вписанных углов $\angle AED = \angle ACD = \angle BCD = \angle BED$, поэтому прямая AE при этом отражении перейдёт в прямую BE, аналогично прямая CD при отражении перейдёт в прямую BD. Тогда точка пересечения прямых AE и CD, то есть точка I, перейдёт при отражении в точку пересечения прямых BE и BD, то есть в точку B. Таким образом, треугольник IFG перейдёт при нашем отражении в треугольник BFG, откуда $IF = BF$, $IG = BG$ и прямая BI перпендикулярна DE. Но луч BI — биссектриса угла FBG, и поэтому $\triangle FBG$ равнобедренный, то есть $FB = BG$.

Итак, все стороны четырёхугольника $BFIG$ равны, значит, это ромб.



9.4. Ответ: $x = 1$, $y = 0$ или $x = -1$, $y = 0$.

Знаки x и y можно выбирать произвольно, поэтому будем искать только неотрицательные решения. Ясно, что x — нечётное число, $x = 2t + 1$. Перепишем уравнение в виде

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1) = 2t \cdot (2t+2) \cdot (4t^2+4t+2) = 2y^2.$$

Теперь видно, что y — чётное число, $y = 2u$. Получаем уравнение на неотрицательные t, u:

$$t(t+1)(2t(t+1)+1) = u^2.$$

Числа t, $t+1$ и $2t(t+1)+1$ попарно взаимно просты, а их произведение — полный квадрат. Значит, каждое из них также является полным квадратом. Это возможно только при $t = 0$ (единственная пара последовательных полных квадратов — это 0 и 1). Тогда и $u = 0$. Значит, $x = \pm 1$, $y = 0$.

9.5. Ответ: при всех n кроме 1 и 3.

См. решение задачи 8.6, где данной задаче соответствует случай прямоугольников $1 \times n$ (горящие лампочки — это живые клетки).

9.6. Ответ: не могут.

Докажем индукцией по количеству имеющихся частей следующее утверждение: после каждого разрезания найдётся часть (многоугольник) хотя бы с тремя не тупыми углами.

База индукции. Сначала есть одна часть, и это треугольник с тремя острыми углами.

Шаг индукции. Пусть на очередном шаге имеется многоугольник M хотя бы с тремя не тупыми углами и мы делаем очередное разрезание.

Если мы режем не многоугольник M, то шаг индукции доказан. Пусть мы разрезали M по прямой на две части. Обозначим точки пересечения этой прямой с многоугольником M буквами A и B.

Если точка A лежит внутри одной из сторон многоугольника M, то линия разреза образует с этой стороной два смежных угла, по крайней мере один из которых — не тупой. Если же точка A — вершина многоугольника, то соответствующий ей угол многоугольника разбивается разрезом на два угла, сумма которых меньше $180°$. Значит, тем более один из них не тупой. При этом угол A сам не был тупым, то, очевидно, оба получившихся угла также не тупые. Таким образом, после разреза к точке A примыкает больше не тупых углов (по крайней мере на единицу). Аналогичные рассуждения про второй конец разреза показывают, что дополнительный не тупой угол появляется и там.

По предположению индукции многоугольник M имел не менее трёх не тупых углов. Поэтому после разрезания у двух получившихся многоугольников таких углов в сумме не менее пяти. Но согласно принципу Дирихле по крайней мере в одном из них не тупых углов не менее трёх. Шаг индукции доказан.

Тем самым, утверждение доказано. Значит, после того как исходный треугольник распадётся на треугольники, хотя бы у одного из них будет не меньше трёх не тупых углов, то есть все углы этого треугольника будут не тупыми.

10 класс

10.1. Ответ: тангенсы углов треугольника равны 1, 2 и 3.

Решение 1. Обозначим углы треугольника (в порядке неубывания) через α, β, γ. Тогда $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$, поэтому $0 < \operatorname{tg}\alpha \leqslant \sqrt{3}$. Так как $\operatorname{tg}\alpha$ — натуральное число, то он равен 1, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$, откуда

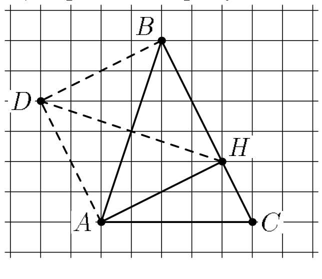
$$\begin{gathered} -1 = \operatorname{tg}(\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}, \\ \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma - 1, \\ (\operatorname{tg}\beta - 1)(\operatorname{tg}\gamma - 1) = 2. \end{gathered}$$

Число 2 — простое, поэтому одна скобка равна 1, а другая 2. Отсюда получаем: $\operatorname{tg}\beta = 2$, $\operatorname{tg}\gamma = 3$.

Решение 2. Нарисуем на клетчатой бумаге треугольник ABC как показано на рисунке. Подсчетом клеточек легко убедиться, что $\operatorname{tg}\angle BAC = 3$, $\operatorname{tg}\angle ACB = 2$. Отметим теперь точки H и D (см. рисунок). Опять-таки из подсчёта клеточек следует, что $ADBH$ — ромб с равными диагоналями, то есть квадрат. Поэтому $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, а $\operatorname{tg}\angle ABC = 1$. Итак, нарисованный треугольник удовлетворяет условию.

Покажем, что других значений тангенсов быть не может. Как было доказано в решении 1, наименьший из углов треугольника обязательно равен $\frac{\pi}{4}$. При этом остальные углы строго больше: если бы второй угол также равнялся $\frac{\pi}{4}$, то третий угол был бы равен $\pi - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ и его тангенс был бы не определён. Таким образом, один из тангенсов равен 1, а два остальных — больше 1.

Значит, кроме варианта 1, 2, 3 имеются два случая: тангенсы равны 1, 2, 2 или один из тангенсов равен 1, а два других — не меньше 3. Но в первом из них нам пришлось бы уменьшить $\angle BAC$, не изменив остальные два угла, но это противоречит теореиме о сумме углов треугольника. Во втором же случае пришлось бы увеличить один или два угла треугольника ABC, оставив третий без изменений, что невозможно по тем же причинам. Итак, вариант на рисунке — единственный.



10.2. Умножая неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant a+b+c$ на общий знаменатель, получаем равносильное неравенство $bc+ac+ab \geqslant (a+b+c)abc$.

Теперь докажем вспомогательное неравенство $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+ac+bc)$:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geqslant (ab+bc+ca) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geqslant 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca).$$

Отсюда легко получить требуемое неравенство:

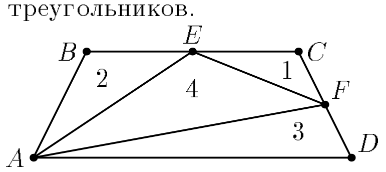
$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca) \geqslant 3(a+b+c)abc,$$
$$a+b+c \geqslant 3abc.$$

10.3. Ответ: 6.

Пусть площади треугольников равны n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Тогда площадь четырёхугольника $ABCD$ составляет $4n+6$. Площадь треугольника BCD равна учетверённой площади треугольника ECF. Значит,

$$S_{\triangle ABD} = S_{ABCD} - S_{\triangle BCD} \leqslant (4n+6) - 4n = 6.$$

Равенство достигается, если $\triangle EFC$ имеет наименьшую площадь из указанных четырёх треугольников.



Осталось доказать, что значение 6 является возможным. Примером служит равнобедренная трапеция с основаниями $AD=6$, $BC=4$ и высотой 2 (числа на рисунке обозначают площади треугольников).

10.4. Ответ: всегда.

Занумеруем всех зрителей номерами их билетов $1,\ldots,n$. Пусть, для определённости, самое правое место имеет номер n, а самое левое — номер 1. Будем решать задачу индукцией по количеству зрителей. Мы сведём задачу к той же задаче с меньшим числом зрителей, пересадив зрителя n на своё место.

Пусть билетёр действует следующим образом. Он пересаживает зрителя n вправо, если его правый сосед при этом не садится на своё место. Если зрителя n не удаётся пересадить правее с места k, то на $(k+1)$-м месте сидит зритель k. Выберем наибольшее m такое, что зрители с номерами $k, k+1, \ldots, k+m-1$ сидят на местах $k+1, k+2, \ldots, k+m$ соответственно. Возможны два случая: $k+m<n$ или $k+m=n$.

В первом случае на $(k+m+1)$-месте сидит зритель j, $j \neq k+m$. Поэтому безопасно пересадить j налево, потом ещё раз налево и т.д., пока он не поменяется местами со зрителем n. В результате билетёру удастся пересадить зрителя n на одно место правее, и он может повторять эту процедуру до тех пор, пока не произойдёт одно из двух: зритель n окажется на своём месте или встретится второй случай.

Во втором случае билетёр может рассадить по своим местам зрителей $k, k+1, \ldots, n$, пересаживая зрителя n вправо до его места.

Таким образом, несколько зрителей в правом конце ряда будут сидеть на своих местах, а остальные — нет. Задача сведена к исходной с меньшим числом зрителей.

10.5. Ответ: а) $k = 2001$; б) $k = 1$.

а) Остап не мог занять последнее, 2002-е, место в первом туре, поскольку иначе он сразу же выбыл бы из числа кандидатов.

Пусть кандидаты в первом туре набрали 10^6, 10^6+1, ... , 10^6+2001 голос, а Остап был предпоследним и после каждого тура получал все голоса выбывшего кандидата. Тогда в 1001-м туре у него ещё меньше половины голосов, а именно: голоса всех кандидатов, занявших последние 1001 место в первом туре. Однако в 1002-м туре у Остапа уже более половины всех голосов, действительно, у Остапа

$$10^6+(10^6+1)+\ldots+(10^6+1001) = 1002\cdot 10^6+\frac{1001\cdot 1002}{2} = 1002\cdot 10^6+1001\cdot 501 = 1\,002\,501\,501$$

голосов, а всего избирателей

$$10^6+(10^6+1)+\ldots+(10^6+2001) = 2002\cdot 10^6+\frac{2001\cdot 2002}{2} = 2002\cdot 10^6+2001\cdot 1001 = 2\,004\,003\,001.$$

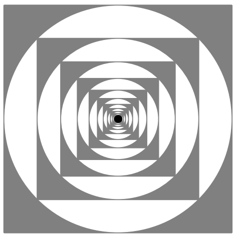
Нетрудно проверить, что это меньше удвоенного числа голосов Остапа.

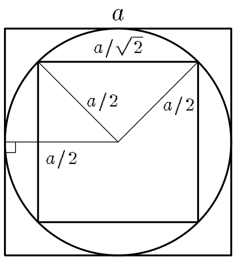
б) Предположим, что $k > 1$. Кандидата, занявшего первое место в первом туре, назовём фаворитом. Тех, кто выбыл в первой тысяче туров, назовём аутсайдерами, а всех остальных кандидатов, кроме Остапа, — лидерами. Поскольку число аутсайдеров 1000, а лидеров 1001, то один из лидеров не получал голосов аутсайдеров. В первом туре (и позже) он имел больше голосов, чем любой аутсайдер (так как в конечном счёте выбыл аутсайдер, а не этот лидер). Поэтому фаворит, набравший в первом туре наибольшее число голосов, не входит в число аутсайдеров.

Максимальное число голосов, которое мог собрать Остап к 1001-му туру, — это все голоса аутсайдеров на момент вылета каждого из них и голоса первоначальных избирателей Остапа. Любой из лидеров в любом из первой тысячи туров (а тем более в 1001-м) имеет больше голосов, чем аутсайдер этого тура. Фаворит заведомо имеет больше, чем имел Остап в первом туре. Поэтому лидеры в сумме имеют в 1001-м туре больше голосов, чем Остап, и он не может стать победителем.

Дополнительный вопрос: изменится ли ответ в задаче, если голоса выбывшего кандидата произвольно делятся между оставшимися?

10.6. Ответ: можно.





Рассмотрим такую раскраску квадрата: впишем круг в квадрат и раскрасим в чёрный цвет точки квадрата, лежащие вне круга; впишем в полученный круг квадрат со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата. Раскрасим в белый цвет точки круга, лежащие вне «маленького» квадрата. По такому же правилу раскрасим маленький квадрат и т.д.. Заметим, что мы считаем граничные точки лежащими «внутри» фигуры. Таким образом, граница каждого квадрата покрашена чёрным, за исключением четырёх точек касания вписанного в квадрат круга, а граница каждого круга — белым, за исключением четырёх вершин квадрата, вписанного в этот круг.

Пусть сторона исходного квадрата равна a, тогда сторона маленького квадрата равна $a/\sqrt{2}$. Следовательно, длины сторон квадратов стремятся к 0. Поэтому все точки, кроме центра, будут раскрашены. Центр раскрасим в чёрный цвет.

Очевидно, что множество чёрных точек квадрата подобно множеству чёрных точек круга, вписанного в этот квадрат (второе получается из первого гомотетией с центром в центре квадрата и с коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2}}$). А множество белых точек квадрата просто совпадает с множеством белых точек вписанного в него круга.

11 класс

11.1. См. задачу 10.1.

11.2. Положим $t = 100$. Точка B с координатами (t, c), где $c = t^3 + t + 1$, очевидно, лежит на графике функции $y = x^3 + |x| + 1$.

Рассмотрим положительное число $r = \sqrt[3]{c} - t$. Тогда $(t + r)^3 = c$, следовательно, точка A с координатами $(t + r, c)$ лежит на графике функции $y = x^3$.

Расстояние между точками A и B равно r. Но из равенства $(t + r)^3 = c = t^3 + t + 1$ следует, что $3t^2r + 3tr^2 + r^3 = t + 1$, $3t^2r < t + 1$, $r < \frac{t+1}{3t^2} = \frac{101}{3 \cdot 100 \cdot 100} < \frac{1}{100}$.

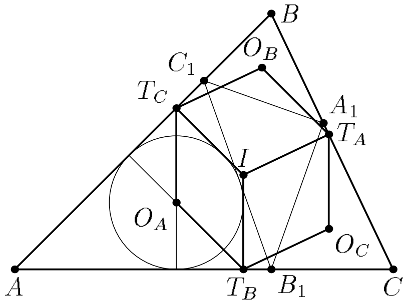
11.3. См. задачу 10.4.

11.4. Рассмотрим последовательность частных k_n, $n \geqslant 2002$. Пусть частное от деления суммы предыдущих членов S_{n-1} на очередной член a_n равно k_n, то есть $S_{n-1} = a_n k_n$. Так как следующий член a_{n+1} делит сумму $S_{n-1} + a_n$ и $a_{n+1} > a_n$, то

$$\frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{S_{n-1} + a_n}{a_{n+1}} < \frac{S_{n-1} + a_n}{a_n} = k_n + 1.$$

То есть частные не возрастают: $k_{n+1} \leqslant k_n$. Поэтому, начиная с некоторого места (при $n \geqslant N$), $k_n = k$. Но тогда при $n \geqslant N$ имеем $a_{n+1} = \frac{S_{n-1}+a_n}{k} = a_n + \frac{a_n}{k}$, то есть с этого места получаем геометрическую прогрессию $a_{n+1} = \frac{k+1}{k} a_n = \frac{(k+1)^{n-N}}{k^{n-N}} a_N$. Получаем, что a_N делится на сколь угодно большую степень k. Значит, $k = 1$, что и требовалось доказать.

11.5. Обозначим через I центр вписанной окружности треугольника ABC, а через r — её радиус. Пусть $\angle BAC = \alpha$.



Докажем, что $T_B O_A \perp AB$. Находим $AB_1 = AB\cos\alpha$, $AC_1 = AC\cos\alpha$. В треугольниках BAC и B_1AC_1 угол BAC общий и $AB_1/AB = AC_1/AC =$

$\cos\alpha$. Таким образом, треугольники B_1AC_1 и BAC подобны с коэффициентом подобия, равным $\cos\alpha$. Пусть X — проекция точки O_A на AB. Отрезки AX и AT_B — это отрезки от вершины A до точек касания соответствующих сторон со вписанной окружностью в подобных треугольниках B_1AC_1 и BAC, то есть AX и AT_B — соответственные элементы в подобных треугольниках. Поэтому $AX = AT_B \cos\alpha$. Но если Y — проекция точки T_B на AB, то $AY = AT_B \cos\alpha$. Это означает, что $AX = AY$, то есть точки X и Y совпадают. Отсюда следует, что $T_BO_A \perp AB$.

Аналогично приведённому выше рассуждению докажем, что $T_AO_B \perp AB$, $T_CO_B \perp BC$, $T_BO_C \perp BC$, $T_AO_C \perp CA$, $T_CO_A \perp CA$. Очевидно, $IT_C \perp AB$, $IT_A \perp BC$, $IT_B \perp CA$, а также $IT_A = IT_B = IT_C = r$. В четырёхугольнике $T_BO_AT_CI$ противоположные стороны параллельны, следовательно, $T_BO_AT_CI$ — параллелограмм, в котором $IT_B = IT_C = T_BO_A = T_CO_A = r$. Аналогично получаем, что $T_CO_B = T_AO_B = T_AO_C = T_BO_C = r$, таким образом, все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны r.

Замечание. Можно доказать, что шестиугольник $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ центрально-симметричен и его центр лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

11.6. См. задачу 10.5.