LVIII Московская городская математическая олимпиада

8 класс

1. М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20% , на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены ещё раз вырастут на 20%?

2. Докажите, что все числа вида 10017, 100117, 1001117, ... делятся на 53.

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ и точка O внутри него. Известно, что $\angle AOB = \angle COD = 120°$, $AO = OB$ и $CO = OD$. Пусть K, L и M — середины отрезков AB, BC и CD соответственно. Докажите, что
а) $KL = LM$;
б) треугольник KLM — правильный.

4. Достаточно ли для изготовления закрытой со всех сторон прямоугольной коробки, вмещающей не менее 1995 единичных кубиков, а) 962; б) 960; в) 958 квадратных единиц материала?

5. Несколько населённых пунктов соединены дорогами с городом, а между ними дорог нет. Автомобиль отправляется из города с грузами сразу для всех населённых пунктов. Стоимость каждой поездки равна произведению веса всех грузов в кузове на расстояние. Докажите, что если вес каждого груза численно равен расстоянию от города до пункта назначения, то общая стоимость перевозки не зависит от порядка, в котором объезжаются пункты.

6. Прямая отсекает от правильного шестиугольника $ABCDEF$ треугольник AKN так, что $AK + AN = AB$. Найдите сумму углов, под которыми отрезок KN виден из вершин шестиугольника ($\angle KAN + \angle KBN + \angle KCN + \angle KDN + \angle KEN + \angle KFN$).

Москва, 12 марта 1995 года

LVIII Московская городская математическая олимпиада

9 класс

1. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

2. Дан равносторонний треугольник ABC. Для произвольной точки P внутри треугольника рассмотрим точки A' и C' пересечения прямых AP с BC и CP с BA соответственно. Найдите геометрическое место точек P, для которых отрезки AA' и CC' равны.

3. Прямоугольник размером $1 \times k$ при всяком натуральном k будем называть полоской. При каких натуральных n прямоугольник размером $1995 \times n$ можно разрезать на попарно различные полоски?

4. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab = cd$. Может ли число $a + b + c + d$ быть простым?

5. Первоначально даны четыре одинаковых прямоугольных треугольника. Каждым ходом один из имеющихся треугольников разрезается по высоте (выходящей из прямого угла) на два других. Докажите, что после любого количества ходов среди треугольников найдутся два одинаковых.

6. Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на банках стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может всем это доказать (т. е. обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашках. Докажите, что ему для этой цели
а) достаточно четырёх взвешиваний;
б) недостаточно трёх взвешиваний.

Москва, 12 марта 1995 года

LVIII Московская городская математическая олимпиада

10 класс

1. Известно число $\sin\alpha$. Какое наибольшее число значений может принимать
а) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$? б) $\sin\dfrac{\alpha}{3}$?

2. Дан равносторонний треугольник ABC. Для произвольной точки P внутри треугольника рассмотрим точки A' и C' пересечения прямых AP с BC и CP с BA соответственно. Найдите геометрическое место точек P, для которых отрезки AA' и CC' равны.

3. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K. На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности. Точка K лежит вне этих окружностей. Докажите, что длины касательных, проведённых к этим окружностям из точки K, равны.

4. Первоначально даны четыре одинаковых прямоугольных треугольника. Каждым ходом один из имеющихся треугольников разрезается по высоте (выходящей из прямого угла) на два других. Верно ли, что после любого количества ходов среди треугольников найдутся два одинаковых?

5. Целые числа a, b и c таковы, что числа $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$ и $\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a}$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

6. На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдётся кнопка, соединённая с нечётным числом лампочек из этого набора. Докажите, что нажимая на кнопки можно погасить все лампочки.

Москва, 12 марта 1995 года

LVIII Московская городская математическая олимпиада

11 класс

1. Доказать, что $|x| + |y| + |z| \leqslant |x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z|$, где x, y, z — действительные числа.

2. Можно ли рёбра n-угольной призмы раскрасить в 3 цвета так, чтобы на каждой грани были все 3 цвета и в каждой вершине сходились рёбра разных цветов, если
а) $n = 1995$;
б) $n = 1996$.

3. В треугольнике ABC AA_1 — медиана, AA_2 — биссектриса, K — такая точка на AA_1, что $KA_2 \parallel AC$. Доказать, что $AA_2 \perp KC$.

4. Разрезать отрезок $[-1; 1]$ на чёрные и белые отрезки так, чтобы интегралы любой
а) линейной функции;
б) квадратного трёхчлена
по белым и чёрным отрезкам были равны.

5*. Для какого наибольшего n можно придумать две бесконечные в обе стороны последовательности A и B такие, что любой кусок последовательности B длины не больше n содержится в A, A имеет период 1995, а B этим свойством не обладает (непериодична или имеет период другой длины)?

6*. Доказать, что существует бесконечно много таких составных n, что $3^{n-1} - 2^{n-1}$ кратно n.

7*. Существует ли такой многогранник и точка вне него, что из этой точки не видно ни одной из его вершин?

Москва, 12 марта 1995 года