LXXIV Московская математическая олимпиада, 2-ой день, 11 класс

1. Кривая на плоскости в некоторой системе координат (декартовой) служит графиком функции $y = \sin x$. Может ли та же кривая являться графиком функции $y = \sin^2 x$ в другой системе координат: если да, то каковы ее начало координат и единицы длины на осях (относительно исходных координат и единиц длины)?

2. Верно ли, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1, 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нем не было фрагментов 11, 22, 33, 123 и 321?

3. Внутри треугольника ABC взята такая точка O, что

$$\angle ABO = \angle CAO, \quad \angle BAO = \angle BCO, \quad \angle BOC = 90^\circ.$$

Найдите отношение $AC : OC$.

4. При какой перестановке $a_1, a_2, \ldots a_{2011}$ чисел $1, 2, \ldots 2011$ значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdots a_{2010}^{a_{2011}}}}}$$

будет наибольшим?

5. По рёбрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук всё время остается только в одной грани (в каждой грани — свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определенном направлении, причем так, что любые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся независимо от пирамиды, начального положения и скорости жуков.

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 03.04.2011.
Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ
см. на сайте http://olympiads.mccme.ru/mmo.

Москва, 19 марта 2011 года

LXXIV Московская математическая олимпиада, 2-ой день, 11 класс

1. Кривая на плоскости в некоторой системе координат (декартовой) служит графиком функции $y = \sin x$. Может ли та же кривая являться графиком функции $y = \sin^2 x$ в другой системе координат: если да, то каковы ее начало координат и единицы длины на осях (относительно исходных координат и единиц длины)?

2. Верно ли, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1, 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нем не было фрагментов 11, 22, 33, 123 и 321?

3. Внутри треугольника ABC взята такая точка O, что

$$\angle ABO = \angle CAO, \quad \angle BAO = \angle BCO, \quad \angle BOC = 90^\circ.$$

Найдите отношение $AC : OC$.

4. При какой перестановке $a_1, a_2, \ldots a_{2011}$ чисел $1, 2, \ldots 2011$ значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdots a_{2010}^{a_{2011}}}}}$$

будет наибольшим?

5. По рёбрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук всё время остается только в одной грани (в каждой грани — свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определенном направлении, причем так, что любые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся независимо от пирамиды, начального положения и скорости жуков.

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 03.04.2011.
Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ
см. на сайте http://olympiads.mccme.ru/mmo.

Москва, 19 марта 2011 года