7 класс

7.1. Какое из чисел больше: $1-2+3-4+5-\ldots+99-100$ или $1+2-3+4-5+6-\ldots-99+100$? Ответ обоснуйте.

Ответ: второе число больше.

Первый способ. Первое число равно $(1-2)+(3-4)+(5-6)+\ldots+(99-100)=-50$, так как разность чисел в каждой скобке равна (-1), а всего таких скобок 50. Аналогично, второе число равно $(1+2)+(-3+4)+(-5+6)+$ $+\ldots+(-99+100)=3+49=52$. Поэтому, второе число больше первого.

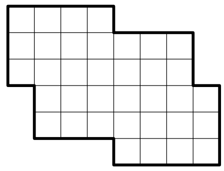
Второй способ. Объединяя слагаемые попарно так же, как и при первом способе решения, получим, что первое число отрицательно (сумма отрицательных чисел). Сумма двух данных чисел равна $(1-2+3-4+\ldots+99-100)+$ $+(1+2-3+4-\ldots-99+100)=1+1=2$, так как остальные слагаемые взаимно уничтожатся. Так как сумма двух данных чисел положительна, а первое число — отрицательно, то второе число положительно, поэтому, оно больше первого.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\pm$ *верный ход рассуждений, но допущена одна вычислительная ошибка, не повлиявшая на ответ*

$\mp$ *верный ход рассуждений, но допущено более одной вычислительной ошибки*

$-$ *приведен ответ без обоснований или с неверными обоснованиями*



7.2. Покажите, как разрезать фигуру (см. рисунок) на четыре равные части по линиям сетки.

Ответ: например, см. рис. 7.2а или рис. 7.2б.

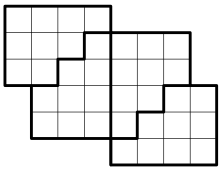


Рис. 7.2а

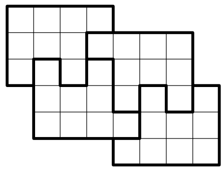


Рис. 7.2б

$+$ *приведен любой из верных ответов (достаточно одного)*

$\pm$ *приведено несколько способов разрезания, среди которых есть как верные, так и неверные*

7.3. Внутри угла AOB, равного $120°$, проведены лучи OC и OD так, что каждый из них является биссектрисой какого-то из углов, получившихся на чертеже. Найдите величину угла AOC, указав все возможные варианты.

Ответ: угол AOC может быть равен $30°$, $40°$, $60°$, $80°$ или $90°$.

Возможные расположения лучей показаны на рисунках 7.3а – 7.3г.

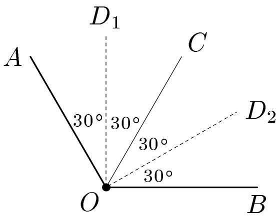


Рис. 7.3а

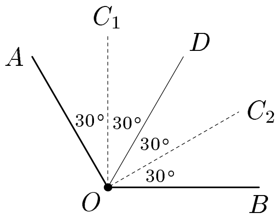


Рис. 7.3б

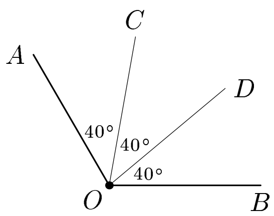


Рис. 7.3в

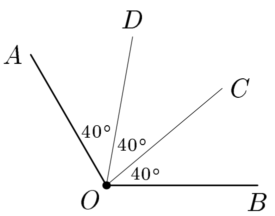


Рис. 7.3г

1) Если луч OC является биссектрисой угла AOB (см. рис. 7.3а), то $\angle AOC=60°$ (независимо от того, является ли луч OD биссектрисой угла AOC или угла BOC).

2) Если луч OD является биссектрисой угла AOB (см. рис. 7.3б), то $\angle AOC=30°$ (если OC — биссектриса угла AOD) или $\angle AOC=90°$ (если OC — биссектриса угла BOD)

3) Если луч OC — биссектриса угла AOD, а луч OD — биссектриса угла BOC (см. рис. 7.3в), то $\angle AOC=60°$.

4) Аналогично, если луч OD — биссектриса угла AOC, а луч OC — биссектриса угла BOD (см. рис. 7.3г), то $\angle AOC=80°$.

Если верно приведены все рисунки и соответствующие им ответы, то словесные пояснения от школьников не требуются. Также от школьников не требуется обоснований того, что других случаев расположения лучей нет. Кроме того, не следует снижать оценку, если в их решениях не упоминаются случаи, симметричные уже найденным (то есть не приводящие к новым ответам) или наоборот, какие-то случаи, приводящие к одному и тому же ответу, рассматриваются несколько раз.

$+$ *верно показаны и найдены все возможные значения величины угла AOC*

$\pm$ *верно показаны и найдены четыре значения величины угла AOC*

$\mp$ *верно показаны и найдены два или три значения величины угла AOC*

$\mp$ *приведен только полный ответ (без рисунков или пояснений)*

$-$ *найдено менее двух верных значений величины угла AOC*

7.4. Малыш и Карлсон вместе съели банку варенья. При этом Карлсон съел на 40% меньше ложек варенья, чем Малыш, но зато в его ложке помещалось на 150% варенья больше, чем в ложке Малыша. Какую часть банки варенья съел Карлсон?

Ответ: Карлсон съел $\frac{3}{5}$ банки варенья.

Первый способ («арифметический»). Вместимость ложки Карлсона составляет 250% от вместимости ложки Малыша, то есть ложка Карлсона вмещает столько же варенья, сколько $2,5$ ложки Малыша. При этом, количество ложек, съеденных Карлсоном, составляет 60% от количества ложек, съеденных Малышом, или, иначе говоря, $\frac{3}{5}$. Поэтому, Карлсон съел варенья в $2,5 \cdot \frac{3}{5} = 1,5$ раза больше, чем Малыш, то есть банка варенья разделилась между ними в отношении $3 : 2$ «в пользу» Карлсона. Следовательно, Карлсон съел $\frac{3}{5} = 0,6$ банки варенья.

Второй способ («алгебраический»). Пусть Малыш съел k ложек варенья по x г в каждой ложке. Тогда всего Малыш съел kx г варенья. Карлсону же досталось $0,6k$ ложек варенья по $2,5x$ г в каждой ложке, то есть $0,6k \cdot 2,5x = 1,5kx$ (г) варенья. Значит, всего в банке было $kx + 1,5kx = 2,5kx$ (г) варенья, из которого Карлсон съел $1,5kx$ г, или $\frac{3}{5}$ от банки варенья.

$+$ *приведены верный ответ и верное решение*

$\pm$ *приведено полное верное рассуждение, в котором есть арифметическая ошибка или верно найдено, во сколько раз Карлсон съел больше варенья, чем Малыш, но нет ответа на вопрос задачи*

$\mp$ *ход решения верен, но ошибочно посчитано, что ложка Карлсона вмещает в* $1,5$ *раза больше варенья, чем ложка Малыша и (или) что вместимость ложки Карлсона составляет* 40% *от ложки Малыша*

$\mp$ *верный ответ получен на основании конкретных числовых примеров*

$-$ *приведен ответ без обоснований или с неверными обоснованиями*

7.5. Коля утверждает, что можно выяснить, делится ли на 101 сумма всех четырехзначных чисел, в записи которых нет ни цифры 0, ни цифры 9, не вычисляя самой суммы. Прав ли Коля?

Ответ: Коля прав.

Рассмотрим любое четырехзначное число A, в записи которого нет ни цифры 0, ни цифры 9. Тогда число $B = 9999 - A$ также является четырехзначным числом того же вида. При этом числа A и B различны, так как 9999 — нечетное число.

Таким образом, все четырехзначные числа, обладающие указанным в условии свойством, можно разбить на пары так, что сумма чисел в каждой паре будет равна 9999. Тогда сумма всех таких чисел будет кратна $9999 = 99 \cdot 101$, значит, эта сумма делится на 101.

$+$ *приведено верное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное решение с недочетом: не указано, что числа, объединяемые в одну пару, не могут оказаться равными*

$\mp$ *есть верные фрагменты решения*

$-$ *приведен только ответ*

8 класс

8.1. На сколько нулей оканчивается число, равное значению выражения: $\underbrace{2010^{2010}+\ldots+2010^{2010}}_{2010 \text{ слагаемых}}$? Ответ обоснуйте.

Ответ: на 2011 нулей.

$\underbrace{2010^{2010}+2010^{2010}+\ldots+2010^{2010}}_{2010 \text{ слагаемых}} = 2010\cdot 2010^{2010} = 2010^{2011} = (201\cdot 10)^{2011} = 201^{2011}\cdot 10^{2011}$. Первый множитель оканчивается на 1, следовательно, данное число оканчивается на 2011 нулей.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

8.2. Алиса и Белый Кролик в полдень вместе вышли из домика Кролика и пошли на прием к Герцогине. Пройдя полпути, Кролик вспомнил, что забыл перчатки и веер, и побежал за ними домой со скоростью в два раза большей, чем он шел вместе с Алисой. Схватив перчатки и веер, он побежал к Герцогине (с той же скоростью, что бежал домой). В результате Алиса пришла к Герцогине вовремя, а Кролик опоздал на 10 минут. На какое время был назначен прием у Герцогини?

Ответ: прием был назначен на 12 часов 40 минут.

Первый способ. Поскольку Кролик бежал со скоростью вдвое большей, чем скорость Алисы, то в то время, когда Алиса пришла к Герцогине, Кролик вновь был на середине пути. Так как он опоздал на 10 минут, то Алиса затратила на половину пути 20 минут, а на весь путь — 40 минут.

Второй способ. Пусть время, за которое Алиса дошла от дома Кролика до дома Герцогини, равно t минут. Кролик прошел половину пути вместе с Алисой, на это у него ушло $\frac{t}{2}$ минут. Затем он пробежал расстояние равное $\frac{3}{2}$ расстояния от своего дома до дома Герцогини. Так как он бежал в два раза быстрее, то ему понадобилось в два раза меньше времени, то есть $\frac{3}{4}\cdot t$ минут. Итого, Кролик затратил на весь путь $\frac{5}{4}\cdot t$. Кролик опоздал на 10 минут, значит: $\frac{5}{4}\cdot t - t = 10$, $t = 40$ минут.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\pm$ *верно вычислено время, за которое Алиса или Кролик добрались до Герцогини, но не дан ответ на вопрос задачи*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

8.3. В параллелограмме $ABCD$ провели высоту DH к стороне AB. Точки E и F — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что $BF = EH$.

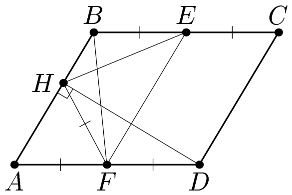


Рис. 8.3а

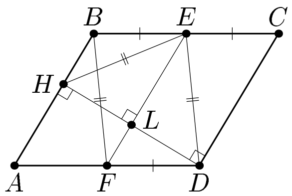


Рис. 8.3б

Первый способ. Из условия задачи следует, что $BE = AF$ и $BE||AF$, следовательно, $BEFA$ — параллелограмм и $AB||FE$ (см. рис. 8.3а). Таким образом, $HBEF$ — трапеция. Докажем, что она равнобокая. В прямоугольном треугольнике AHD отрезок HF является медианой, проведенной к гипотенузе, следовательно, $HF = \frac{AD}{2} = AF$ (это свойство медианы следует из свойства диагоналей прямоугольника). Таким образом, $HF = BE$, то есть трапеция $HBEF$ — равнобокая. В равнобокой трапеции диагонали равны, поэтому $BF = HE$.

Второй способ. Поскольку $BEDF$ — параллелограмм, то достаточно доказать, что $HE = DE$. То есть, что в прямоугольной трапеции $DHBC$ (см. рис. 8.3б) середина E боковой стороны BC равноудалена от вершин D и H. Это можно сделать различными способами. Например, так: проведем среднюю линию EL, поскольку $EL||BH$, то $EL \perp HD$, следовательно, EL — серединный перпендикуляр к отрезку HD, откуда $HE = ED$.

На самом деле отрезок FE содержит среднюю линию трапеции $DHBC$. Поэтому можно было рассуждать иначе. Поскольку $AB||FE$ и $DH \perp AB$, то $DH \perp FE$. Кроме того, $AF = FD$, следовательно, по теореме Фалеса FE делит HD пополам, то есть, является серединным перпендикуляром. Тогда $HE = DE$ и $DE = FB$, следовательно, $HE = BF$.

$+$ *приведено верное решение*

8.4. Найдите все числа, десятичная запись которых оканчивается на два нуля, и имеющие ровно 12 делителей. Ответ обоснуйте.

Ответ: 200 и 500.

Так как запись числа оканчивается на два нуля, оно делится на 100, то есть имеет вид $n\cdot 100 = n\cdot 2^2\cdot 5^2$.

Докажем, что если у числа ровно 12 делителей, то n может быть равно только 2 или 5. Наименьшее из чисел такого вида — число 100 (случай $n = 1$) имеет 9 делителей. Их можно найти непосредственно, но можно и так: все делители числа 100 имеют вид $2^k\cdot 5^m$, где k и m могут быть равны 0, 1 или 2. Следовательно, число делителей: $3\cdot 3 = 9$.

Если n не делится ни на 2 ни на 5, то у числа $n\cdot 100$ будет как минимум 18 делителей: 9 делителей числа 100: 1, 2, 5, 10, 20… и 9 делителей вида n, $2n$, $5n$, $10n$, $20n$ … .

Если $n = 2$ или $n = 5$, то делителей будет ровно 12. Если n имеет в виде множителя не первую степень 2 или 5, то очевидно, что делителей больше 12. Таким образом, указанными свойствами обладают только два числа: 200 и 500.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$-$ *верно найдено лишь одно из чисел*

8.5. В треугольнике ABC отметили произвольную точку D на медиане BM. Затем через D провели прямую, параллельную AB, а через C — прямую, параллельную BM. Эти прямые пересеклись в точке E. Докажите, что $BE = AD$.

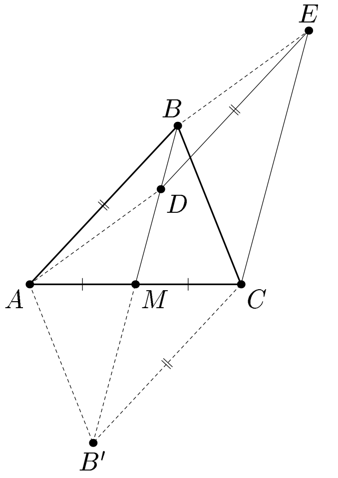


Рис. 8.5а

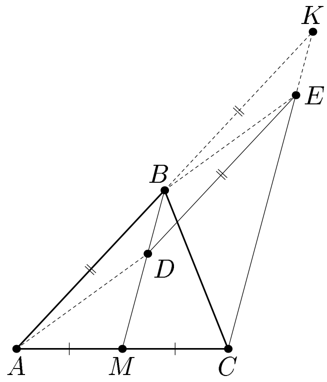


Рис. 8.5б

Докажем, что $ABED$ — параллелограмм, из чего будет следовать требуемое утверждение. Это можно сделать несколькими способами.

Первый способ. Продлим медиану BM на ее длину ($BM = B'M$, см. рис. 8.5а), тогда $ABCB'$ — параллелограмм (по признаку). Так как по условию $EC||BM$ и $DE||AB||B'C$, то $DECB'$ — параллелограмм. Следовательно, $DE||B'C$ и $DE = B'C$. Тогда $DE||AB$ и $DE = AB$, следовательно, $ABED$ — параллелограмм.

Второй способ. Продлим AB и CE до пересечения в точке K (см. рис. 8.5б). Поскольку $CE||BM$ и $DE||AB$, то $BKED$ — параллелограмм. Следовательно, $BK = DE$ и $BK||DE$. Так как $BM||CK$ и M — середина AC, то BM — средняя линия треугольника AKC. Таким образом, $AB = BK$. Получили, что $AB = DE$ и $AB||DE$, следовательно, $ABED$ — параллелограмм.

$+$ *приведено верное решение*

$\mp$ *задача не решена, но верно указано одно из возможных дополнительных построений, приводящих к решению*

8.6. На бесконечной шашечной доске на двух соседних по диагонали клетках стоят две черные шашки. Можно ли добавить на доску несколько черных шашек и одну белую шашку так, чтобы белая шашка одним ходом съела все черные шашки (включая и две стоявшие изначально)?

Ответ: нет, нельзя.

Первый способ. Занумеруем горизонтали доски целыми числами так, как показано на рисунке. Заметим, что когда белая шашка съедает любую черную, то четность горизонтали, на которой она стоит, не меняется. Следовательно, если изначально белая шашка стояла на четной горизонтали, то она всегда будет оказываться только на четных горизонталях, а если на нечетной — на нечетных. При этом белая шашка может съесть лишь те черные, которые стоят на горизонталях другой четности, чем те, по которым она ходит. Однако, из двух изначально стоящих на доске черных шашек одна стоит на четной горизонтали, а другая — на нечетной. Следовательно, одну из этих двух шашек белая съесть не сможет.

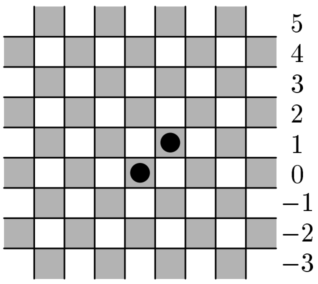


Рис. 8.6а

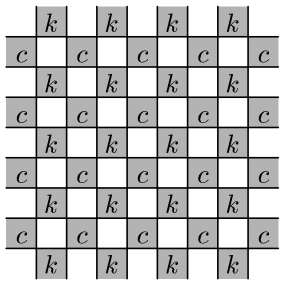


Рис. 8.6б

Второй способ. Перекрасим черные клетки доски в красный и синий цвета через одну (см. рис. 8.6б). Белая шашка, стоящая на синей клетке, может есть лишь те черные шашки, которые стоят на красных клетках. И наоборот, белая шашка, стоящая на красной клетке, может есть лишь те черные шашки, которые стоят на синих клетках. Однако из двух изначально поставленных шашек одна стоит на синей, а другая — на красной. Следовательно, одну из этих двух шашек белая съесть не сможет.

$+$ *приведено верное решение*

$\mp$ *формулируется, но никак не обосновывается утверждение «белая шашка не может оказаться на соседней диагонали с той, на которой она стояла»*

$-$ *приведен только верный ответ*

9 класс

9.1. Найдите наименьшее целое решение неравенства $x > \frac{23}{x}$.

Ответ: -4.

Первый способ. Приведем неравенство к виду: $\frac{x^2-23}{x} > 0$ и решим его методом интервалов (или переходя к равносильной совокупности систем неравенств). Получим: $-\sqrt{23} < x < 0$ или $x > \sqrt{23}$. Следовательно, наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству, равно -4.

Второй способ. Пусть $x < 0$, тогда $x^2 < 23$. Наименьшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству, равно -4. Так как случай $x > 0$ может привести только к положительным решениям данного неравенства, то его можно не рассматривать.

Третий способ. Подбором установим, что $x = -4$ является решением данного неравенства. Заметим, что если $x \leqslant -5$, то $x^2 \geqslant 25$, то есть никакое меньшее целое число решением данного неравенства не является.

$+$ *приведен верный обоснованный ответ*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

9.2. Какое наименьшее количество множителей надо вычеркнуть из произведения $10!$, чтобы полученное произведение оканчивалось на цифру 2? (Напомним, что $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10$.)

Ответ: три множителя.

1) Заметим, что обязательно должны быть вычеркнуты все множители, которые делятся на 5, иначе произведение оставшихся чисел будет оканчиваться на 0 или на 5. Таким образом, должны быть вычеркнуты множители 5 и 10.

Рассмотрим произведение оставшихся чисел: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$. Числа $2 \cdot 3$, $4 \cdot 9$ и $7 \cdot 8$ оканчиваются на 6, значит, это произведение оканчивается на ту же цифру, что и $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$, то есть на цифру 6. Поэтому, необходимо вычеркнуть ещё хотя бы один множитель.

Таким образом, меньше чем три множителя, вычеркнуть нельзя.

3) Вычеркнуть три множителя достаточно, например, вычеркивая числа: 5, 10 и 3, получим произведение $2 \cdot (4 \cdot 9) \cdot (7 \cdot 8) \cdot 6$, которое оканчивается на ту же цифру, что и число $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$, то есть на цифру 2.

Отметим, что в приведенном примере можно непосредственно вычислить произведение оставшихся чисел и получить, что оно оканчивается на цифру 2. *Возможен еще один пример: вычеркнуть множители* 5, 10 *и* 8.

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснование*

$\pm$ *приведен верный ответ, обоснована необходимость вычеркивания* 5 *и* 10, *но не обоснована необходимость вычеркивания еще одного числа*

$\mp$ *верно указаны три множителя, которые надо вычеркнуть, но не обосновано, что это количество наименьшее*

$\mp$ *доказано, что недостаточно вычеркнуть два множителя, но пример не приведен*

9.3. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе. На катете AC отмечена точка F, а на отрезке AD — точка E так, что $CD = DE$ и $FE \perp AB$. Найдите угол CBF.

Ответ: $\angle CBF = 45^\circ$.

В четырёхугольнике $BCFE$ $\angle BCF = \angle BEF = 90^\circ$ (см. рис. 9.3), следовательно, около него можно описать окружность. Тогда $\angle CBF = \angle CEF$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). В равнобедренном прямоугольном треугольнике CDE $\angle DEC = 45^\circ$, следовательно, $\angle CEF = 90^\circ - \angle DEC = 45^\circ = \angle CBF$.

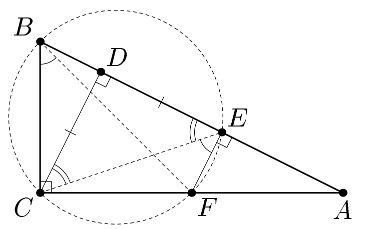


Рис. 9.3

$+$ *приведены верный ответ и верное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верные рассуждения, содержащие мелкие погрешности*

$\mp$ *присутствует идея построения вспомогательной окружности, но решение не доведено до конца*

$-$ *приведен верный ответ, но решение отсутствует или ошибочно*

9.4. На острове рыцарей и лжецов каждого жителя спросили про каждого из остальных, лжец тот или рыцарь. Всего было получено 26 ответов «рыцарь» и 30 ответов «лжец». Сколько рыцарей могло быть на этом острове? (Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду.)

Ответ: 3 или 5.

1) Пусть на острове x жителей, каждый из них дал $x - 1$ ответ, поэтому, $x(x-1) = 26 + 30$, то есть $x = 8$.

2) Пусть на острове y рыцарей, тогда лжецов — $(8 - y)$. Ответ: «рыцарь» каждый из рыцарей дал $y - 1$ раз, а каждый из лжецов — $(7 - y)$ раз. Тогда $y(y-1) + (8-y)(7-y) = 26 \Leftrightarrow y^2 - 8y + 15 = 0 \Leftrightarrow y = 3$ или $y = 5$. Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается 30 ответов «лжец»).

Возможно также решение методом полного перебора. Для того, чтобы существенно упростить перебор, можно заметить, что число 30 *должно делиться как на удвоенное количество рыцарей, так и на удвоенное количество лжецов. Действительно, если рыцарей —* y, *а лжецов —* z, *то* $yz + zy = 30$, *то есть* $2yz = 30$.

$+$ *приведены верный ответ и верное решение*

$\mp$ *в ходе решения упущен один из случаев и получен только один из возможных ответов*

$\mp$ *приведен верный ответ без обоснований*

9.5. На гранях каждого из восьми кубиков нарисованы точки: по одной на двух противоположных гранях, по две точки на ещё двух противоположных гранях, и по три — на двух оставшихся гранях. Из этих восьми кубиков Петя сложил куб и записал количество точек на каждой его грани. Мог ли он получить шесть последовательных натуральных чисел?

Ответ: нет, не мог.

Первый способ. Заметим, что противоположные грани кубиков разбиваются на пары: одна грань — внутри большого куба, а другая — снаружи. То есть ровно половина точек находится внутри куба, а другая половина — снаружи. Так как всего проставлено $8 \cdot 2 \cdot (1 + 2 + 3) = 96$ точек, то снаружи оказалось 48 точек. Однако число 48 не представляется в виде суммы шести последовательных натуральных чисел. Обосновать это проще всего так: сумма шести последовательных натуральных чисел нечетна, так как она содержит ровно три нечетных слагаемых и три четных. Из полученного противоречия следует ответ.

Второй способ. Предположим, что такое возможно и наименьшее количество точек на грани большого куба равно n, тогда общее количество точек на гранях большого куба будет равно $6n+15$. Заметим, что противоположные грани кубиков разбиваются на пары: одна грань — внутри большого куба, другая — снаружи. Поэтому, общее количество точек на гранях большого куба равно количеству точек внутри него, то есть на гранях маленьких кубиков расположено $12n+30$ точек. Так как на каждом маленьком кубике нарисовано 12 точек, а кубиков восемь, то получаем уравнение $12n+30 = 96$, которое не имеет натуральных решений ($n = 5,5$). Из полученного противоречия следует ответ.

$+$ *приведены верный ответ и верное решение*

$\pm$ *приведено верное решение с незначительными пробелами в обоснованиях*

$-$ *приведен только ответ*

9.6. Треугольник ABC вписан в окружность. Биссектриса угла A пересекает описанную окружность в точке D. O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, K — середина отрезка BO, M — точка пересечения прямых DK и AB. Докажите, что MO и BC параллельны.

1) Докажем, что $OD = BD$ (*равенство* $DO = DB = DC$, *где* D *— точка пересечения биссектрисы угла* A *с окружностью, описанной около треугольника* ABC, *иногда называют «теоремой трилистника», но в школьную программу эта теорема не входит*!). Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, тогда $\angle BOD = \alpha + \beta$ (внешний угол треугольника AOB). $\angle CBD = \angle CAD = \alpha$, следовательно, $\angle OBD = \alpha+\beta$. Таким образом, треугольник BDO — равнобедренный: $OD = BD$.

2) DK — медиана равнобедренного треугольника BDO с основанием BO, значит, DK — его высота, то есть $DM \perp BO$. Тогда в треугольнике BMO медиана MK также является высотой, значит, этот треугольник равнобедренный, поэтому $\angle MOB = \angle MBO = \beta$.

3) Так как $\angle MOB = \beta = \angle OBC$, то $MO || BC$ (признак параллельности прямых), что и требовалось.

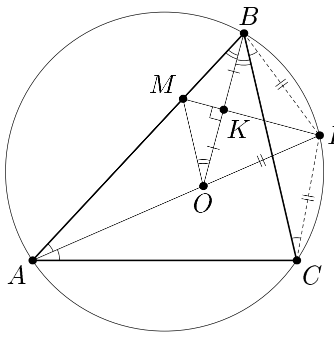


Рис. 9.6

$+$ *приведено верное полностью обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное решение с незначительными пробелами в обоснованиях*

$\mp$ *приведено верное рассуждение, в котором на равенство* $BD = OD$ *использовано, но не обосновано*

10 класс

10.1. К каждой грани деревянного куба приклеили по такому же кубу. Объясните, как разделить получившееся тело на шесть равных частей.

Ответ: Каждая часть будет состоять из одного из приклеенных кубов и правильной четырёхугольной пирамиды с вершиной в центре исходного куба. На рисунке 10.1 изображен исходный куб и куб, приклеенный к его верхней грани, а серым цветом закрашена одна из равных частей.

Существуют и другие решения, но приведенное — наиболее простое.

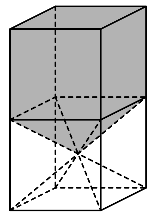


Рис. 10.1

$+$ *приведен верный понятный чертеж или дано его внятное словесное описание*

$\pm$ *приведен верный, в целом, чертеж с некоторыми недочетами*

$-$ *приведен неверный способ решения*

10.2. Представьте выражение $(x^2+1)(x^2+4)$ в виде суммы квадратов двух многочленов с целыми коэффициентами.

Ответ: $(x^2+2)^2+x^2$ либо $(x^2-2)^2+(3x)^2$.

1) $(x^2+1)(x^2+4)=x^4+4x^2+x^2+4=(x^4+4x^2+4)+x^2=(x^2+2)^2+x^2$;

2) $(x^2+1)(x^2+4)=x^4+4x^2+x^2+4=(x^4-4x^2+4)+9x^2=(x^2-2)^2+(3x)^2$.

$+$ *приведен верный ответ*

$-$ *приведен неверный ответ*

10.3. График функции $y=x^2+ax+b$ пересекает ось абсцисс в точках A и C, а ось ординат в точке B. Известно, что $A(1;0)$. Найдите $\angle CBO$, где O — начало координат.

Ответ: $45°$.

Графиком данной функции является парабола, «ветви» которой направлены вверх. При этом точка B может быть как ниже оси Ox, так выше (см. рис. 10.3а, б). Пусть x_1 и x_2 — абсциссы точек пересечения графика с осью x и $x_1=1$. Тогда по теореме Виета $x_2=b$. Кроме того, $y(0)=b$, следовательно, прямоугольный треугольник CBO — равнобедренный. Таким образом, $\angle CBO=45°$.

Заметим, что приведенное решение не зависит ни от знака b, ни от того, какая из точек A или C расположена левее.

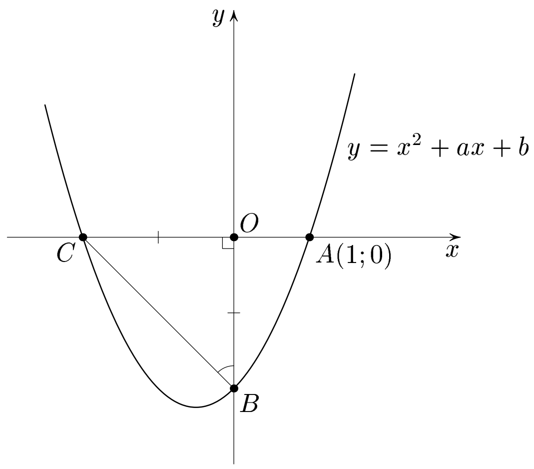


Рис. 10.3а

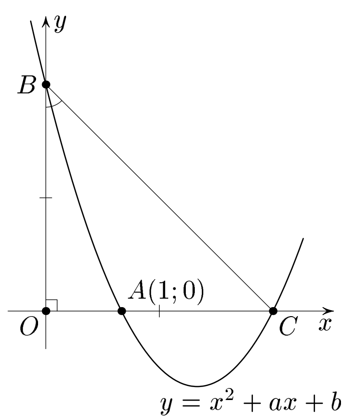


Рис. 10.3б

$+$ *приведены верный ответ и полные обоснования*

$\pm$ *приведены верный ответ и верные рассуждения для конкретного случая расположения параболы, опирающиеся на рисунок*

$\mp$ *приведены верный ответ и обоснования, содержащие существенные пробелы*

$\mp$ *верный ответ получен путем рассмотрения графиков конкретных функций*

$\mp$ *приведен только чертеж и верный ответ, либо только верный ответ*

$-$ *приведен неверный ответ*

10.4. Некоторые клетки доски 8×8 покрашены в белый цвет, а остальные — в чёрный. Коля перекрашивает доску: за один ход он имеет право перекрасить в противоположный цвет «уголок» из трёх клеток. Докажите, что за несколько перекрашиваний Коля сможет сделать всю доску чёрной.

Заметим, что Коле достаточно «научиться» перекрашивать одну белую клетку, не меняя цвета остальных. Тогда повторив эту операцию несколько раз (в соответствии с количеством белых клеток), он сможет перекрасить в черный цвет всю доску.

Например, Коля может выбрать какой-либо квадрат 2×2, содержащий белую клетку, и по очереди перекрасить каждый из четырех «уголков», входящие в этот квадрат. При этом каждая клетка поменяет свой цвет трижды, то есть все клетки этого квадрата в результате таких операций поменяют свой цвет. Затем, достаточно рассмотреть еще раз «уголок», не содержащий выбранную белую клетку, и перекрасить его клетки в исходный цвет.

Существуют и другие способы перекрашивания. Для того, чтобы отличить верный способ от неверного, достаточно убедиться, что выбранная клетка перекрашена нечетное число раз, а остальные — четное (возможно, ноль).

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *решения нет, но присутствует верная идея (например, что достаточно «научиться» перекрашивать одну клетку, не меняя цвета остальных)*

$-$ *разобраны какие-то частные случаи (например, шахматной раскраски)*

10.5. Из точки T провели к окружности касательную TA и секущую, пересекающую окружность в точках B и C. Биссектриса угла ATC пересекает хорды AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PA = \sqrt{PB \cdot QC}$.

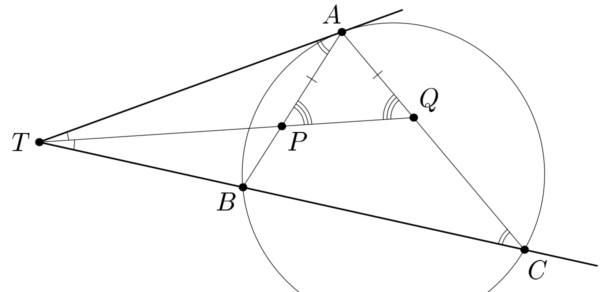


Рис. 10.5

Заметим сначала, что $AP = AQ$ (см. рис. 10.5). Действительно, из условия следует, что $\angle PTA = \angle QTC$ и $\angle TAP = \angle TCQ$ (*угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу*). Но $\angle APQ = \angle PTA + \angle TAP$ (*внешний угол треугольника TPA*), $\angle AQP = \angle QTC + \angle TCQ$ (*внешний угол треугольника TQC*). Следовательно, $\angle APQ = \angle AQP$, то есть треугольник APQ — равнобедренный: $AP = AQ$.

По *основному свойству биссектрисы*, примененному к треугольникам TAB и TAC, получим: $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{TA}{TB}$ и $\dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{TA}{TC}$. Перемножив почленно эти равенства, получим, что $\dfrac{AP \cdot AQ}{PB \cdot QC} = \dfrac{TA^2}{TB \cdot TC}$. Используя теорему *о касательной и секущей:* $TA^2 = TB \cdot TC$ и учитывая, что $AP = AQ$, получим, что $\dfrac{AP^2}{PB \cdot QC} = 1$, значит, $AP = \sqrt{PB \cdot QC}$.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены все основные этапы доказательства, но текст содержит некоторые пробелы или неточности*

$\mp$ *доказано только, что $AP = AQ$*

$\mp$ *принято без доказательства, что $AP = AQ$ и дальнейшее рассуждение приведено верно*

10.6. Найдите все такие пары чисел (p, q), что каждое из уравнений $x^2 - px + q = 0$ и $x^2 - qx + p = 0$ имеет два различных натуральных корня.

Ответ: $p = 5$, $q = 6$ или $p = 6$, $q = 5$.

Пусть x_1 и x_2 — корни первого уравнения, а y_1 и y_2 — корни второго уравнения. Далее воспользуемся теоремой Виета. Из первого уравнения: $\begin{cases} x_1 + x_2 = p, \\ x_1x_2 = q. \end{cases}$ Из второго уравнения: $\begin{cases} y_1 + y_2 = q, \\ y_1y_2 = p. \end{cases}$. Следовательно, $\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1y_2, \\ y_1 + y_2 = x_1x_2. \end{cases}$.

Дальше можно рассуждать различными способами.

Первый способ. Складывая эти равенства почленно, получим следствие: $x_1x_2 - x_1 - x_2 + y_1y_2 - y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x_1x_2 - x_1 - x_2) + (y_1y_2 - y_1 - y_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1) + (y_1y_2 - y_1 - y_2 + 1) = 2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1) = 2$.

Так как числа x_1, x_2 и y_1, y_2 натуральные, то в левой части полученного равенства записана сумма двух целых неотрицательных чисел. Это означает, что либо каждое слагаемое в этой части равенства равно 1, либо одно из них равно 2, а другое равно 0.

В первом случае каждая из записанных скобок равна 1, то есть $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 2$, что не соответствует условию задачи. Во втором случае рассмотрим слагаемое, равное двум. Если это первое слагаемое, то $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ (или наоборот). Тогда $\begin{cases} y_1 + y_2 = 6, \\ y_1y_2 = 5 \end{cases}$, то есть $y_1 = 5$, $y_2 = 1$ (или наоборот). Найденным значениям x и y соответствуют значения $p = 5$; $q = 6$ или $p = 6$; $q = 5$.

Отметим, что при указанном способе рассуждений проверка того, что найденные значения p и q удовлетворяют условиям задачи, допустима, но не обязательна.

Второй способ. Пусть, без ограничения общности, $q < p$. Тогда $x_1x_2 < x_1 + x_2$. Если сумма двух натуральных чисел больше, чем их произведение, то одно из этих чисел равно 1. Это можно доказать, например, так. Пусть $2 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, тогда $2x_2 \leqslant x_1x_2 < x_1 + x_2 \leqslant 2x_2$, противоречие.

Следовательно, можно считать, что $x_1 = 1$. Тогда $1 + x_2 = p$, $x_2 = q$, откуда $p = 1 + q$. Подставим это равенство во второе уравнение из условия: $x^2 - qx + (1 + q) = 0$. Для того, чтобы это уравнение имело натуральные корни, необходимо, чтобы его дискриминант $q^2 - 4(1 + q) = (q - 2)^2 - 8$ был полным квадратом. Существует единственное натуральное число, квадрат которого при уменьшении на 8 остается полным квадратом, это число 3. Докажем это. Решим уравнение $a^2 - b^2 = 8$ в натуральных числах. $a^2 - b^2 = 8 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 8$. Для того, чтобы система $\begin{cases} a - b = n, \\ a + b = m \end{cases}$ имела решение в натуральных числах, необходимо, чтобы числа n и m имели одинаковую четность.

Таким образом, возможны два случая: $\begin{cases} a - b = 2, \\ a + b = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} a - b = 4, \\ a + b = 2 \end{cases}$. В первом случае, $a = 3$, $b = 1$, во втором $a = 3$, $b = -1$ и он нам не подходит. Следовательно, $(q - 2)^2 = 9$, откуда $q = 5$, $p = 6$. (Если бы мы положили $x_2 = 1$, то получили бы второй ответ: $q = 6$, $p = 5$).

Предположим теперь, что $p = q$. Тогда уравнение из условия имеет вид $x^2 - px + p$. Для того, чтобы оно имело целые корни, необходимо, чтобы его дискриминант $p^2 - 4p = p^2 - 4p + 4 - 4 = (p - 2)^2 - 4$ был квадратом целого числа. Решая систему, аналогичную рассмотренной выше, получим, что в этом случае $(p - 2)^2 = 4$, то есть, дискриминант уравнения равен 0, а следовательно, корни уравнения совпадают.

Осталось убедиться, что найденные значения p и q удовлетворяют условию, это можно сделать подстановкой.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное решение, но в ответе указана только одна пара значений* $(p; q)$ *(вместо двух симметричных) либо не отброшен случай* $p = q = 4$

$\mp$ *приведен только верный ответ, либо верный ответ и проверка, что он удовлетворяет условию*

11 класс

11.1. Найдите значение выражения $(2-2\sin 2010^\circ)^{(1+\sin 2010^\circ)}-\operatorname{ctg} 2010^\circ$.

Ответ: 0.

$\sin 2010^\circ=\sin(5\cdot 360^\circ+180^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-0,5$; $\operatorname{ctg} 2010^\circ=\operatorname{ctg}(11\cdot 180^\circ+30^\circ)=\operatorname{ctg} 30^\circ=\sqrt{3}$. Следовательно, $(2-2\sin 2010^\circ)^{(1+\sin 2010^\circ)}-\operatorname{ctg} 2010^\circ=(2+1)^{(1-0,5)}-\sqrt{3}=3^{0,5}-\sqrt{3}=0$.

$+$ *приведены верный ответ и разумно подробные вычисления*

$\mp$ *верный ход решения, но допущено не более одной вычислительной ошибки*

11.2. Грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ — прямоугольные треугольники с общей гипотенузой AB. M и N — точки пересечения медиан граней ABC и ABD соответственно. Докажите, что отрезки CN и DM равны.

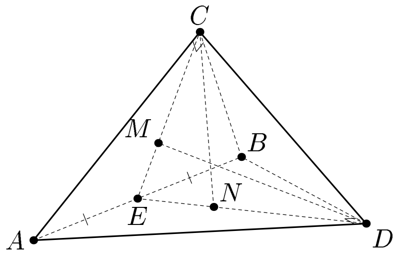


Рис. 11.2

В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Следовательно, $CE=0,5AB=DE$, то есть треугольник CED — равнобедренный (см. рис. 11.2). Поскольку M и N — точки пересечения медиан граней ABC и ABD, то $EM:MC=EN:ND=1:2$, значит, $EM=EN$. Тогда треугольники CEN и DEM равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $DM=CN$, что и требовалось доказать.

$+$ *полное обоснованное решение*

11.3. Натуральное число a имеет ровно четыре различных натуральных делителя (включая 1 и a). Натуральное число b имеет ровно шесть различных натуральных делителей (включая 1 и b). Может ли число $c=ab$ иметь ровно 15 различных натуральных делителей (включая 1 и c)?

Ответ: да, может.

Например, $a=8$, $b=50$, $c=400=8\cdot 50$. Действительно, число 400 имеет 15 делителей: 1; 400; 2; 200; 4; 100; 5; 80; 8; 50; 10; 40; 16; 25; 20. При этом число 8 имеет 4 делителя: 1; 8; 2; 4, а число 50 имеет шесть делителей: 1; 50; 2; 25; 5; 10.

Существует и много других примеров, которые также можно найти непосредственным перебором. Более «фундаментальный» подход основан на следующем утверждении: если натуральное число $N=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{k_m}$, *где все* p_i *— простые числа, а все* k_i *— натуральные числа или ноль, то количество делителей числа* N *равно* $(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_m+1)$. *Действительно, каждый делитель числа* N *является произведением одних и тех же простых множителей, причем показатель степени множителя* p_i *может быть любым целым числом от* 0 *до* k_i *и значения этих показателей не зависят друг от друга.*

Таким образом, если натуральное число a *имеет ровно* 4 *различных натуральных делителя, то оно имеет вид* $p\cdot q$ *или* r^3, *где* p, q *и* r *— простые числа и* $p\neq q$. *Если натуральное число* b *имеет ровно* 6 *различных натуральных делителей, то оно имеет вид* $m\cdot n^2$ *или* t^5, *где* m, n *и* t *— простые числа и* $m\neq n$. *Таким образом, если* $a=r^3$ *и* $b=r\cdot n^2$, *где* $r\neq n$, *то число* $c=a\cdot b=r^4\cdot n^2$ *имеет ровно* 15 *натуральных делителей. В приведенном примере:* $a=2^3$, $b=2\cdot 5^2$, $c=2^4\cdot 5^2$.

Еще два примера: 1) $a=2^3=8$, $b=2\cdot 3^2=18$, $c=144=2^4\cdot 3^2$; 2) $a=3^3=27$, $b=3\cdot 2^2=12$, $c=324=3^4\cdot 2^2$.

$+$ *приведены верный ответ и верный пример (с предъявлением делителей чисел* a, b *и* c *в явном виде или с указанием способа подсчета их количества).*

$\pm$ *приведены только верный ответ и верный пример, но делители чисел* a, b *и* c *не выписаны и не указано, как подсчитать их количество*

$\mp$ *ответ не получен, но в решении присутствует разумное обоснование подсчета количества делителей числа*

11.4. Докажите, что для всех x выполняется неравенство: $x^2+x\sin x+x^2\cos x+0,5>0$.

Запишем данное неравенство в виде $(1+\cos x)x^2+\sin x\cdot x+0,5>0$. Рассмотрим функцию $f(x)=(1+\cos x)x^2+\sin x\cdot x+0,5$ и докажем, что она принимает только положительные значения при всех значениях x.

Первый способ. Если $\cos x=-1$, то $\sin x=0$, тогда $f(x)=0,5>0$. Если $\cos x\neq -1$, то функцию $f(x)$ можно рассматривать как квадратный трехчлен с положительным первым коэффициентом. Его дискриминант $D=\sin^2 x-2(1+ +\cos x)=1-\cos^2 x-2-2\cos x=-(\cos x+1)^2<0$. Следовательно, $f(x)>0$ при всех значениях x.

Второй способ. $f(x)=x^2(1+\cos x)+\sin x\cdot x+0,5=2x^2\cos^2\dfrac{x}{2}+2x\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}+0,5\sin^2\dfrac{x}{2}+0,5-0,5\sin^2\dfrac{x}{2}=2(x\cos\dfrac{x}{2}+ +0,5\sin\dfrac{x}{2})^2+0,5\cos^2\dfrac{x}{2}$.

Если $\cos\dfrac{x}{2}=0$, то $\sin\dfrac{x}{2}=\pm 1$, тогда $f(x)=0,5>0$. Если $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0$, то $f(x)>0$, так как второе слагаемое положительно.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *верный ход рассуждений, но не разобран случай* $\cos x=-1$ *(первый способ) или случай* $\cos\dfrac{x}{2}=0$ *(второй способ)*

$\mp$ *верный ход рассуждений, но допущены ошибки в преобразованиях или вычислениях*

11.5. В треугольнике ABC угол при вершине B вдвое больше угла при вершине C. Окружность с центром в точке A и радиусом AB пересекает серединный перпендикуляр к отрезку BC в точке P (внутри треугольника). Докажите, что угол PAC в три раза меньше угла BAC.

Первый способ. От луча CA отложим угол ACD, равный углу ACB (D — точка пересечения стороны угла и серединного перпендикуляра к стороне BC, см. рис. 11.5а). Получим равнобедренный треугольник DBC, в котором проведем биссектрису BE. Тогда $ABCE$ — равнобокая трапеция, в которой диагональ является биссектрисой угла при основании, значит, треугольник ABE — равнобедренный ($AB=AE$). Следовательно, точка E лежит на окружности с центром A и радиусом AB. Так как точки A и E симметричны относительно прямой PD, то равны углы CAP и BEP. Но угол BEP — вписан в окружность и опирается на ту же дугу, что и центральный угол BAP. Следовательно, $\angle BAP=2\angle BEP=2\angle PAC$, поэтому, $\angle PAC=\dfrac{1}{2}\angle BAP=\dfrac{1}{3}\angle BAC$, что и требовалось доказать.

Второй способ. Пусть в треугольнике ABC: N — середина BC, $AB = c$, $\angle C = \gamma$, тогда $\angle B = 2\gamma$, $\angle A = \pi - 3\gamma$ (см. рис. 11.5б). По теореме синусов $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{BC}{\sin(\pi - 3\gamma)}$. Следовательно, $BN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{c\sin 3\gamma}{2\sin\gamma}$ (1).

Пусть $\angle PAC = \varphi$. Тогда $\angle PAB = \angle A - \varphi = \pi - (3\gamma + \varphi)$. В равнобедренном треугольнике ABP: $\angle ABP = \dfrac{3\gamma + \varphi}{2}$; $BP = 2c\cos\angle ABP = 2c\cos\dfrac{3\gamma+\varphi}{2}$ (2).

Из прямоугольного треугольника BPN: $BN = BP\cos\angle PBN$ (3). Подставляя в равенство (3) BN из равенства (1) и BP из равенства (2), и учитывая, что $\angle PBN = 2\gamma - \dfrac{3\gamma+\varphi}{2} = \dfrac{\gamma - \varphi}{2}$, получим: $\dfrac{c\sin 3\gamma}{2\sin\gamma} = 2c\cos\dfrac{3\gamma+\varphi}{2}\cos\dfrac{\gamma-\varphi}{2}$. Используя в левой части формулу синуса тройного угла, а в правой части — формулу произведения косинусов, приходим к равенству: $3 - 4\sin^2\gamma = 2(\cos(\gamma+\varphi) + \cos 2\gamma)$. Заменяя $cos2\gamma$, получим: $3 - 4\sin^2\gamma = 2\cos(\gamma+\varphi) + 2 - 4\sin^2\gamma \Leftrightarrow \cos(\gamma+\varphi) = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\gamma + \varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Тогда $\varphi = \dfrac{\pi - 3\gamma}{3} = \dfrac{1}{3}\angle A$, что и требовалось.

+ *полное обоснованное решение*

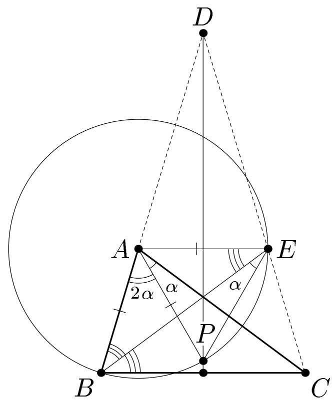


Рис. 11.5а

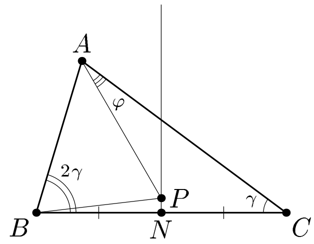


Рис. 11.5б

11.6. На некоторых клетках шахматной доски стоит по фишке. Ходом фишки называется перестановка ее через фишку, стоящую на соседней (по горизонтали, вертикали или диагонали) клетке, непосредственно за которой на той же линии имеется свободная клетка. Какое наибольшее количество фишек может насчитывать такое их расположение на доске, в котором любая фишка сможет сделать первый ход?

Ответ: 48.

Докажем, что больше сорока восьми фишек поставить нельзя. Для этого раскрасим все клетки углового квадрата 2×2 в четыре цвета (обозначим цвета цифрами от 1 до 4) и замостим копиями этого квадрата всю доску (см. рис. 11.6а). Тогда вся доска является объединением четырех непересекающихся множеств, в каждом из которых 16 клеток.

1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4

Рис. 11.6а

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Рис. 11.6б

Любая фишка может «ходить» только по клеткам своего цвета. Рассмотрим, например, все клетки первого цвета. Их удобно представить в виде квадрата 4×4 (см. рис. 11.6б). Рассмотрим возможности хода на этой доске.

По правилам фишка сможет сделать ход, если есть свободная соседняя клетка (на новой доске 4×4!). Докажем, что больше двенадцати фишек на клетки одного цвета поставить нельзя. Действительно, пусть на эту доску поместили более двенадцати фишек. Разобьем всю доску на четыре квадрата 2×2. Тогда, хотя бы в один из них попадут четыре фишки. В этом случае угловая фишка наверняка не сможет сделать ход. Следовательно, на клетках одного цвета стоит не более 12 фишек. Значит, на клетки четырех цветов можно поставить не более сорока восьми фишек.

На рис. 11.6в–е приведены некоторые из возможных примеров расположения сорока восьми фишек, удовлетворяющих условию.

	●	●			●	●	
●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●
	●	●			●	●	
	●	●			●	●	
●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●
	●	●			●	●	

Рис. 11.6в

		●	●		●	●	
●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●
	●	●			●	●	
	●	●			●	●	
●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●
	●	●		●	●		

Рис. 11.6г

	●	●			●	●	
●	●	●	●	●	●	●	
●	●	●	●	●	●	●	●
	●	●			●	●	●
●	●	●			●	●	
●	●	●	●	●	●	●	●
	●	●	●	●	●	●	●
	●	●			●	●	

Рис. 11.6д

	●	●		●	●		
●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●
	●	●			●	●	
●	●	●		●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●
	●	●	●		●	●	
		●	●		●	●	

Рис. 11.6е

Отметим, что вместо раскраски доски в четыре цвета можно занумеровать горизонтали и вертикали доски числами от 1 до 8 и построить рассуждение, аналогичное приведенному и основанное на том, что любой ход фишки «сохраняет» четность горизонтали и четность вертикали.

+ *приведены верный ответ и верное решение (содержащее как оценку, так и пример)*

∓ *приведены только верный ответ и пример*

∓ *приведены только верный ответ и верная оценка*

− *приведен только ответ*