

ЛХХV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

18 марта 2012 года • 9 класс

Задача 1. В стране Далёкой провинция называется *крупной*, если в ней живёт более 7% жителей этой страны. Известно, что для каждой крупной провинции найдутся две провинции с меньшим населением такие, что их суммарное население больше, чем у этой крупной провинции. Какое наименьшее число провинций может быть в стране Далёкой?

Задача 2. В ряд лежит $2n$ груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно разложить все груши по n пакетам по две груши в каждый и выложить эти пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов также отличались не более, чем на 1 г.

Задача 3. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD . На отрезке BH отметили точку M , равноудалённую от точек C и D . Пусть точка K — середина стороны AB . Докажите, что угол MKD прямой.

Задача 4. Рациональные числа x , y и z таковы, что все числа $x + y^2 + z^2$, $x^2 + y + z^2$ и $x^2 + y^2 + z$ целые. Верно ли, что число $2x$ целое?

Задача 5. Дан треугольник ABC . Прямая l касается вписанной в него окружности. Обозначим через l_a , l_b , l_c прямые, симметричные l относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC .

Задача 6. а) В футбольном турнире участвовало 75 команд. Каждая команда играла с каждой один раз, за победу в матче команда получала 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. Известно, что любые две команды набрали различное количество очков. Найдите наименьшую возможную разность очков у команд, занявших первое и последнее места.

б) Тот же вопрос для n команд.

Десятая устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 8 апреля 2012 года.

Подробная информация на сайте <http://olympiads.mcsme.ru/ustn/>

Заккрытие ЛХХV Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 1 апреля 2012 года в Главном здании МГУ.
Подробная информация на сайте <http://www.mcsme.ru/mmo/>