LXXV Московская математическая олимпиада
11 класс, второй день

1. К каждому члену некоторой конечной последовательности подряд идущих натуральных чисел приписали справа по две цифры и получили последовательность квадратов подряд идущих натуральных чисел. Какое наибольшее число членов могла иметь эта последовательность?

2. На плоской горизонтальной площадке стоят 5 прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые 4 из этих прожекторов можно повернуть так, что все 4 испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все 5 прожекторов, чтобы все 5 лучей пересеклись в одной точке?

3. Учитель написал на доске в алфавитном порядке все возможные 2^n слов, состоящих из n букв А или Б. Затем он заменил каждое слово на произведение n множителей, исправив каждую букву А на x, а каждую букву Б — на $(1-x)$, и сложил между собой несколько первых из этих многочленов от x. Докажите, что полученный многочлен представляет собой либо постоянную, либо возрастающую на отрезке $[0;1]$ функцию от x.

4. После обеда на *прозрачной* квадратной скатерти остались тёмные пятна общей площади S. Оказалось, что если сложить скатерть пополам вдоль любой из двух линий, соединяющих середины противоположных её сторон, или же вдоль одной из двух её диагоналей, то общая видимая площадь пятен будет равна S_1. Если же сложить скатерть пополам вдоль другой её диагонали, то общая видимая площадь пятен останется равна S. Какое наименьшее значение может принимать величина $S_1 : S$?

5. Обозначим через $S(n,k)$ количество не делящихся на k коэффициентов разложения многочлена $(x+1)^n$ по степеням x.

а) Найдите $S(2012,3)$.

б) Докажите, что $S(2012^{2011},2011)$ делится на 2012.

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 01.04.2012.
Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ
см. на сайте http://www.mccme.ru/mmo.

Москва, 24 марта 2012 года

LXXV Московская математическая олимпиада
11 класс, второй день

1. К каждому члену некоторой конечной последовательности подряд идущих натуральных чисел приписали справа по две цифры и получили последовательность квадратов подряд идущих натуральных чисел. Какое наибольшее число членов могла иметь эта последовательность?

2. На плоской горизонтальной площадке стоят 5 прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые 4 из этих прожекторов можно повернуть так, что все 4 испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все 5 прожекторов, чтобы все 5 лучей пересеклись в одной точке?

3. Учитель написал на доске в алфавитном порядке все возможные 2^n слов, состоящих из n букв А или Б. Затем он заменил каждое слово на произведение n множителей, исправив каждую букву А на x, а каждую букву Б — на $(1-x)$, и сложил между собой несколько первых из этих многочленов от x. Докажите, что полученный многочлен представляет собой либо постоянную, либо возрастающую на отрезке $[0;1]$ функцию от x.

4. После обеда на *прозрачной* квадратной скатерти остались тёмные пятна общей площади S. Оказалось, что если сложить скатерть пополам вдоль любой из двух линий, соединяющих середины противоположных её сторон, или же вдоль одной из двух её диагоналей, то общая видимая площадь пятен будет равна S_1. Если же сложить скатерть пополам вдоль другой её диагонали, то общая видимая площадь пятен останется равна S. Какое наименьшее значение может принимать величина $S_1 : S$?

5. Обозначим через $S(n,k)$ количество не делящихся на k коэффициентов разложения многочлена $(x+1)^n$ по степеням x.

а) Найдите $S(2012,3)$.

б) Докажите, что $S(2012^{2011},2011)$ делится на 2012.

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 01.04.2012.
Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ
см. на сайте http://www.mccme.ru/mmo.

Москва, 24 марта 2012 года