LXXX Московская математическая олимпиада

12 марта 2017 года • 8 класс

Задача 1. Замените в выражении $AB^C = DE^F$ буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным, использовав каждую цифру от 1 до 6 ровно один раз. (Пояснение: AB^C — двузначное число из цифр A и B, возведенное в степень C. Достаточно привести один способ замены.)

Задача 2. На плоскости даны треугольник ABC и 10 прямых, среди которых нет параллельных друг другу. Оказалось, что каждая из прямых равноудалена от каких-то двух вершин треугольника ABC. Докажите, что хотя бы три из этих прямых пересекаются в одной точке.

Задача 3. По кругу написано 100 ненулевых чисел. Между каждыми двумя соседними числами написали их произведение, а прежние числа стерли. Количество положительных чисел не изменилось. Какое минимальное количество положительных чисел могло быть написано изначально?

Задача 4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны и $AD = BE = CF$. Докажите, что в него можно вписать окружность (то есть внутри шестиугольника существует окружность, касающаяся всех его сторон).

Задача 5. Преподаватель выставил оценки по шкале от 0 до 100. В учебной части могут менять верхнюю границу шкалы на любое другое натуральное число, пересчитывая оценки пропорционально и округляя до целых. Нецелое число при округлении меняется до ближайшего целого; если дробная часть равна 0,5, направление округления учебная часть может выбирать любое, отдельно для каждой оценки. (Например, оценка 37 по шкале 100 после пересчета в шкалу 40 перейдет в $37 \cdot (40/100) = 14{,}8$ и будет округлена до 15.) Студенты Петя и Вася получили оценки a и b, отличные от 0 и 100. Докажите, что учебная часть может сделать несколько пересчетов так, чтобы у Пети стала оценка b, а у Васи — оценка a (пересчитываются одновременно обе оценки).

Задача 6. Кузнечик умеет прыгать по клетчатой полоске шириной в 1 клетку на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону. (*Прыжок на k клеток* означает, что между начальным и конечным положениями прыжка находятся $k-1$ клеток.) Будем называть натуральное число n *пропрыгиваемым*, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти полоску длины n, побывав на каждой клетке ровно один раз. Докажите, что существует непропрыгиваемое n, большее 50.

XV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 16 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXX Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

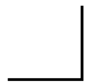
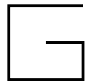
LXXX Московская математическая олимпиада

12 марта 2017 года • 9 класс

Задача 1. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры в десятичной записи которого различны и которое уменьшается в 5 раз, если зачеркнуть первую цифру.

Задача 2. В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым один раз. В каждом туре каждый участник проводил по одной встрече. Не меньше чем в половине всех встреч оба участника были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре была хотя бы одна встреча между земляками.

Задача 3. Существует ли клетчатый многоугольник, который можно поделить на две равные части разрезом такой формы? Разрез должен лежать внутри многоугольника (на границу могут выходить только концы разреза).

а)  б) 

Задача 4. Найдите все такие пары натуральных чисел a и k, что для всякого натурального n, взаимно простого с a, число $a^{k^n+1} - 1$ делится на n.

Задача 5. Петя раскрасил каждую клетку квадрата 1000×1000 в один из 10 цветов. Также он придумал такой 10-клеточный многоугольник Φ, что при любом способе вырезать из этого квадрата по границам клеток многоугольник, равный Φ, в нём все 10 клеток оказываются разного цвета. Обязательно ли Φ — прямоугольник?

Задача 6. В треугольнике ABC с углом A, равным 45°, проведена медиана AM. Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1, а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1. Прямые b и c пересеклись в точке X. Докажите, что $AX = BC$.

XV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 16 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXX Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXX Московская математическая олимпиада

12 марта 2017 года • 10 класс

Задача 1. Квадратный трехчлен x^2+bx+c имеет два действительных корня. Каждый из трех его коэффициентов (включая коэффициент при x^2) увеличили на 1. Могло ли оказаться, что оба корня трехчлена также увеличились на 1?

Задача 2. Все натуральные числа, бóльшие единицы, раскрасили в два цвета — синий и красный — так, что сумма любых двух синих (в том числе одинаковых) — синяя, а произведение любых двух красных (в том числе одинаковых) — красное. Известно, что при раскрашивании были использованы оба цвета и что число 1024 покрасили в синий цвет. Какого цвета при этом могло оказаться число 2017?

Задача 3. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AOC вторично пересекает стороны AB и BC в точках E и F. Оказалось, что прямая EF делит площадь треугольника ABC пополам. Найдите угол B.

Задача 4. У Васи есть камень (однородный, без внутренних полостей), имеющий форму выпуклого многогранника, у которого есть только треугольные и шестиугольные грани. Вася утверждает, что он разбил этот камень на две части так, что можно сложить из них куб (без внутренних полостей). Могут ли слова Васи быть правдой?

Задача 5. При каких натуральных n для всякого натурального $k \geqslant n$ найдется число с суммой цифр k, кратное n?

Задача 6. В Чикаго орудует 36 преступных банд, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причем любые два гангстера состоят в разных наборах банд. Известно, что ни один гангстер не состоит в двух бандах, враждующих между собой. Кроме того, оказалось, что каждая банда, в которой не состоит некоторый гангстер, враждует с какой-то бандой, в которой данный гангстер состоит. Какое наибольшее количество гангстеров может быть в Чикаго?

XV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 16 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXX Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXX Московская математическая олимпиада

12 марта 2017 года • 11 класс, первый день

Задача 1. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 80, в котором можно так переставить две его различные цифры, что получившееся число также будет кратно 80.

Задача 2. На вписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC в точке S, нашлась такая точка Q, что середины отрезков AQ и QC также лежат на вписанной окружности. Докажите, что QS — биссектриса угла AQC.

Задача 3. Пусть x_0 — положительный корень уравнения $x^{2017}-x-1=0$, а y_0 — положительный корень уравнения $y^{4034}-y=3x_0$.

а) Сравните x_0 и y_0.

б) Найдите десятый знак после запятой числа $|x_0-y_0|$.

Задача 4. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

Задача 5. На гранях единичного куба отметили 8 точек, которые служат вершинами меньшего куба. Найдите все значения, которые может принимать длина ребра этого куба.

Задача 6. В Чикаго орудует 36 преступных банд, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причем любые два гангстера состоят в разных наборах банд. Известно, что ни один гангстер не состоит в двух бандах, враждующих между собой. Кроме того, оказалось, что каждая банда, в которой не состоит некоторый гангстер, враждует с какой-то бандой, в которой данный гангстер состоит. Какое наибольшее количество гангстеров может быть в Чикаго?

XV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 16 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXX Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`