10 класс

10.1. 33 богатыря выходят в дозор 33 дня. В первый день должен выйти один богатырь, во второй – два, в третий – три, и так далее, в последний день – все богатыри. Сможет ли дядька Черномор организовать дозоры так, чтобы все богатыри вышли в дозор одинаковое количество раз?

Ответ: сможет.

Решение. Так как 1 + 2 + ... + 33 = $\frac{1+33}{2}\cdot 33$ = 17·33, то каждый богатырь должен выйти в дозор 17 раз. Пусть, например, Черномор пронумерует богатырей и в первые 16 дней богатыри выходят в дозор в соответствии со своими номерами: в первый день –богатырь с номером один, во второй – с номерами 1 и 2, и так далее, в шестнадцатый день –богатыри с номерами от 1 до 16. В следующие 16 дней порядок выхода такой: в семнадцатый день – богатыри с номерами от 17 до 33, в восемнадцатый – с номерами от 16 до 33, и так далее, в тридцать второй день : богатыри с номерами от 2 до 33. Таким образом, за эти дни каждый богатырь побывает в дозоре 16 раз, а в последний день выйдут все.

Это решение можно изложить в общем виде, например, так. Например, пусть в k-ый день, где $1 \le k \le 16$, выходят богатыри с номерами от 1 до k, а все богатыри, которые не вышли в в k-ый день, выходят в день, имеющий номер 33 – k. Тогда за каждую пару дней вида (k; 33 – k) в дозоре побывают все богатыри, и каждый выйдет 16 раз – по количеству таких пар. После этого они все вместе выйдут в последний день.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение*

"±" *Приведен верный алгоритм, но рассуждения не полны или содержат неточности*

"∓" *Верный ответ приведен только на основании того, что сумма чисел от 1 до 33 делится на 33, но алгоритм выхода богатырей отсутствует*

"–" *Приведен только ответ*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

10.2. Существуют ли такие попарно различные числа a, b и c, что число a является корнем квадратного трехчлена $x^2 - 2bx + c^2$, число b является корнем квадратного трехчлена $x^2 - 2cx + a^2$, а число c является корнем квадратного трехчлена $x^2 - 2ax + b^2$?

Ответ: не существуют.

Решение. Первый способ. Предположим, что такие числа нашлись. Тогда выполняются равенства: $a^2 - 2ba + c^2 = 0$, $b^2 - 2cb + a^2 = 0$ и $c^2 - 2ac + b^2 = 0$. Сложим эти равенства. Перегруппировав и выделив полные квадраты, получим: $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$. Это возможно только в случае, когда $a = b = c$, что противоречит условию.

Второй способ. Докажем, что данные уравнения вообще не могут одновременно иметь корни. Найдем дискриминанты каждого из уравнений: $D_1 = 4b^2 - 4c^2$, $D_2 = 4c^2 - 4a^2$, $D_3 = 4a^2 - 4b^2$. Если все уравнения имеют корни, то $b^2 \ge c^2 \ge a^2 \ge b^2$. Следовательно, $b^2 = c^2 = a^2$ то есть $|a| = |b| = |c|$, но трёх различных чисел с одинаковым модулем не существует.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение*

"±" *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, при решении вторым способом без пояснений указывается, что равенство $b^2 = c^2 = a^2$ выполняться не может*)

"∓" *Присутствует только верная идея сложения равенств, не доведенная до конца*

"∓" *Получен верный ответ, но в процессе решения вторым способом используются неверные утверждения типа: $a \ne b \Rightarrow a^2 \ne b^2$ или $a^2 \ge b^2 \Rightarrow a \ge b$ "*

"–" *Приведен только ответ*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

10.3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Оказалось, что радиусы OA и OB первой окружности являются касательными ко второй окружности. Через точку A проведена прямая, которая вторично пересекает окружности в точках M и N. Докажите, что $MB \perp NB$.

Решение. Пусть $\angle BMN = \alpha$, $\angle BNM = \beta$ (см. рис. 10.3 а, б).

Первый способ. См. рис. 10.3а. Заметим, что $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$ (по теореме об угле между касательной и хордой), $\angle AOB = 2\beta$ (центральный угол). Из треугольника AOB: $2\alpha + 2\beta = 180°$, значит $\alpha + \beta = 90°$. Следовательно, $\angle MBN = 90°$, что и требовалось.

Второй способ. См. рис. 10.3б. Пусть Q – центр второй окружности, тогда $\angle OQB = \frac{1}{2}\angle AQB = \alpha$, $\angle QOB = \frac{1}{2}\angle AOB = \beta$. Следовательно, треугольники QBO и MBN подобны. Но $\angle\ QBO = 90°$ (перпендикулярность касательной и радиуса), значит, $\angle MBN = 90°$, что и требовалось.

Существуют и другие способы рассуждений, например, можно использовать, что четырехугольник OAQB – вписанный (см. рис. 10.3б). Отметим, что случай, когда точки M и N расположены по одну сторону от точки A, принципиально не отличается от рассмотренного. Участникам достаточно было разобрать один из вариантов расположения точек.

Рис. 10.3а

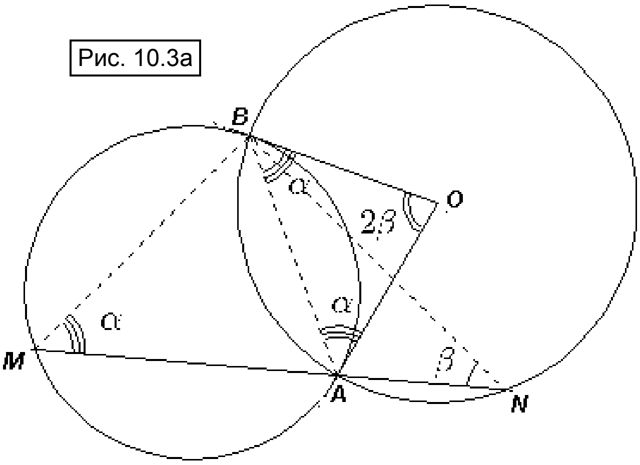
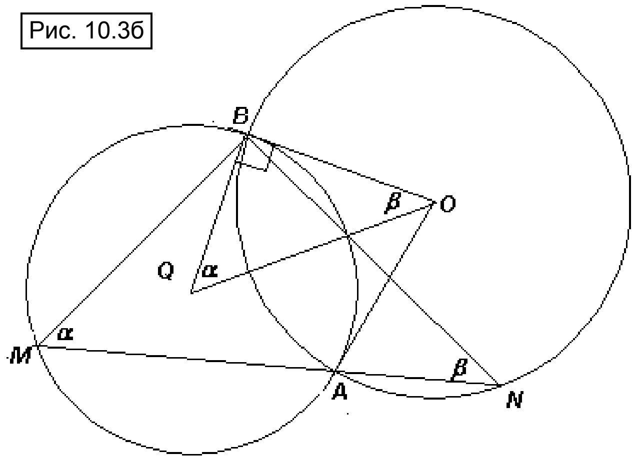


Рис. 10.3б



Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение (достаточно любого из двух случаев расположения точек M и N)*

"±" *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

10.4. Выписаны все делители некоторого натурального числа, кроме единицы и его самого. Какие-то два числа из этого списка отличаются в шесть раз. А во сколько раз отличаются два самых больших числа из этого списка?

Ответ: в полтора раза.

Решение. Пусть среди делителей числа N есть числа a и $6a$, тогда N делится на $6a$. Следовательно N делится на 2 и на 3, то есть 2 и 3 – два наименьших числа в списке. Тогда два наибольших числа в списке – это $\frac{N}{3}$ и $\frac{N}{2}$. Их отношение: $\frac{N}{2} : \frac{N}{3} = \frac{3}{2}$.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение*

"±" *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

"∓" *Верный ответ получен, исходя из того, что 2 и 3 – наименьшие числа в списке делителей, но их присутствие в этом списке не доказано*

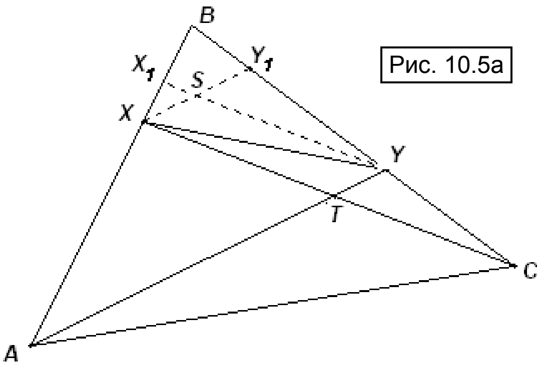
"∓" *Верный ответ получен, исходя из рассмотрения конкретных примеров*

"–" *Приведен только ответ*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

10.5. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Отрезки CX и AY пересекаются в точке T. Докажите, что площадь треугольника XBY больше площади треугольника XTY.

Рис. 10.5а



Решение. Первый способ. Отметим на отрезке BX точку X_1 так, что $YX_1 \parallel CX$ (см. рис. 10.5а). Аналогично, на отрезке BY выберем точку Y_1 так, что $XY_1 \parallel AY$. Пусть отрезки YX_1 и XY_1 пересекаются в точке S. Тогда $XSYT$ – параллелограмм, поэтому равны треугольники XSY и YTX, следовательно, равны и их площади. Но площадь треугольника XBY больше площади треугольника XSY, значит, $S_{XBY} > S_{XTY}$.

Отметив указанным образом точку X_1, можно рассуждать иначе: из подобия треугольников XAT и X_1AY следует, что $YX_1 > TX$. Тогда $S_{XTY} < S_{XYX1} < S_{XBY}$.

Задача допускает также многочисленные вычислительные решения. Приведём одно из них.

Второй способ. Обозначим площади треугольников буквами *a*, *b*, *c*, *d*, *e* так, как показано на рис. 10.5б.

Так как площади треугольников с общей высотой относятся как их основания, то $\frac{b}{d} = \frac{XT}{TC} = \frac{c}{e}$. Тогда $e = \frac{cd}{b}$. Аналогично, $\frac{a}{b+d} = \frac{BY}{YC} = \frac{a+b+c}{d+e}$. Отсюда $a(d + e) = (a + b + c)(b + d)$.

Выразим *a* из этого равенства, учитывая найденное выражение для *e*:

$a = \frac{(b+c)(b+d)}{e-b} = \frac{(b+c)(b+d)}{\frac{cd}{b}-b} = \frac{b(b+c)(b+d)}{cd-b^2}$. Тогда

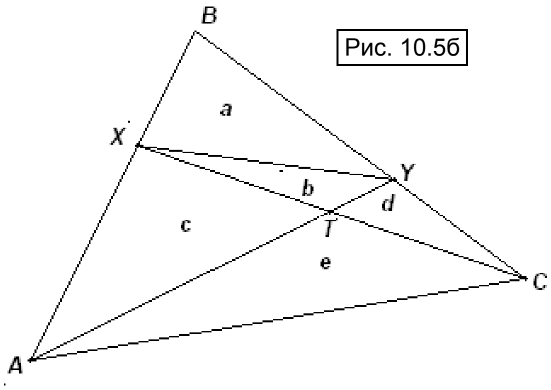


Рис. 10.5б

требуемое неравенство $a > b$ следует из того, что $\frac{(b+c)(b+d)}{cd-b^2} > 1$. Последнее неравенство выполняется, так как числитель дроби больше *cd*, а знаменатель меньше, чем *cd.*

Отметим, что треугольники XBY и XTY имеют общую сторону, поэтому решение задачи можно, свести к сравнению высот этих треугольников, опущенных на XY. Нетрудно доказать, что $\angle XBY < \angle XTY$ (но это сделать надо!). При этом, только из этого факта утверждение о сравнении высот не следует, и решения, содержащие такое заключение, неверны.

Критерии проверки.

“+” *Приведено полное обоснованное решение*

“±” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

10.6. Есть две коробки, в одной 2017 конфет, а в другой 2018. Играют двое, ходят по очереди. За один ход каждый может съесть любое количество конфет, отличное от нуля, из любой коробки. Правила игры не допускают, чтобы после какого-то хода число конфет в одной из коробок делилось на число конфет в другой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход, не нарушив этого условия. Кто сможет выиграть: начинающий игру или второй игрок, как бы ни играл его соперник?

Ответ: сможет выиграть первый.

Решение. Для того, чтобы выиграть, первый игрок после каждого своего хода должен создавать ситуацию, когда в одной из коробок $2n$ конфет, а в другой $2n + 1$ (n – натуральное число). В такой ситуации он заведомо не проигрывает.

Сначала он съедает две конфеты из второй коробки и получает нужную ситуацию. В дальнейшем, в ответ на любой ход второго игрока первый будет восстанавливать такое распределение конфет. Покажем, что он сможет это делать. Возможны 4 случая.

1) Второй ест четное количество конфет из той коробки, где их $2n$. Тогда в ней останется $2m$ конфет ($m > 0$, иначе второй проиграл). В ответ первый съедает из другой коробки такое же количество конфет, и в ней остается $2m + 1$.

2) Второй ест нечетное количество конфет из той коробки, где их $2n$. Тогда в ней останется $2m + 1$ конфет ($m > 0$, иначе второй проиграл). В ответ первый съедает из другой коробки на две конфеты больше и в ней остается $2m$.

3) Второй ест нечетное количество конфет из той коробки, где их $2n + 1$. Тогда в ней останется $2m$ конфет, где $0 < m < n$ (иначе второй проиграл). В ответ первый съедает из другой коробки на две конфеты меньше и в ней остается $2m + 1$.

4) Второй ест четное количество конфет из той коробки, где их $2n + 1$. Тогда в ней останется $2m + 1$ конфет ($m > 0$, иначе второй проиграл). В ответ первый съедает из другой коробки такое же количество конфет, и в ней остается $2m$.

Действуя таким образом, первый (если второй до этого ни разу не ошибётся) сведет игру к тому, что в одной коробке останется две конфеты, а в другой три, и после этого второй проигрывает, какой бы ход он ни сделал.

Критерии проверки.

“+” *Приведено полное обоснованное решение*

“±” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
“∓” *Приведена верная стратегия, но она не обоснована*
“–” *Приведен только ответ или ответ, полученный рассмотрением конкретных примеров*
“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*