11 класс.

11.1. Графики функций $y = ax^2$, $y = bx$ и $y = c$ пересекаются в точке, расположенной выше оси абсцисс. Определите, сколько корней может иметь уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Ответ: корней нет.

Решение. Из условия задачи следует, что графики пересекаются в точке (*m*; *c*), где *c* > 0. Тогда выполняются равенства $bm = c$ и $am^2 = c$, значит, $m \neq 0$. Следовательно, дискриминант данного уравнения $D = b^2 - 4ac = \frac{c^2}{m^2} - \frac{4c^2}{m^2} = -\frac{3c^2}{m^2} < 0$, то есть это уравнение не имеет корней.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение*

"±"*Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

"∓" *Приведен верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка в заключительной фазе решения*

"–" *Приведен только ответ*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

11.2. Существует ли треугольник, у которого сумма косинусов внутренних углов равна 1?

Ответ: не существует.

Решение. Первый способ. Предположим, что такой треугольник *ABC* существует, то есть $\cos A + \cos B + \cos C = 1$. Так как $\cos C = \cos\left(180^\circ - A - B\right) = -\cos\left(A + B\right)$, то $\cos A + \cos B = 1 + \cos\left(A + B\right)$, откуда $2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\cos^2\frac{A+B}{2}$.

Так как $A + B \neq \pi$, то $\cos\frac{A+B}{2} \neq 0$, следовательно, $\cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{A+B}{2}$. Функция $y = \cos x$ убывает на отрезке [0; π] и $0 \le \frac{|A-B|}{2} < \pi$, $0 < \frac{A+B}{2} < \pi$, значит, $\frac{|A-B|}{2} = \frac{A+B}{2}$. Это равенство выполняется только, если *A* = 0 или *B* = 0, но это невозможно, поскольку это величины углов треугольника.

Таким образом, треугольника с заданным условием не существует.

Получив равенство косинусов, можно перенести слагаемые в одну часть и разложить разность косинусов на множители. Тогда sinA = 0 или sinB = 0, то есть A = 0 или B = 0.

Второй способ. Пусть *a*, *b* и *c* – стороны треугольника, удовлетворяющего условию. Тогда, выразив его углы по теореме косинусов, получим:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - 1 + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-c^2-2ab}{2ab} + \frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2+2ac}{2ca} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a-b)^2-c^2}{2ab} + \frac{(b-c)^2-a^2}{2bc} + \frac{(c+a)^2-b^2}{2ca} = 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab} + \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc} + \frac{(c+a-b)(c+a+b)}{2ca} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c(a-b-c)(a-b+c) - a(a-b+c)(a+b-c) + b(a-b+c)(a+b+c)}{2abc} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a-b+c)\left(ac-bc-c^2-a^2-ab+ac+ab+b^2+bc\right)}{2abc} = 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b+c)\left(b^2-c^2-a^2+2ac\right)}{2abc} = 0 \Leftrightarrow$$

$\frac{(a-b+c)\left(b^2-(a-c)^2\right)}{2abc} = 0 \Leftrightarrow \frac{(a+c-b)(b+c-a)(a+b-c)}{2abc} = 0$, что невозможно, так как из неравенства треугольника следует, что каждая скобка в числителе принимает положительное значение.

Таким образом, треугольника с заданным условием не существует.

Критерии проверки.
"+" *Приведено полное обоснованное решение*
"±" *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, при первом способе решения не объяснено, почему* $\cos\frac{A+B}{2} \neq 0$)
"∓" *Верно выписано требуемое равенство для сторон или углов, но в процессе преобразований допущена вычислительная ошибка, не повлиявшая на ответ*
"–" *Приведен только ответ*
"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

11.3. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* (*ABCDEF* – основание) боковое ребро равно *a*, плоский угол при вершине *S* равен 10°. Муравей ползет по поверхности пирамиды из вершины *A*, стремится побывать на всех боковых ребрах (возможно в вершинах) и вернуться в точку *A*. Какова длина его кратчайшего пути?

Ответ: *a.*

Решение. "Разрежем" пирамиду *SABCDEF* по ребру *SA* и сделаем развертку (см. рис. 11.3).

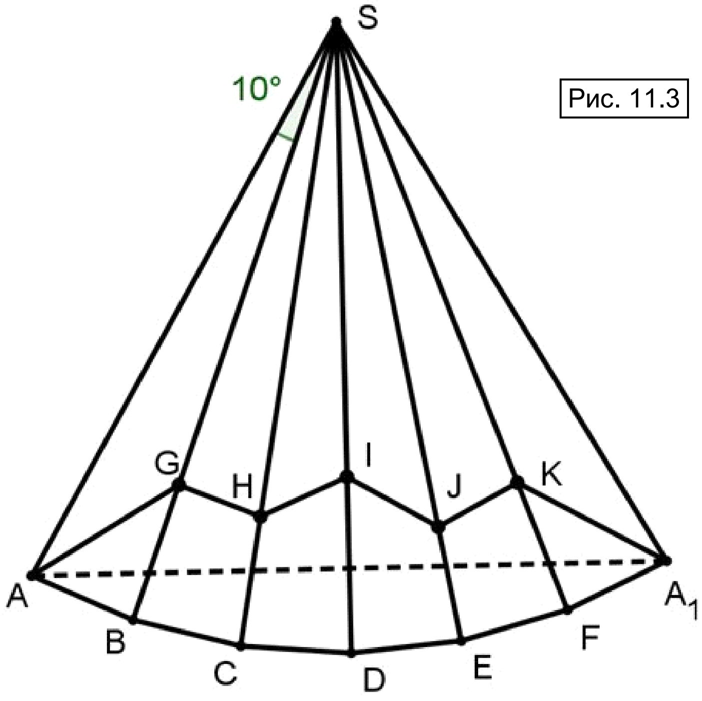

Рис. 11.3

Тогда любой маршрут по боковой поверхности пирамиды, удовлетворяющий условию, будет на развертке являться ломаной, соединяющей точки плоскости A и A_1. Кратчайший путь из A в A_1 равен длине отрезка AA_1.

Заметим, что в равнобедренном треугольнике ASA_1 угол при вершине S равен 60°. Следовательно, этот треугольник равносторонний, тогда $AA_1 = a$.

Отметим, что траекторию движения муравья по самой пирамиде указывать не требуется.

Критерии проверки.
"+" *Приведено полное обоснованное решение*
"±" *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, указано, что кратчайшим путем на развертке является AA_1, но не указана его длина)*
"–" *Приведен только ответ*
"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

11.4. В вершинах семнадцатиугольника записали различные целые числа (по одному в каждой вершине). Затем все числа одновременно заменили на новые: каждое заменили на разность двух следующих за ним по часовой стрелке чисел (из соседнего вычитали следующее за ним). Могло ли произведение полученных чисел оказаться нечетным?

Ответ: не могло.

Решение. Пусть первоначально в вершинах семнадцатиугольника записаны числа: a_1, a_2, ..., a_{17} (нумерация – по часовой стрелке). Тогда после указанной замены в вершинах будут записаны числа: $a_2 - a_3$, $a_3 - a_4$, ..., $a_{16} - a_{17}$, $a_{17} - a_1$, $a_1 - a_2$.

Заметим, что сумма полученных семнадцати чисел равна 0. Следовательно, хотя бы одно из этих чисел – четное. Значит, их произведение также четное.

Критерии проверки.
"+" *Приведено полное обоснованное решение*
"∓" *Присутствует только верная идея сложения новых чисел, не доведенная до конца*
"–" *Приведен только ответ*
"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

11.5. В выпуклом пятиугольнике *PQRST* угол *PRT* в два раза меньше, чем угол *QRS*, а все стороны равны. Найдите угол *PRT*.

Ответ: 30°.

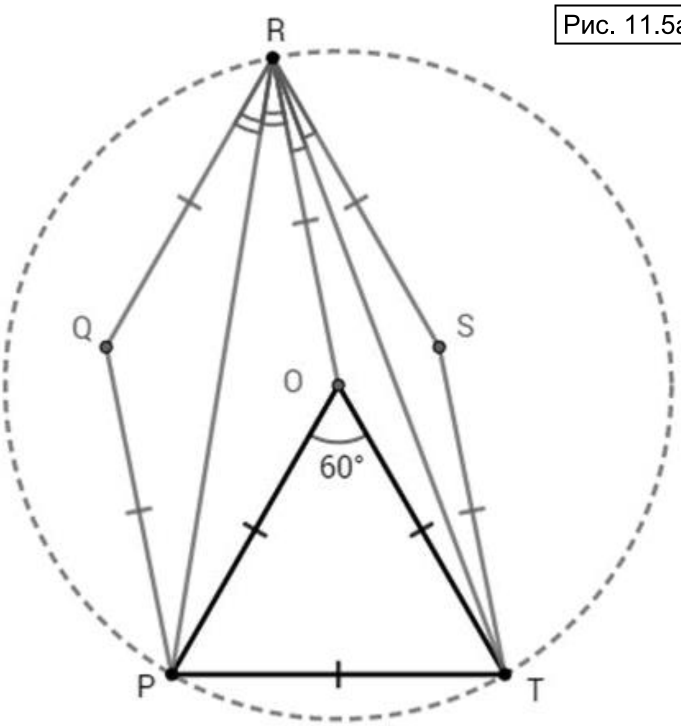

Рис. 11.5а

Решение. Из условия задачи следует, что $\angle PRQ + \angle TRS = \angle PRT$ (*).

<u>Первый способ</u>. Используем метод “свертывания”. Симметрично отразим треугольник *PQR* относительно прямой *PR*, а треугольник *TSR* – относительно прямой *TR* (см. рис. 11.5а). Из равенства (*) и равенства *RQ* = *RS* следует, что образами точек *Q* и *S* является одна и та же точка *O*.

Заметим, что треугольник *TOP* – равносторонний. Кроме того, *OR* = *OP* = *OT*. Следовательно, *O* – центр описанной окружности треугольника *PRT*. Тогда $\angle PRT = 0{,}5\angle POT = 30°$.

<u>Второй способ</u>. Докажем, что *QPTS* – параллелограмм (см. рис. 11.5б). Действительно, используя равенство углов при основаниях в равнобедренных треугольниках *PQR* и *RST* и равенство (*), получим: $\angle QPT + \angle PTS = \angle QPR + \angle RPT + \angle RTP + \angle STR = \angle PRQ + \angle TRS + (180° - \angle PRT) = 180°$.

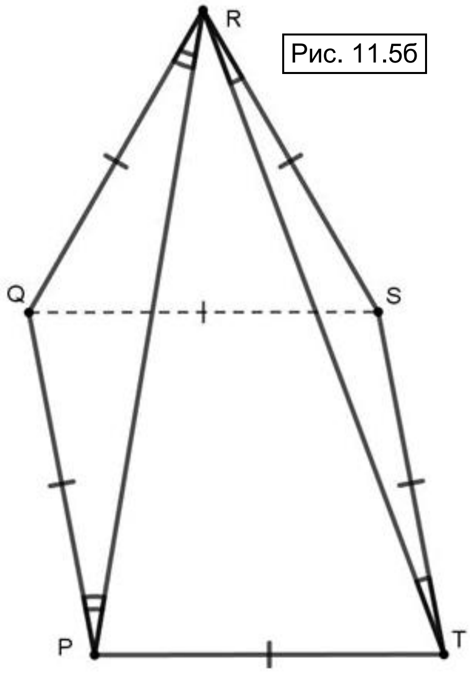

Рис. 11.5б

Таким образом, *PQ* || *ST* и *PQ* = *ST* (по условию), то есть *QPTS* – параллелограмм.. Тогда *QS* = *PT*, значит, треугольник *QRS* – равносторонний. Следовательно, $\angle PRT = 0{,}5\angle QRS = 30°$.

<u>Критерии проверки</u>.

“+” *Приведено полное обоснованное решение*

“±” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, использовано, но не обосновано, что образы точек Q и S при симметриях совпадают)*

“∓” *Верный ответ получен, исходя из того, что QPTS – параллелограмм, но это не доказано*

“–” *Приведен только ответ или ответ, полученный рассмотрением правильного пятиугольника*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

11.6. В стопку сложены 300 карточек: 100 белых, 100 чёрных и 100 красных. Для каждой белой карточки подсчитано количество чёрных, лежащих ниже её, для каждой чёрной – количество красных, лежащих ниже её, а для каждой красной – количество белых, лежащих ниже её. Найдите наибольшее возможное значение суммы трёхсот получившихся чисел.

Ответ: 20 000.

Решение. <u>Первый способ</u>. Количество различных перестановок карточек конечно. Поэтому их расположение с наибольшей указанной суммой существует (возможно, не единственное).

Пусть карточки лежат так, что эта сумма максимальна. Без ограничения общности можно считать, что верхняя карточка – белая. Тогда в этой расстановке не могут лежать сверху вниз подряд пары карточек ЧБ, КЧ и БК, иначе можно увеличить сумму, поменяв их в таких парах местами (симметричные им пары при перестановке не увеличивают искомую сумму). Значит, карточки должны лежать так (сверху вниз): ББ...БЧЧ...ЧКК...КББ...Б...

Длина каждой следующей серии карточек одного цвета не может быть меньше длины предыдущей серии. Действительно, если, например, в расположении с наибольшей суммой встретится фрагмент ...БББЧЧК..., то можно переставить карточку К наверх: ...КБББЧЧ..., увеличив сумму. Так как количество карточек каждого цвета одно и то же, то длины всех серий должны быть одинаковыми (в противном случае карточек того цвета, которые оказались в самом низу, будет больше, чем карточек другого цвета). Тогда серии одного цвета можно переставить “по циклу”, не изменив суммы, то есть получить такое расположение карточек: сверху 100 белых, под ними – 100 чёрных, а внизу – 100 красных. Значит, искомая сумма равна $100\cdot100 + 100\cdot100 = 20\,000$.

Второй способ. Пусть количество карточек каждого из трёх цветов равно n. Используя метод математической индукции, докажем, что для указанной суммы S выполняется неравенство $S \le 2n^2$.

База индукции. При $n = 1$ перебором убеждаемся, что $S \le 2$. Шаг индукции: Пусть неравенство верно для n карточек каждого цвета. Докажем, что оно верно, если количество карточек каждого цвета равно $n + 1$. Рассмотрим, как может увеличиться сумма S, если добавить по одной карточке каждого цвета.. Без ограничения общности можно считать, что белая карточка добавлена на самый верх стопки, а добавленные чёрная и красная карточки – самые верхние среди карточек своего цвета. Пусть выше первой сверху красной карточки расположено b ранее лежащих чёрных, а выше первой сверху чёрной – w ранее лежащих белых. Тогда белая карточка добавляет в сумму $n + 1$ (учитывая все чёрные, лежащие под ней), чёрная карточка добавляет $n + 1$ (учитывая все красные, лежащие под ней) и w, за счёт того, что она лежит под w старыми белыми карточками, а красная карточка добавляет не более, чем $n – w$ за счёт белых, лежащих под ней, и b за счёт того, что она лежит под b старыми чёрными карточками. Итого, $S \le 2n^2 + n + 1 + n + 1 + w + n - w + b = 2n^2 + 3n + b + 2$. Учитывая, что $b \le n$, получим: $S \le 2n^2 + 4n + 2 = 2(n + 1)^2$.

Таким образом, утверждение доказано для всех натуральных n. При $n = 100$ получим, что $S \le 2\cdot100^2 = 20\,000$. Это значение достигается, например, при таком расположении: сверху 100 белых карточек, под ними – 100 чёрных, а внизу – 100 красных.

Критерии проверки.

“+” *Приведено полное обоснованное решение*

“±” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“∓” *Верный ответ получен, исходя из того, что длины всех одноцветных серий карточек одинаковы, но это не доказано*

“∓” *В решении есть верные идеи, каким образом максимизировать сумму путем перестановки карточек, но решение не доведено до конца или содержит ошибки*

“–” *Приведен только ответ или ответ, полученный рассмотрением только частных случаев*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*