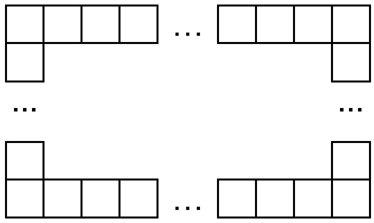
8 класс



8.1. Из 1812 одинаковых квадратов со стороной 1 мм сделали прямоугольную рамку для групповой фотографии (см. рисунок, границы фотографии совпадают с внутренними границами рамки). Потом фотографию разрезали по линии миллиметровой сетки на две прямоугольные части. Теперь понадобилось две рамки, на которые ушло 2018 таких же квадратов. Найдите размеры исходной фотографии.

Ответ: 101×803 (мм).

Решение. Без ограничения общности можно считать, что разрез проходил по вертикали. После разрезания добавились две вертикальные стороны рамки вместе с угловыми квадратами, на которые ушло 2018 – 1812 = 206 квадратов. Значит, на каждую сторону ушло 206 : 2 = 103 квадрата и столько же квадратов составляла вертикальная сторона исходной рамки. Тогда горизонтальная сторона исходной рамки (без учета угловых квадратов) составляла (1812 – 206) : 2 = 803 квадрата. Так как угловые квадраты учитывать не надо, то размер исходной фотографии: 101×803 (мм).

<u>Критерии проверки</u>.

“+” *Приведено полное обоснованное решение и получен верный ответ*

“±” *Вместо размера фотографии верно и обоснованно найдены размеры исходной рамки (103×805 мм)*

“∓” *Приведены отчасти верные рассуждения, но для одной или обеих сторон ответ отличается от верного на 1мм или 2 мм*

“∓” *Приведен только верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию*

“∓” *Верный ответ получен на основании конкретного примера разрезания*

“–” *Приведен только ответ*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

8.2. Записаны четыре различных натуральных числа. Оказалось, что сумма чисел, им обратных, равна 1. Может ли среди записанных чисел отсутствовать число 2?

Ответ: не может.

Решение. Если хотя бы одно из записанных чисел – это 1, то обратное к нему также 1, тогда сумма обратных чисел больше, чем 1. Следовательно, среди записанных чисел нет 1. Предположим, что среди них нет числа 2. Рассмотрим четыре наименьших натуральных числа из оставшихся: 3, 4, 5 и 6. Сумма чисел, им обратных, равна $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ = 0,95 < 1. Увеличение любого из этих чисел приводит к уменьшению числа, ему обратного, поэтому при отсутствии числа 2 среди записанных сумма обратных чисел не будет равна 1.

Условию задачи удовлетворяют следующие наборы чисел: (2; 3; 7; 42), (2; 3; 8; 24), (2; 3; 9; 18), (2; 3; 10; 15), (2; 4; 5; 20), (2; 4; 6; 12). От школьников не требуется приводить пример чисел, удовлетворяющих условию.

<u>Критерии проверки</u>.

“+” *Приведено полное обоснованное решение*

“±” *Приведены верные в целом рассуждения, но случай, когда одно из чисел равно 1, не рассмотрен*

“±” *Приведены верные в целом рассуждения, рассмотрен случай, когда одно из чисел равно 1, и случай 3, 4, 5, 6, но отсутствуют дальнейшие рассуждения и выводы*

“∓” *Записаны только верный ответ и неравенство* $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} < 1$ *без каких-либо пояснений*

“–” *Приведен только ответ*

“–” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

8.3. На координатной плоскости построены четыре прямые, уравнения которых имеют вид $y = kx + b$. Все коэффициенты и свободные члены – различные натуральные числа от 1 до 8. Могут ли эти 4 прямые разделить плоскость ровно на 8 частей?

Ответ: могут.

Решение. Рассмотрим, например, прямые, заданные уравнениями: $y = 8x + 1$, $y = 7x + 2$, $y = 6x + 3$ и $y = 5x + 4$. Каждая из них проходит через точку (1; 9), поэтому они делят плоскость ровно на 8 частей.

Существуют и другие примеры, в которых все прямые проходят через указанную точку. Это условие выполняется, если в каждом из уравнений k + b = 9. Существуют также примеры прямых, проходящих через точку с абсциссой –1. Для это коэффициенты подбираются так, чтобы в каждом из уравнений разность b – k была одинаковой.

В других случаях плоскость разделится на большее количество частей (других общих точек быть не может и параллельных прямых среди них нет).

Критерии проверки.

"+" *Приведен верный пример и объяснено, почему в этом случае плоскость разделится ровно на 8 частей, либо это показано аккуратным построением графиков*

"±" *Приведен только верный пример (без дальнейших пояснений)*

"∓" *Приведены 4 уравнения прямых, проходящих через одну точку, но использованы не все числа от 1 до 8, а какие-то из них повторяются*

"∓" *Приведены 3 уравнения параллельных прямых и уравнение четвертой прямой, их пересекающих, но какие-то коэффициенты повторяются*

"–" *Приведен только ответ*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

8.4. В трапеции *ABCD* точка *M* – середина боковой стороны *CD*. Лучи *BD* и *BM* делят угол *ABC* на три равные части. Диагональ *AC* является биссектрисой угла *BAD*. Найдите углы трапеции.

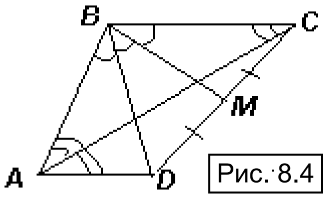


Рис. 8.4

Ответ: $\angle A = 72°$, $\angle B = 108°$, $\angle C = 54°$, $\angle D = 126°$.

Решение. Пусть $\angle ABD = \alpha$, тогда $\angle ABC = 3\alpha$, $\angle BAD = 180° - 3\alpha$, $\angle BDA = \angle DBC = 2\alpha$ (см. рис. 8.4).

В треугольнике *BCD* отрезок *BM* является биссектрисой и медианой, следовательно, этот треугольник – равнобедренный: $BD = BC$. Тогда $\angle BCD = \angle BDC = (180° - \angle DBC) : 2 = 90° - \alpha$.

Кроме того, $\angle BCA = \angle DAC = \angle BAC$, следовательно, $BA = BC$. Таким образом, треугольник *BAD* – также равнобедренный, поэтому $\angle BAD = \angle BDA$, значит, $180° - 3\alpha = 2\alpha$, откуда $\alpha = 36°$. Следовательно, $\angle A = 72°$, $\angle B = 108°$, $\angle C = 54°$, $\angle D = 126°$.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение*

"±" *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, верно и обоснованно найдены только углы A и B)*

"∓" *Доказана только равнобедренность треугольников BCD или ABC*

"–" *Приведен только ответ*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

8.5. На острове живут 33 рыцаря, а также лжецы и фантазёры. Каждого жителя этого острова по очереди спросили: "Сколько среди вас рыцарей?". Было получено десять различных ответов, каждый из которых был назван более, чем одним жителем. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда называют неверное число, которое ещё не было названо, а фантазёры всегда называют число, которое на единицу больше предыдущего ответа. Обязательно ли было названо число 40?

Ответ: обязательно.

Решение. Назовём число *m* "начальным", если его назвали, а предыдущее число $m - 1$ не называли. Фантазёры по условию не называли начальных чисел. Если бы начальное число назвал лжец, то ни другой лжец, ни рыцарь не могли бы назвать его второй раз. Но каждое число было названо, как минимум, два раза. Поэтому начальное число могли называть только рыцари, и 33 – единственное начальное число. Кроме того, каждое число, отличное от 33, должен был назвать хотя бы один фантазер, так как лжецы не могут называть одно и то же число дважды. Это означает: 1) числа, меньшие, чем 33, названы не были (иначе наименьшее из них было бы начальным); 2) все десять названных чисел идут подряд (но не обязательно назывались в порядке возрастания).

Следовательно, названы все натуральные числа от 33 до 42 включительно, и 40 – среди них.

Описанная в условии ситуация возможна, например: 39л; 40ф; 33р; 34л; 36л; 35л; 36ф; 37ф; 38л; 41л; 42ф; 33р; 34ф; 35ф; 36ф; 37ф; 38ф; 39ф; 40ф; 41ф; 42ф; 33р; ...

Приводить подобный пример от участников не требуется.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение*

"±" *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

"∓" *Приведен верный ответ, но решение содержит как верные, так и неверные утверждения (например, утверждается, что числа обязательно назывались в порядке возрастания)*

"∓" *Обосновано только, что числа, меньшие, чем 33, не могли быть названы, но дальнейших продвижений нет или в дальнейших рассуждениях есть ошибки*

"∓" *На основе одного или нескольких примеров утверждается, что названы числа от 33 до 42 включительно, но это не доказано*

"–" *Приведен только ответ ("Да" или "Нет")*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

8.6. Точки M и N – середины сторон BC и AD четырёхугольника $ABCD$. Известно, что $\angle B = 150°$, $\angle C = 90°$ и $AB = CD$. Найдите угол между прямыми MN и BC.

Ответ: 60°.

Решение. Первый способ. Построим параллелограмм $ABMK$ и прямоугольник $CDLM$ (см. рис. 8.6а). Так как $AK \parallel BC \parallel LD$ и $AK = BM = MC = LD$, то $AKDL$ – также параллелограмм. Значит, середина N его диагонали AD является и серединой диагонали KL.

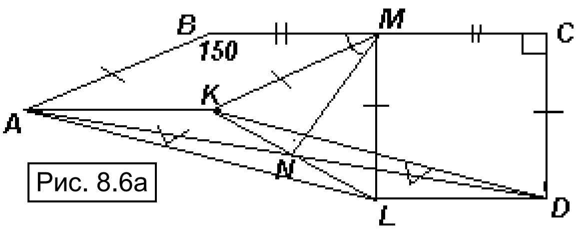


Рис. 8.6а

В треугольнике KML: $KM = AB = CD = ML$ и $\angle KML = \angle KMC - \angle LMC = 150° - 90° = 60°$. Следовательно, этот треугольник – равносторонний. Поэтому его медиана MN является и его биссектрисой, то есть $\angle LMN = 30°$, значит, $\angle BMN = 60°$.

Второй способ. Проведём перпендикуляры AQ и NP к прямой BC (см. рис. 8.6б). Пусть $AQ = a$, $CM = BM = b$. Так как $\angle ABQ = 30°$, то $AB = CD = 2a$, $BQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

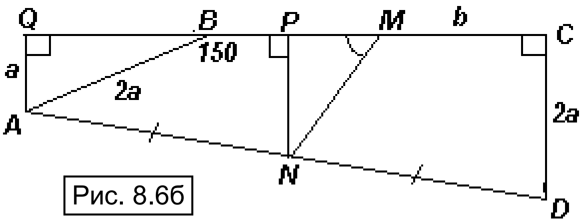


Рис. 8.6б

По теореме Фалеса $QP = PC$, значит, NP – средняя линия трапеции $ADCQ$. Тогда $NP = \frac{3}{2}$a.

$PM = CP - CM = \frac{1}{2}CQ - b = \frac{(a\sqrt{3}+2b)}{2} - b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из треугольника NPM по теореме Пифагора получим, что $MN = a\sqrt{3}$, тогда $\angle PNM = 30°$, а $\angle PMN = 60°$.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение*

"±" *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности, например, при решении первым способом сделаны верные дополнительные построения и для получения верного ответа используется, что AKDL – параллелограмм, но это отдельно не доказано*

"∓" *Присутствует верная идея дополнительного построения, но дальнейших продвижений нет*

"–" *Приведен только ответ*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*