9 класс.

9.1. Игорь сложил десять подряд идущих натуральных чисел, затем разделил полученную сумму на сумму следующих десяти натуральных чисел. Могло ли у него получится число 0,8?

Ответ: не могло.

Решение. Предположим, что при делении получилось 0,8. Обозначим наименьшее число первой суммы через *n*. Тогда эта сумма равна: $n + (n + 1) + ... + (n + 9) = 10n + 45$. Каждое слагаемое второй суммы на 10 больше соответствующего слагаемого первой суммы, поэтому вторая сумма на 100 больше, чем первая.

Таким образом, $\frac{10n+45}{10n+145}=\frac{4}{5}$. Преобразуя это равенство, получим, что $n = 35{,}5$. Это противоречит тому, что *n* – натуральное число.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение и получен верный ответ*

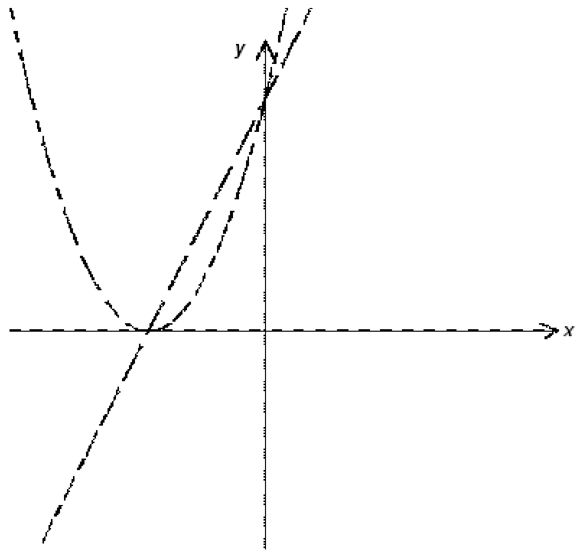
"±" *Верно и обосновано получено необходимое равенство, но допущена вычислительная ошибка, не повлиявшая на ответ*

"∓" *Необходимое равенство получено, но дальнейших продвижений нет*

"–" *Приведен только ответ*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

9.2. На координатной плоскости построены графики линейной и квадратичной функций (см. рисунок). Уравнение линейной функции имеет вид $y = cx + 2c$ для некоторого числа *c*. Используя тот же параметр *c*, запишите уравнение квадратичной функции и объясните свое решение.



Ответ: $y = 0{,}5c(x + 2)^2$.

Решение. Найдем координаты точек пересечения графика линейной функции с осями координат: (0; 2c) и (–2; 0). График квадратичной функции (парабола) касается оси *OX* в точке (–2; 0), следовательно, ее формула имеет вид $y = a(x + 2)^2$. Так как парабола проходит через точку (0; 2c), то, подставляя $x = 0$, $y = 2c$ в полученную формулу, получим: $2c = a \cdot 2^2$, откуда $a = 0{,}5c$. Таким образом, искомая формула: $y = 0{,}5c(x + 2)^2$.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение и получен верный ответ*

"±" *Верно и обосновано найдено, что* $y = a(x + 2)^2$, *но дальнейшего продвижения нет или при вычислении значения a допущена вычислительная ошибка*

"∓" *Приведен только верный ответ*

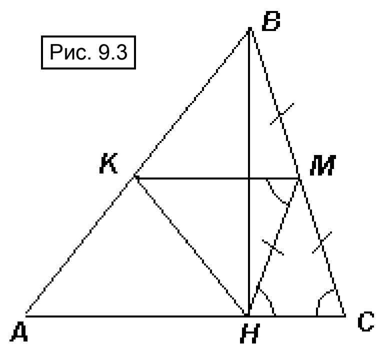
"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

9.3. В треугольнике *ABC* проведены высота *BH* и медианы *AM* и *CK*. Докажите, что треугольники *KHM* и *ABC* подобны.

Решение. Из условия задачи, следует, что *MK* – средняя линия треугольника *ABC*, значит, *MK* || *AC* и *MK* = 0,5*AC* (см. рис. 9.3). Так как *HM* – медиана прямоугольного треугольника *BHC*, то *HM* = 0,5*BC*. Кроме того, так как *HM* = *MC*, то ∠*ACB* = ∠*MHC* = ∠*HMK*. Тогда треугольники *KHM* и *ABC* подобны, так как $\frac{KM}{AC}=\frac{HM}{BC}$ и равны углы между этими сторонами.

Вместо равенства углов можно использовать, что HK – медиана прямоугольного треугольника ABH, то есть HK = 0,5AB. Тогда треугольники подобны по трем сторонам.

Рис. 9.3



Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение*

"±" *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

"∓" *Доказано только, что MK = 0,5AC или (и) HM = 0,5BC, но дальнейших продвижений нет*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

9.4. Назовем натуральное число интересным, если его можно разложить на натуральные множители, каждый из которых меньше, чем 30. Докажите, что из 10 000 интересных чисел всегда можно выбрать два, произведение которых является точным квадратом.

Решение. Рассмотрим разложение интересного числа на простые множители, тогда каждый из этих множителей также меньше, чем 30. Существует ровно 10 простых чисел, меньших тридцати: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Значит, каждое интересное число можно представить в виде: $2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot\ldots\cdot 29^{n_{10}}$, где n_1, n_2, …, n_{10} – натуральные числа или 0.

Число является точным квадратом, если все показатели степеней его простых множителей четные, значит, у двух интересных чисел, произведение которых является квадратом, все показатели степеней с одинаковыми основаниями должны иметь одинаковую четность. Все интересные числа разбиваются на 2^{10} групп, в каждой из которых четности показателей степеней с одинаковым основанием совпадают. Так как 2^{10} = 1024 < 10 000, то по принципу Дирихле из десяти тысяч интересных чисел всегда можно выбрать два числа из одной и той же группы. Их произведение и будет точным квадратом.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение*

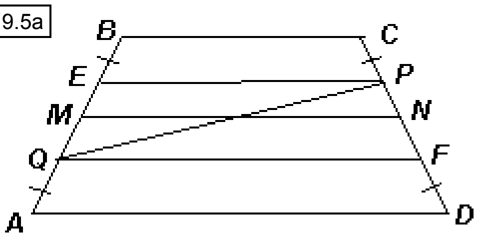
"±" *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, неверно указано количество простых чисел, меньших 30)*

"∓" *Верно указан вид разложения интересного числа на простые множители, но дальнейших продвижений нет*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

9.5. Дана равнобокая трапеция *ABCD*. Рассматривают точки *Q* и *P* на боковых сторонах *AB* и *CD* соответственно, для которых *CP* = *AQ*. Докажите, что середины всех таких отрезков *PQ* лежат на одной прямой.

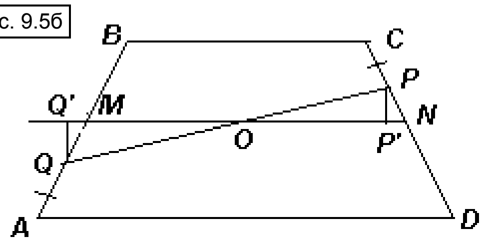
Рис. 9.5а



Решение. Докажем, что середина произвольного отрезка *PQ*, удовлетворяющего условию, лежит на средней линии *MN* трапеции *ABCD*.

Первый способ. Проведем отрезки *QF* и *PE*, параллельные основаниям трапеции (см. рис. 9.5а). Тогда в трапециях *EBCP* и *AQFD* равны углы при основаниях, значит, они равнобокие. Следовательно, *BE* = *CP* = *AQ* = *DF*. Таким образом, *MN* – средняя линия трапеции *QEPF*. Следовательно, она делит пополам и ее диагональ *PQ*, что и требовалось.

Рис. 9.5б



Второй способ. Из условия задачи следует, что *PN* = *MQ* (см. рис. 9.5б). Опустим перпендикуляры *PP*' и *QQ*' на прямую *MN*, тогда равны прямоугольные треугольники *PP*'*N* и *QQ*'*M* (по гипотенузе и острому углу), значит, *PP*' = *QQ*'. Пусть *PQ* пересекает *MN* в точке *O*, тогда равны прямоугольные треугольники *PP*'*O* и *QQ*'*O* (по катету и острому углу). Следовательно, *PO* = *QO*, что и требовалось.

Существуют и другие способы решения.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение*

"±" *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

"∓" *Указано одно из возможных дополнительных построений, позволяющих провести доказательство, но решение не завершено*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

9.6. Бригада рабочих делает ремонт в квартире. Чтобы не испортить пол в комнате (клетчатый квадрат размером 4×4), они расстелили 13 двухклеточных ковриков по линиям сетки. Внезапно оказалось, что один коврик понадобился в другой комнате. Докажите, что рабочие смогут его выбрать так, чтобы ремонт в квартире можно было продолжать, не испортив пол.

Решение: Предположим, что убрать коврик, не оголив куска пола, нельзя. Тогда под каждым ковриком должна быть клетка, покрытая только один раз (иначе, коврик, под которым каждая клетка покрыта хотя бы дважды, можно забрать). Значит, клеток, покрытых в один слой, не меньше, чем 13. Тогда клеток, покрытых хотя бы в два слоя, не больше, чем 16 –13 = 3. Заметим, что любую клетку можно накрыть двухклеточными ковриками не более, чем четырьмя различными способами. Таким образом, все коврики в сумме накрывают не больше, чем $13\cdot 1 + 3\cdot 4 = 25$ клеток. Это противоречит тому, что 13 ковриков должны в сумме накрывать $2\cdot 13 = 26$ клеток. Следовательно, один коврик можно убрать.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение*

"±" *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

"∓" *Присутствуют верные идеи, но решение не закончено или содержит ошибки*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*