10 класс

10.1. График квадратичной функции $y = ax^2 + c$ пересекает оси координат в вершинах правильного треугольника. Чему равно ac?

Ответ: –3.

Решение. Так как график пересекает ось *OX* в двух точках, то числа a и c имеют разные знаки. Точки пересечения: *A*($\sqrt{-\frac{c}{a}}$; 0); *B*($-\sqrt{-\frac{c}{a}}$; 0). Ось *OY* график пересекает в точке *C*(0; c). Тогда сторона *AB* правильного треугольника равна $2\sqrt{-\frac{c}{a}}$, а его высота равна $|c|$. Так как сторона a и высота h правильного треугольника связаны соотношением $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, то $|c| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{-\frac{c}{a}}$, откуда $c^2 = -3 \cdot \frac{c}{a}$, поэтому $ac = -3$.

Существуют и другие способы получить равенство, связывающее a и c, *например, можно использовать, что AB = AC.*

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, рассматривается только с > 0)*

«∓» *Верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка*

«∓» *Приведен только верный ответ*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

10.2. На доске записано число 2018. Игорь дописывает в конец этого числа такую цифру, чтобы получившееся число было кратно 11, и делит его на 11. Затем он дописывает подходящую цифру в конец полученного частного и делит его на 11, и так далее. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

Ответ: не может.

Решение. Первый способ. Докажем, что после каждого шага многозначное число на доске будет уменьшаться. Действительно, рассмотрим число $n \geq 10$ и допишем в его конец цифру a. Получим число $10n + a < 11n$, так как $n \geq 10 > a$. Разделив его на 11, получим число, которое меньше, чем n.

Докажем теперь, что в результате описанной операции из многозначного числа невозможно получить однозначное. Действительно, если $n \geq 10$, то $10n + a \geq 100 + a > 99$. Тогда, если $10n + a$ делится на 11, то после деления будет получено число, которое больше, чем 9.

Так как 2018 – многозначное число, то оно будет после каждого шага уменьшаться, но никогда не станет однозначным, поэтому описанный процесс не может продолжаться бесконечно.

Отметим, что если изначально будет задано однозначное число р, до дописывая к нему каждый раз ту же цифру р, можно сделать процесс бесконечным.

Второй способ. Заметим, что в каждом десятке не более одного числа, делящегося на 11, поэтому можно однозначно восстановить последовательность чисел, которые будут получаться у Игоря: 2018, 20185, 1835, 18359, 1669, 16698, 1518, 15180, 1380, 13805, 1255, 12551, 1141, 11418, 1038, 10384, 944, 9449, 859, 8591, 781, 7810, 710, 7106, 646, 6468, 588, 5885, 535, 5357, 487, 4873, 443, 4433, 403, 4037, 367, 3674, 334, 3344, 304, 3047, 277, 2772, 252.

К числу 252 невозможно дописать цифру так, чтобы полученное число делилось на 11, так как на 11 делятся числа 2519 и 2530. Следовательно, на числе 252 процесс остановится.

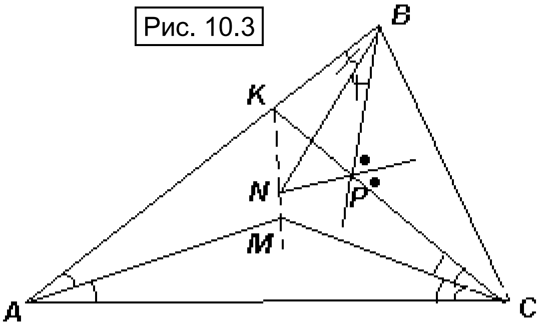
Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, при первом способе решения доказано, что многозначное число уменьшается и указано, но не доказано, что нельзя получить однозначное, либо, наоборот, вторая часть доказана, а первая только указана)*
«±» *Верно выписана последовательность получаемых чисел от 2018 до 252 без каких-либо комментариев при втором способе решения*
«∓» *Приведен верный ответ и сформулированы, но не доказаны утверждения, из которых он следует*
«∓» *При выписывании последовательности чисел допущена одна вычислительная ошибка (второй способ)*
«–» *Приведен только ответ*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

10.3. Внутри треугольника *ABC* отмечена точка *P*. Биссектрисы углов *BAC* и *ACP* пересекаются в точке *M*, а биссектриса угла *PBA* и прямая, содержащая биссектрису угла *BPC*, пересекаются в точке *N*. Докажите, что точка пересечения прямых *CP* и *AB* лежит на прямой *MN*.

Рис. 10.3



Решение: Пусть прямые *CP* и *AB* пересекаются в точке *K* (см. рис. 10.3). Тогда *M* – точка пересечения биссектрис треугольника *AKC*, следовательно, *KM* – биссектриса угла *AKC*.

Рассмотрим теперь треугольник *KBP*. *N* – точка пересечения биссектрисы внутреннего угла при вершине *B* и биссектрисы внешнего угла при вершине *P*. Следовательно, точка *N* лежит и на биссектрисе внешнего угла при вершине *K*, то есть на биссектрисе угла *AKC* (*N* – центр вневписанной окружности треугольника *KBP*).

Таким образом, точки *K*, *M* и N лежат на прямой, содержащей биссектрису угла *AKC*.

Критерии проверки.
«+» *Приведено полное обоснованное решение*
«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
«∓» *Обосновано, что KM – биссектриса угла AKC, но дальнейших продвижений нет*
«–» *Рассмотрен только какой-то частный случай*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

10.4. Квадрат со стороной 7 клеток полностью замостили трёхклеточными «уголками» и пятиклеточными «плюсиками» (см. рисунок). Какое наибольшее количество «плюсиков» могло быть использовано?

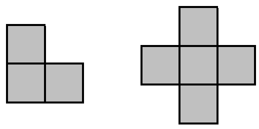
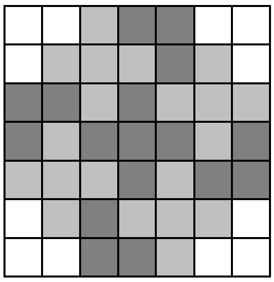


Рис. 10.4



Ответ: 5.

Решение. Пусть для указанного замощения использовано *x* «уголков» и *y* «плюсиков», тогда $3x+5y=49$.

Заметим, что угловые клетки доски могут быть покрыты только «уголками», поэтому «уголков» должно быть не меньше четырёх. Но при *x* = 4; 5; 6; 7; значения *y* не будут целыми.

Если *x* = 8, то *y* = 5. При дальнейшем увеличении значения *x* значения *y* будут меньше пяти. Следовательно, 5 – это наибольшее возможное значение *y*. Пример замощения доски восемью «уголками» и пятью «плюсиками» – см. рис. 10.4.

Критерии проверки.
«+» *Приведено полное обоснованное решение*
«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
«±» *Обоснованно получен верный ответ, но пример отсутствует или содержит ошибку*

«∓» *Приведены только верный ответ и пример*
«–» *Приведен только ответ*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

10.5. Найдите все пары (x; y) действительных чисел, удовлетворяющие условиям: $x^3 + y^3 = 1$ и $x^4 + y^4 = 1$.

Ответ: (0; 1); (1; 0).

Решение. Первый способ. Из второго равенства следует, что $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$. При этом, для того, чтобы выполнялось первое равенство, необходимо, чтобы хотя бы одно из чисел x или y было положительным. Так как оба равенства симметричны относительно переменных, то пусть $0 < x \le 1$. Тогда $0 < x^3 \le 1$, откуда $0 \le 1 - x^3 < 1$, то есть $0 \le y^3 < 1$, значит, $0 \le y < 1$.

Так как $0 < x \le 1$ и $0 \le y < 1$, то $x^4 \le x^3$ и $y^4 \le y^3$, причем оба равенства одновременно достигаются только при $x = 1$ и $y = 0$. Учитывая симметричное решение $x = 0$; $y = 1$, получим ответ.

Второй способ. Из условия задачи следует, что $x^4 - x^3 = -(y^4 - y^3)$. Рассмотрим функцию $f(t) = t^4 - t^3$, тогда уравнение примет вид $f(x) = -f(y)$.

Так как $t^4 - t^3 = t^3(t-1)$, то при $t < 0$ или $t > 1$ $f(t) > 0$, а при $0 < t < 1$ $f(t) < 0$. Следовательно, если $x < 0$ или $x > 1$, то $0 < y < 1$. Если $x > 1$, то $x^4 > 1$ и $x^4 + y^4 > 1$. Если $x < 0$, то $x^3 < 0$, а так как $0 < y < 1$, то $0 < y^3 < 1$, тогда $x^3 + y^3 < 1$. В обоих случаях получено противоречие. Аналогичные рассуждения приводят к противоречию и в случае, когда $0 < x < 1$, $y < 0$ или $y > 1$.

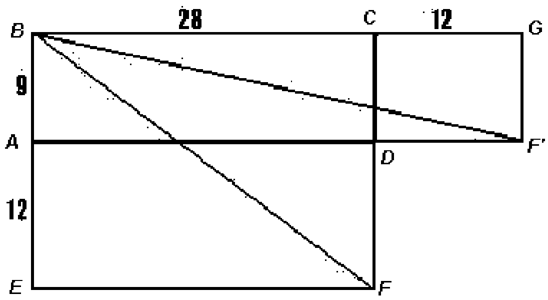
Следовательно, $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ или $t = 1$. Подставив эти значения в исходные равенства вместо любой из переменных, получим ответ.

Критерии проверки.
«+» *Приведено полное обоснованное решение*
«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, не учтен симметричный ответ)*
«∓» *Присутствуют верные идеи оценки значений переменных, но до конца решение не доведено*
«–» *Приведен только ответ*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

10.6. Стороны основания кирпича равны 28 см и 9 см, а высота 6 см Улитка ползёт прямолинейно по граням кирпича из вершины нижнего основания в противоположную вершину верхнего основания. Горизонтальная и вертикальная составляющие ее скорости v_x и v_y связаны соотношением $v_x^2 + 4v_y^2 = 1$ (например, на верхней грани $v_y = 0$ см/мин, поэтому $v_x = v = 1$ см/мин). Какое наименьшее время может затратить улитка на своё путешествие?

Ответ: 35 мин.

Рис. 10.6а



Решение. Пусть данный кирпич – это прямоугольный параллелепипед *ABCDA'B'C'D'*, в котором *AB* -=9 см, *BC* = 28 см, *AA'* = 6 см.

Первый способ. Увеличим высоту кирпича и вертикальную составляющую скорости улитки в два раза. Получим кирпич *ABCDEFGH*, на котором скорость улитки будет всегда одна и та же: $v = \sqrt{v_x{}^2 + \left(2V_y\right)^2}$ = 1 см/мин, а наименьшее время движения такое же, как по исходному кирпичу.

Пусть улитка ползет из вершины *B* в вершину *F*. Рассмотрим развёртку трех граней этого кирпича: основания *ABCD* и двух смежных вертикальных граней с общим ребром *DF* Так как скорость улитки постоянная, то наименьшее время будет при наименьшей длине пути, то есть при движении по диагонали одного из двух прямоугольников: *BCFE* или *ABGF*' (см. рис. 10.6а). По теореме Пифагора получим, что *BF* = 35 см; *BF*' = 41 см. Значит, выгоднее двигаться по диагонали *BF*, тогда при скорости 1 см/мин наименьшее время составит 35 минут.

Второй способ. Заметим, что 6 см по вертикали улитка в любом случае должна проползти, поэтому можно считать, что она равномерно ползла из вершины *D* в вершину *B*' и уже доползла до верхней грани кирпича. При этом, она оказалась в одной из точек A_1 или A_2 на расстоянии *a* от вершины *D*' (см. рис. 10.6б).

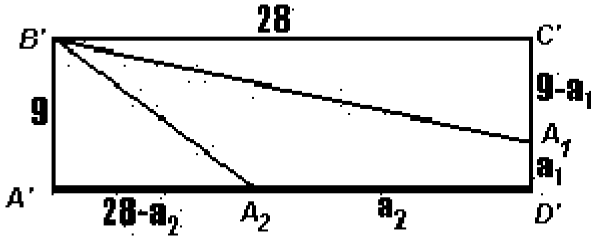


Рис. 10.6б

Пусть она затратила на этот путь t минут, тогда умножив обе части равенства $v_x^2 + 4v_y^2 = 1$ на t^2, получим: $t^2v_x^2 + 4t^2v_y^2 = t^2$. В этом случае, $a = tv_x$ и $6 = tv_y$, поэтому $a^2 + 4\cdot 36 = t^2$, откуда $t = \sqrt{a^2 + 144}$.

Рассмотрим два возможных маршрута по верхней грани: . A_1B' = $\sqrt{28^2 + (9 - a_1)^2}$ или A_2B' = $\sqrt{9^2 + (28 - a_2)^2}$. Скорость ее движения по верхней грани равна 1 см/мин, поэтому время численно равно длине пройденного пути. Найдём значения *a*, для которых функции $f_1(a) = \sqrt{a^2 + 144} + \sqrt{28^2 + (9 - a)^2}$ и $f_2(a) = \sqrt{a^2 + 144} + \sqrt{9^2 + (28 - a)^2}$ принимают наименьшие значения.

Для первой функции геометрической интерпретацией является сумма расстояний на координатной плоскости между точками (0; 0) и (12; *a*) и между точками (12; *a*) и (40; 9). Такая сумма принимает наименьшее значение, если точка (12; *a*) лежит на отрезке с концами в двух других точках. Следовательно, $\frac{40}{12} = \frac{9}{a}$, то есть $a_1 = 2{,}7$, $f_1(2{,}7) = \sqrt{2{,}7^2 + 144} + \sqrt{28^2 + 6{,}3^2} = 12{,}3 + 28{,}7 = 41$.

Для второй функции геометрической интерпретацией является сумма расстояний между точками (0; 0) и (12; *a*) и между точками (12; *a*) и (21; 28). Рассуждая аналогично, получим: $\frac{21}{12} = \frac{28}{a}$, тогда $a_2 = 16$, $f_2(16) = \sqrt{16^2 + 144} + \sqrt{9^2 + 12^2} = 20 + 15 = 35$.

Следовательно, наименьшее время движения – 35 минут.

Школьники, уже умеющие вычислять производные функций, могут в заключительной части решения действовать иначе.

Найдём производные полученных функций: $f_1'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 144}} + \frac{a - 9}{\sqrt{28^2 + (9 - a)^2}}$ *и* $f_2'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 144}} + \frac{a - 28}{\sqrt{9^2 + (28 - a)^2}}$. *Нули производных:* $a_1 = 2{,}7$*;* $a_2 = 16$*. Поскольку производные левее этих значений а принимают отрицательные значения, а правее – положительные, то эти точки являются единственными точками минимума функций. В силу непрерывности каждой из функций на своей области определения, в этих точках и будут достигаться их наименьшие значения. Эти значения:* $f_1(2{,}7) = \sqrt{2{,}7^2 + 144} + \sqrt{28^2 + 6{,}3^2} = 12{,}3 + 28{,}7 = 41$ *и* $f_2(16) = \sqrt{16^2 + 144} + \sqrt{9^2 + 12^2} = 20 + 15 = 35$.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Верный ответ обоснованно получен, исходя из рассмотрения только одного варианта движения*

«∓» *Обоснованно получен ответ 41 минута*

«∓» *Обоснованно получены функции времени, но дальших продвижений нет или они содержат ошибки*

«–» *Приведен только ответ*
«–» *Задача не решена или решена неверно*