8 класс

8.1. Можно ли расставить натуральные числа в клетки таблицы размером 7×7 так, чтобы в любом квадрате 2×2 и любом квадрате 3×3 сумма чисел была нечетна?

Ответ: нельзя.

Решение. Предположим, что можно. Рассмотрим квадрат со стороной 6 клеток. Так как его можно разбить на четыре квадрата размером 3×3, то сумма чисел в этом квадрате будет четной. С другой стороны, этот же квадрат можно разбить на девять квадратов размером 2×2, поэтому эта же сумма окажется нечетной. Противоречие.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

«–» *Приведен только ответ*

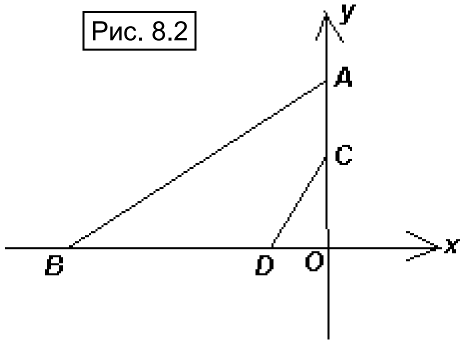
«–» *Задача не решена или решена неверно*

8.2. Часть графика линейной функции, расположенная во второй координатной четверти, вместе с осями координат образует треугольник. Во сколько раз изменится его площадь, если угловой коэффициент функции в два раза увеличить, а свободный член в два раза уменьшить?

Ответ: уменьшится в восемь раз.

Решение. Пусть исходная линейная функция задается уравнением $y = kx + b$. Из условия задачи следует, что $k > 0$ и $b > 0$ (см. рис. 8.2). Точки пересечения ее графика с осями: $A(0;\ b)$ и $B(-\frac{b}{k};\ 0)$. Так как отсекаемый треугольник AOB – прямоугольный, то его площадь равна $\frac{1}{2}OA\cdot OB = \frac{1}{2}b\cdot\frac{b}{k} = \frac{b^2}{2k}$.

Рис. 8.2



После указанного изменения коэффициентов получится функция $y = 2kx + 0{,}5b$. Ее график пересекает оси координат в точках $C(0;\ \frac{b}{2})$ и $D(-\frac{b}{4k};\ 0)$. Площадь прямоугольного треугольника COD равна $\frac{1}{2}OC\cdot OD = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{4k} = \frac{b^2}{16k}$. Следовательно, площадь уменьшится в $\frac{b^2}{2k} : \frac{b^2}{16k} = 8$ раз.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, не повлиявшие на ответ*

«∓» *Верный ход рассуждений, но допущены вычислительные ошибки*

«∓» *Приведен только верный ответ или ответ, полученный путем рассмотрения конкретного примера*

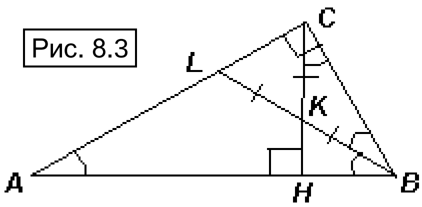
«–» *Задача не решена или решена неверно*

8.3. Высота CH, опущенная из вершины прямого угла треугольника ABC, делит биссектрису BL этого треугольника пополам. Найдите угол BAC.

Ответ: 30°.

Решение. Пусть CH и BL пересекаются в точке K (см. рис. 8.3). Тогда CK – медиана прямоугольного треугольника BCL, проведенная к гипотенузе, значит, $CK = 0{,}5BL = BK$. Тогда $\angle KCB = \angle KBC = \angle KBH$. Так как сумма этих трех углов равна 90° (из треугольника CBH), то каждый из них равен 30°. Следовательно, $\angle CBA = 60°$, $\angle BAC = 30°$.

Рис. 8.3



Критерии проверки.
«+» *Приведено полное обоснованное решение*
«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, не повлиявшие на ответ*
«∓» *Доказано, что CK = 0,5BL, но дальнейшие рассуждения содержат ошибки или отсутствуют*
«–» *Приведен только ответ*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

8.4. На острове Лжецов и Рыцарей расстановку по кругу называют правильной, если каждый, стоящий в кругу, может сказать, что среди двух его соседей есть представитель его племени. Однажды 2019 аборигенов образовали правильную расстановку по кругу. К ним подошел лжец и сказал: «Теперь мы вместе тоже можем образовать правильную расстановку по кругу». Сколько рыцарей могло быть в исходной расстановке?

Ответ: 1346.

Решение. Докажем, что правильная расстановка по кругу возможна тогда и только тогда, когда рыцарей, по крайней мере, в два раза больше, чем лжецов.

Действительно, из условия задачи следует, что в такой расстановке соседями каждого лжеца являются два рыцаря, а среди соседей любого рыцаря есть хотя бы один рыцарь. Тогда правильная расстановка должна выглядеть так: группа рыцарей, лжец, группа рыцарей, лжец, и так далее (в каждой группе не менее двух рыцарей). Значит, при такой расстановке рыцарей хотя бы в два раза больше, чем лжецов.

В обратную сторону: если рыцарей в два раза больше, чем лжецов, то делаем расстановку вида РРЛРРЛ..., а оставшихся рыцарей (если они есть) помещаем между любыми двумя рыцарями. Таким образом, если выполняется такое условие, то правильная расстановка возможна.

Пусть в правильной расстановке, указанной в условии, стоят Р рыцарей и Л лжецов, тогда Р ≥ 2Л. Подошедший лжец сказал неправду, поэтому вместе с ним правильная расстановка невозможна, следовательно, Р ≤ 2Л + 1. Таким, образом Р = 2Л или Р = 2Л + 1. В первом случае, в исходной расстановке $2019\cdot\frac{2}{3} = 1346$ рыцарей, а второй случай невозможен, так как число $(2019 - 1)\cdot\frac{2}{3}$ не будет целым.

Критерии проверки.
«+» *Приведено полное обоснованное решение*
«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, доказано только необходимое условие существования правильной расстановки или допущена вычислительная ошибка в конце)*
«∓» *ответ получен, исходя из предположения, что рыцарей в два раза больше, чем лжецов, но это не доказано*
«–» *Приведен только ответ*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

8.5. У натурального числа N выписали все его делители, затем у каждого из этих делителей подсчитали сумму цифр. Оказалось, что среди этих сумм нашлись все числа от 1 до 9. Найдите наименьшее значение N.

Ответ: 288.

Решение. Заметим, что у числа 288 есть делители 1, 2, 3, 4, 32, 6, 16, 8, 9. Поэтому это число удовлетворяет условию задачи. Докажем, что меньшего числа, удовлетворяющего условию, не существует.

Действительно, так как N должно иметь делитель с суммой цифр 9, то N делится на 9. Рассмотрим теперь делитель d с суммой цифр 8. d не делится на 3, поэтому числа d и 9 – взаимно простые, значит, N делится на $9d$. При этом, если $d \geq 32$, то $9d \geq 288$, то есть $N \geq 288$. Значит, остается проверить $d = 26$, $d = 17$ и $d = 8$.

Если $d = 26$, то $9d = 234$. У этого числа нет делителя с суммой цифр 5, а любое число, ему кратное, больше, чем 288.

Если d = 17, то 9d = 153. У этого числа нет делителя с суммой цифр 2, а любое число, ему кратное, больше, чем 288.

Если d = 8, то 9d = 72. Ему кратные и меньшие, чем 288 – это 144 и 216. Но у этих чисел нет делителя с суммой цифр 5.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

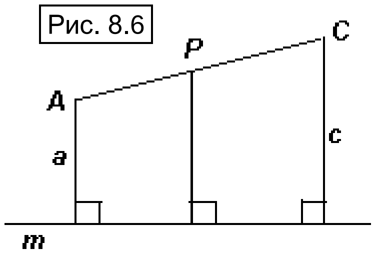
«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

«∓» *Приведен только верный ответ*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

8.6. Внутри острого угла расположен выпуклый четырёхугольник *ABCD*. Оказалось, что для каждой из двух прямых, содержащих стороны угла, выполняется условие: сумма расстояний от вершин *A* и *C* до этой прямой равна сумме расстояний от вершин *B* и *D* до этой же прямой. Докажите, что *ABCD* – параллелограмм.

Рис. 8.6



Решение. Пусть прямая *m* содержит одну из сторон данного угла, *a* и *c* – расстояния от вершин *A* и *C* до *m*, *P* – середина отрезка *AC*, тогда расстояние от *P* до *m* равно $\frac{a+c}{2}$ (средняя линия трапеции, см. рис. 8.6). Аналогично, если *Q* — середина отрезка *BD*, *b* и *d* – расстояния от вершин *B* и *D* до *m*, то расстояние от *Q* до *m* равно $\frac{b+d}{2}$.

По условию, $a+c=b+d$, значит, точки *P* и *Q* равноудалены от прямой *m*. Проведя аналогичное рассуждение для прямой *n*, содержащей другую сторону данного угла, получим, что *P* и *Q* равноудалены от прямой *n*. Геометрическим местом точек, находящихся от заданной прямой на заданном расстоянии является пара прямых, параллельных заданной. По доказанному выше, точки *P* и *Q* принадлежат обоим ГМТ (для прямой *m* и для прямой *n*), значит, они принадлежат их пересечению. Но внутри угла пересекаются только две прямые, по одной из каждого ГМТ, поэтому точки *P* и *Q* совпадают. Таким образом, диагонали *AC* и *BD* данного четырехугольника пересекаются в их общей середине, то есть *ABCD* – параллелограмм.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

«∓» *Присутствует идея рассмотрения середин диагоналей, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют*

«–» *Задача не решена или решена неверно*