7 класс

7.1. Запишите десять раз число 1,11 и одиннадцать раз число 1,01. Зачеркните одно или несколько чисел так, чтобы сумма оставшихся чисел была равна 20,19.

Ответ: 1,11; 1,11; 1,11; 1,11; 1,11; 1,11; 1,11; 1,11; 1,11; 1,11; 1,01; 1,01; 1,01; 1,01; 1,01; 1,01; 1,01; 1,01; 1,01. (Вычеркнуты числа 1,01 и 1,01.)

Решение. Сумма всех записанных чисел равна 10·1,11 + 11·1,01 = 22,21. Это на 2,02 больше требуемой суммы. То есть достаточно вычеркнуть два числа 1,01.

Можно также непосредственной проверкой убедиться, что сумма чисел, оставшихся после вычеркивания, равна 20,19.

Критерии проверки.

«+» *Приведен верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию*
«±» *Приведен верный ответ, но никак не показано, почему он удовлетворяет условию*
«–» *Приведен неверный ответ или задача не решена*

7.2. Расположите на плоскости точки *A*, *B*, *C*, *D* и *E* так, чтобы можно было указать ровно восемь треугольников с вершинами в отмеченных точках. Перечислите эти треугольники.

Ответ: например, см. рис. 7.2. Треугольники: *ABE*, *ABD*, *BCD*, *BCE*, *ADE*, *ACD*, *ACE*, *BDE*.

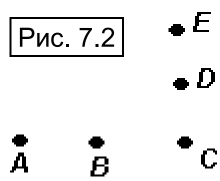

Рис. 7.2

Условию задачи удовлетворяет любое расположение точек, при котором четыре точки разбиваются на пары, задающие две прямые, а пятая точка принадлежит обеим прямым (в указанном случае прямые AB и DE пересекаются в точке C). Тогда из десяти троек точек ровно две тройки не образуют треугольника. При иных случаях расположения точек количество треугольников не равно восьми.

Критерии проверки.

«+» *Верно и чётко указано расположения точек (например, отмечены узлы клеток или проведены пересекающиеся прямые) и верно перечислены все треугольники*
«±» *Приведено верное расположение точек, но треугольники не перечислены*
«∓» *Приведено несколько примеров расположения точек, среди которых есть как верные, так и неверные*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

7.3. В поезде 18 одинаковых вагонов. В некоторых вагонах свободна ровно половина мест, в некоторых других – ровно треть мест, а в остальных заняты все места. При этом во всём поезде свободна ровно одна девятая всех мест. В скольких вагонах все места заняты?

Ответ: в 13 вагонах.

Решение. Примем за единицу количество пассажиров в каждом вагоне. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Так как в поезде свободна ровно одна девятая часть всех мест, то это равнозначно тому, что полностью свободны два вагона. Число 2 единственным образом раскладывается в сумму третьих частей и половин: $2 = 3\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{2}$. Это означает, что свободные места есть в пяти вагонах, поэтому в13 вагонах все места заняты.

Второй способ. Пусть в *x* вагонах свободна половина мест, а в *y* вагонах – треть мест. Тогда $x\cdot\frac{1}{2} + y\cdot\frac{1}{3} = 18\cdot\frac{1}{9}$. Избавившись от знаменателей дробей, получим: $3x + 2y = 12$. Так как *x* и *y* – натуральные числа, то перебором убеждаемся, что $x = 2$, $y = 3$. Тогда искомое количество вагонов: 18 – 2 – 3 = 13.

Найти натуральные решения уравнения 3x + 2y = 12 можно также из соображений делимости, если выразить одну переменную через другую.

Критерии проверки.

«+» *Приведено любое полное и обоснованное решение*
«±» *Приведено верное рассуждение, но допущена вычислительная ошибка*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение и получен верный ответ, но не объяснена единственность решения уравнения или единственность разложения 2 в линейную комбинацию дробей 1/2 и 1/3.*
«∓» *Верно составлено уравнение, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют*
«∓» *Приведен только верный ответ*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

7.4. У бабушки в саду созрели яблоки: антоновка, грушовка и белый налив. Если бы антоновки было втрое больше, то суммарное количество яблок выросло бы на 70%. Если бы втрое больше было грушовки, то оно выросло бы на 50%. На сколько процентов изменилось бы суммарное количество яблок, если бы втрое больше было белого налива?

Ответ: увеличилось на 80%.

Решение. Первый способ. Если бы каждого сорта яблок было втрое больше, то суммарное количество яблок увеличилось бы на 200%. Из них 70% составляет увеличение за счёт антоновки, 50% – увеличение за счёт грушовки. Значит, увеличение за счёт белого налива составит 200% – 70% – 50% = 80%.

Второй способ. Так как прибавление удвоенного количества антоновки даёт рост 70%, то антоновка составляет 0,35 от всех яблок. Аналогично, грушовка составляет 0,25 от всех яблок. Значит, доля белого налива – 0,4. Если к числу дважды прибавить по 0,4, то число вырастет на 80%.

Критерии проверки.
«+» *Приведено любое полное и обоснованное решение*
«±» *Приведено верное рассуждение, но допущена вычислительная ошибка*
«∓» *Приведен только верный ответ или он получен рассмотрением конкретного примера*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

7.5. У Веры есть 27 кубиков с ребром 1 см: 9 красных и 18 синих. Она сложила из них куб с ребром 3 см. Может ли на поверхности куба количество красных квадратиков со стороной 1 см равняться количеству таких же синих?

Ответ: нет.

Решение. Всего на поверхности получившегося куба $9 \cdot 6 = 54$ квадратика. На поверхности куба окажутся три грани маленького кубика, если этот кубик в углу, две грани – если кубик примыкает к ребру куба, одна – если кубик в центре грани. На поверхности окажется наибольшее количество красных квадратиков, если 8 красных кубиков займут все углы большого куба, а ещё один будет примыкать к его ребру. В этом случае на поверхности куба будет $8 \cdot 3 + 2 = 26$ красных квадратиков, но это меньше, чем $54 : 2 = 27$.

Критерии проверки.
«+» *Приведено полное обоснованное решение*
«∓» *Показан пример, где на поверхности получается 26 красных квадратиков, но нет объяснения, почему больше их получиться не может*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

7.6. В каждой клетке квадрата размером 5×5 клеток провели ровно одну диагональ. Вершина клетки свободна, если она не является концом никакой из проведённых диагоналей. Найдите наибольшее возможное количество свободных вершин.

Ответ: 18 вершин.

Решение. Пример. См. рис. 7.6а. На каждой из шести горизонтальных линий три вершины являются свободными.

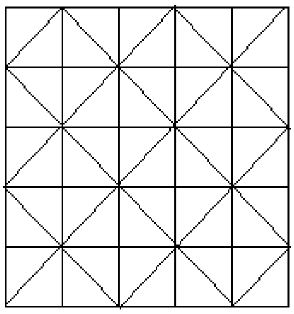
Рис. 7.6а

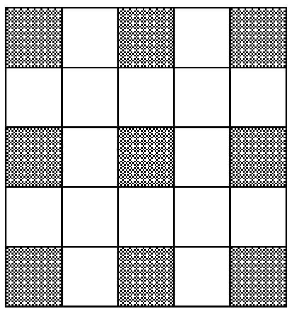
Рис. 7.6б

Оценка. Суммарное количество вершин клеток: $6 \cdot 6 = 36$. Выделим девять клеток, не имеющих общих вершин (см. рис. 7.6б). Они содержат все 36 вершин. В каждой клетке проведена диагональ, поэтому в ней две вершины не свободны. Значит, использовано не менее, чем 18 вершин, поэтому свободными могут оказаться не более, чем 36 – 18 = 18.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«∓» *Приведены верный ответ и верный пример, но не сделана оценка*

«∓» *Приведён верный ответ и доказана оценка, но пример отсутствует или неверен*

«–» *Приведён только ответ*

«–» *Задача не решена или решена неверно*