9 класс

9.1. Парабола $y = 20x^2 + 19x$ и прямая $y = 20x + 19$ пересекаются в двух точках. Верно ли, что график функции $y = 20x^3 + 19x^2$ проходит через эти же две точки?

Ответ: да.

Решение. Первый способ. Если парабола и прямая пересекаются в двух точках, то уравнение $20x^2 + 19x = 20x + 19$ имеет два различных корня. Умножив обе его части на x, получим уравнение $20x^3 + 19x^2 = 20x^2 + 19x$, которое имеет те же корни и ещё $x = 0$. Значит, график функции $y = 20x^3 + 19x^2$ проходит через обе точки пересечения прямой и параболы.

Второй способ. Найдём точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений: $\begin{cases} y = 20x^2 + 19x, \\ y = 20x + 19 \end{cases}$. Получим точки (1; 39) и ($-\frac{19}{20}$; 0). Подставив эти значения в уравнение $y = 20x^3 + 19x^2$, получим верные равенства. Значит, график указанной функции проходит через эти точки.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

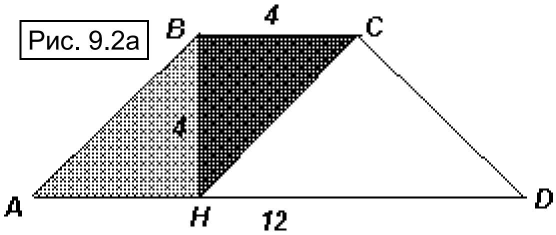
«±»*Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

«–» *Приведён только ответ*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

9.2. Дана равнобокая трапеция с основаниями 4 и 12 и высотой 4. Можно ли разрезать её на три части и сложить из этих частей квадрат?

Рис. 9.2а



Ответ: можно.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$: $BC = 4$, $AD = 12$ и высота $BH = 4$ (см. рис. 9.2а). Проведем также отрезок CH. Так как $AH = \frac{AD - BC}{2} = 4 = BC$, то $ABCH$ – параллелограмм, составленный из двух равных прямоугольных и равнобедренных треугольников. Треугольник DCH – также равнобедренный и прямоугольный, так как $CH = AB = CD$ и $\angle CDH = \angle CAH = \angle CHD = 45°$.

Значит, разрезав трапецию на три части по прямым BH и CH и сложив так, как показано на рис. 9.2б, получим ромб с прямым углом, то есть квадрат.

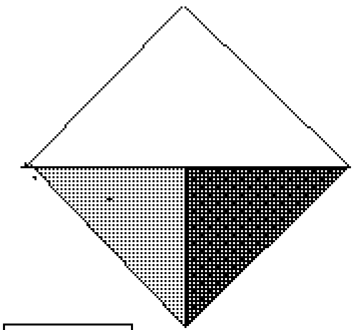


Рис. 9.2б

Отметим, что поиску решения могут также помочь вычисления: площадь трапеции равна 32, а боковая сторона равна $\sqrt{32}$, *откуда следует, что стороной квадрата должна стать боковая сторона трапеции.*

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±»*Приведены верное разрезание трапеции и складывание квадрата без обоснований*

«–» *Приведён только ответ*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

9.3. Число 2019 представили в виде суммы различных нечётных натуральных чисел. Каково наибольшее возможное количество слагаемых?

Ответ: 43.

Решение. Оценка. Вычислим сумму 45 наименьших нечётных натуральных чисел: $1 + 3 + \ldots + 87 + 89 = \frac{1+89}{2} \cdot 45 = 2025 > 2019$. Значит, слагаемых меньше, чем 45, но сумма 44 нечётных слагаемых является чётным числом, поэтому слагаемых не больше, чем 43.

Пример. $2019 = 1 + 3 + \ldots + 81 + 83 + 255$.

Критерии проверки.

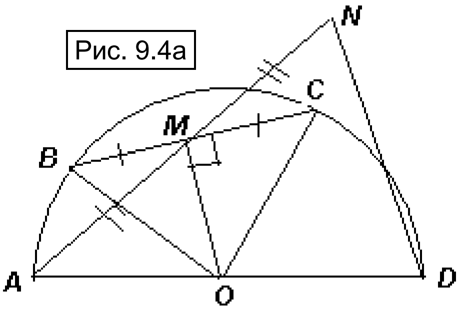
«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±»*Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
«∓» *Приведены верный ответ и верная оценка, но пример отсутствует*
«∓»*Приведены верный ответ и верный пример, но оценка отсутствует или неверна*
«–» *Приведён только ответ*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

9.4. На полуокружности с диаметром *AD* отмечены точки *B* и *C*. Точка *M* – середина отрезка *BC*. Точка *N* такова, что *M* – середина отрезка *AN*. Докажите, что прямые *BC* и *DN* перпендикулярны.

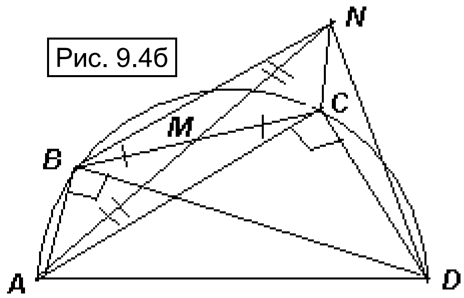
Решение. Первый способ. Пусть *O* – центр окружности. Так как *M* – середина *BC*, то $OM \perp BC$ (см. рис. 9.4а). Кроме того, *OM* – средняя линия треугольника *AND*, поэтому *OM* || *DN*. Следовательно, $DN \perp BC$.

Рис. 9.4а



Второй способ. Из условия задачи следует, что *ABNC* – параллелограмм (см. рис. 9.4б). Поэтому *NC* || *AB* и *BN* || *AC*. Вписанные углы *ACD* и *ABD* – прямые, так как они опираются на диаметр. Следовательно, $DC \perp BN$ и $DB \perp NC$. Значит, высоты треугольника *DNB* лежат на прямых *DC* и *NC*, тогда *C* – ортоцентр этого треугольника. Поэтому третья высота треугольника *DNB* лежит на прямой *BC*, то есть $BC \perp DN$.

Рис. 9.4б



Эти же идеи можно также реализовать, используя векторы.

Критерии проверки.
«+» *Приведено полное обоснованное решение*
«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

9.5. В шахматном турнире в один круг участвовало два мальчика и несколько девочек. Мальчики набрали на двоих 8 очков, в то время как все девочки набрали очков поровну. Сколько девочек могло участвовать в турнире? (Победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0 очков.)

Ответ: 7 или 14.

Решение. Пусть в турнире участвовало *n* девочек и каждая из них набрала *x* очков, тогда сумма всех набранных очков равна *nx* + 8. С другой стороны, каждый из *n* + 2 шахматистов сыграл *n* + 1 партию, поэтому в турнире было сыграно $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ партий.

Так как в каждой партии разыгрывалось одно очко, то количество разыгранных очков равно количеству сыгранных партий. Таким образом, $nx + 8 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

Преобразовав это равенство, получим: $2x = n + 3 - \frac{14}{n}$. Так как удвоенное количество очков, набранных каждой девочкой, является целым числом, то количество девочек является натуральным делителем числа 14, то есть 1, 2, 7 или 14.

При *n* = 1 или *n* = 2 правая часть полученного равенства отрицательна, а это невозможно.

Если *n* = 7, то *x* = 4. Эта ситуация возможна, например, в случае, когда все партии турнира закончились вничью. Тогда каждый участник набрал 4 очка.

Если *n* = 14, то *x* = 8. Эта ситуация также возможна, например, в случае, когда один мальчик набрал 0 очков (всем проиграл), а остальные партии закончились вничью. Тогда второй мальчик и каждая девочка набрали по 8 очков.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*
«±» *Доказано, что количество девочек могло быть 7 или 14, но примеры того, что это реализуется, отсутствуют*
«±» *Доказано, что количество девочек является делителем 14, но указан только один из возможных ответов и приведён пример его реализации*
«∓» *Приведёны оба возможных ответа и проверено, что они удовлетворяют условию*
«–» *Приведён только ответ*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

9.6. Найдите такое наибольшее n, что сумма четвёртых степеней любых n простых чисел, больших 10, делится на n.

Ответ: $n = 240$.

Решение. Фактически требуется, чтобы четвёртые степени всех простых чисел, больших 10, давали один и тот же остаток при делении на n. Действительно, если четвёртые степени каких-то двух чисел дают разные остатки, то можно взять $n - 1$ первое число и одно второе, тогда сумма четвёртых степеней этих чисел не будет делиться на n.

Докажем, что четвёртая степень любого простого числа p, большего 10, при делении на 3, 5 и 16 даёт остаток 1, тогда и при делении на $3\cdot5\cdot16 = 240$ она также будет давать остаток 1. Воспользуемся тем, что $p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)$.

Так как p не кратно трём, то либо $p - 1$, либо $p + 1$ делится на 3.

Рассмотрим остатки от деления p на 5. Если остаток 1, то $p - 1$ делится на 5, если остаток 4, то $p + 1$ делится на 5, а если остаток 2 или 3, то $p^2 + 1$ делится на 5

Так как p нечётно, то каждый из сомножителей $p - 1$, $p + 1$ и $p^2 + 1$ чётен. При этом одно из чисел $p - 1$ или $p + 1$ делится на 4, поэтому произведение трёх этих сомножителей делится на 16.

Осталось показать, что если число больше, чем 240, то оно не удовлетворяет условию. Заметим, что разность степеней любых простых чисел, больших 10, должна делиться на n. Возьмём сначала простые числа 13 и 11 и вычислим разность их четвёртых степеней: $13^4 - 11^4 = (13 - 11)(13 + 11)(13^2 + 11^2) = 2\cdot24\cdot290 = 240\cdot2\cdot29$. Теперь возьмём числа 17 и 11: $17^4 - 11^4 = (17 - 11)(17 + 11)(17^2 + 11^2) = 6\cdot28\cdot410 = 240\cdot7\cdot41$. Поскольку НОД$(240\cdot2\cdot29, 240\cdot7\cdot41) = 240$, то n не может быть больше, чем 240.

Критерии проверки.
«+» *Приведено полное обоснованное решение*
«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
«–» *Задача не решена или решена неверно*