LXXXIV Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Москва
Издательство МЦНМО
2021

Департамент образования и науки города Москвы
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Московское математическое общество
Факультет математики НИУ ВШЭ
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты `mmo@mccme.ru`

☞ Материалы данной книги размещены на странице

`www.mccme.ru/mmo`

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

Председатель оргкомитета LXXXIV ММО
член-корреспондент РАН *Ю. Г. Прохоров*.

Сборник подготовили:

А. А. Авилов, Д. В. Афризонов, Е. В. Бакаев, А. В. Бегунц, Н. Белухов, А. Д. Блинков, И. И. Богданов, П. А. Бородин, С. Д. Брагин, М. Ю. Васильев, М. А. Волчкевич, В. В. Галатенко, Д. В. Галатенко, Т. И. Голенищева-Кутузова, Д. В. Горяшин, А. В. Грибалко, А. С. Гусев, М. А. Дидин, М. Ю. Дмитриева, А. В. Доледенок, С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, А. А. Заславский, О. А. Заславский, Т. В. Казицына, В. А. Клепцын, Д. В. Копьев, Т. А. Корчемкина, О. Н. Косухин, Д. М. Креков, А. К. Кулыгин, Н. М. Курносов, А. Ю. Кушнир, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон, Г. С. Минаев, И. В. Митрофанов, Д. Г. Мухин, Ф. К. Нилов, В. В. Новиков, А. А. Пономарев, Л. А. Попов, А. Н. Попов, В. Ю. Радионов, М. А. Раскин, И. В. Раскина, В. И. Ретинский, Е. Ю. Смирнов, А. А. Соколова, Н. А. Солодовников, Е. С. Стукен, Ю. В. Тихонов, А. Л. Федулкин, И. И. Фролов, А. В. Хачатурян, М. А. Хачатурян, А. В. Шаповалов, И. А. Шейпак, А. Шень, И. А. Эльман, И. В. Ященко.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. а) Впишите в клеточки четыре различные цифры, чтобы произведение дробей равнялось $\frac{20}{21}$:

$$\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{20}{21}.$$

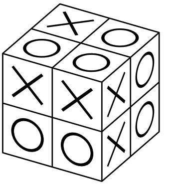
Решите эту задачу для трех других арифметических действий:

б) деления;

в) вычитания;

г) сложения. (*А. В. Шаповалов*)

2. а) Мальвина разбила каждую грань куба $2 \times 2 \times 2$ на единичные квадраты и велела Буратино в некоторых квадратах написать крестики, а в остальных нолики так, чтобы каждый квадрат граничил по сторонам с двумя крестиками и двумя ноликами. На рисунке показано, как Буратино выполнил задание (видно только три грани). Докажите, что Буратино ошибся.

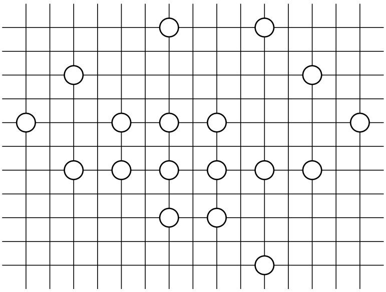


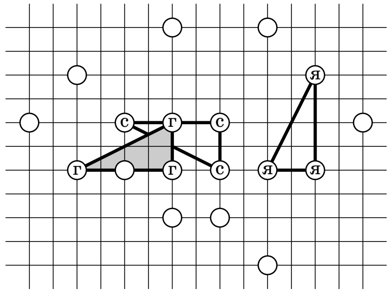
б) Помогите Буратино выполнить задание правильно. Достаточно описать хотя бы одну верную расстановку. (*М. А. Евдокимов*)

3. Братья Петя и Вася решили снять смешной ролик и выложить его в интернет. Сначала они сняли, как каждый из них идет из дома в школу — Вася шел 8 минут, а Петя шел 5 минут. Потом пришли домой и сели за компьютер монтировать видео: они запустили одновременно Васино видео с начала и Петино видео с конца (в обратном направлении); в момент, когда на обоих роликах братья оказались в одной и той же точке пути, они склеили Петино видео с Васиным. Получился ролик, на котором Вася идет из дома в школу, а потом в какой-то момент вдруг превращается в Петю и идет домой задом наперед. А какой длительности получился ролик? (*И. В. Ященко*)

4. Внутри клетчатого прямоугольника периметра 50 клеток по границам клеток вырезана прямоугольная дырка периметра 32 клетки (дырка не содержит граничных клеток). Если разрезать эту фигуру по всем горизонтальным линиям сетки, получится 20 полосок шириной в 1 клетку. А сколько полосок получится, если вместо этого разрезать ее по всем вертикальным линиям сетки? (Квадратик 1×1 — это тоже полоска!) (*А. В. Шаповалов*)

5. Царь пообещал награду тому, кто сможет на каменистом пустыре посадить красивый фруктовый сад. Об этом узнали два брата. Старший смог выкопать 18 ям (см. рис. слева). Больше нигде не удалось, только все лопаты сломал. Царь рассердился и посадил его в темницу. Тогда младший брат Иван предложил разместить яблони, груши и сливы в вершинах равных треугольников (см. рис. справа), а остальные ямы засыпать.





Царь ответил так:

— Хорошо, если деревьев каждого вида будет ровно по три и они будут расти в вершинах равных треугольников, выйдет красиво. Но три вида — слишком мало. Если кроме яблонь, груш и слив будут еще и абрикосы — отпущу брата. Если добавишь пятый вид — черешню — заплачу за работу. Мне еще миндаль нравится, но шесть треугольников ты тут не сможешь разместить.

— А если смогу?

— Тогда проси чего хочешь!

Иван задумался, не получить ли заодно и полцарства. Подумайте и вы: разместите как можно больше видов деревьев в вершинах равных треугольников. (Равенство треугольников означает равенство всех его сторон и углов, то есть точное совпадение при наложении; треугольники можно поворачивать и переворачивать. В одной яме может расти только одно дерево.) (*Е. В. Бакаев*)

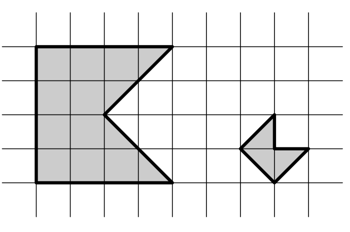
6. На витрине ювелирного магазина лежат 15 бриллиантов. Рядом с ними стоят таблички с указанием масс, на которых написано 1, 2, ..., 15 карат. У продавца есть чашечные весы и четыре гирьки массами 1, 2, 4 и 8 карат. Покупателю разрешается только один тип взвешиваний: положить один из бриллиантов на одну чашу весов, а гирьки — на другую и убедиться, что масса на соответствующей табличке указана верно. Однако за каждую взятую гирьку нужно заплатить продавцу 100 монет. Если гирька снимается с весов и в следующем взвешивании не участвует, продавец забирает ее. Какую наименьшую сумму придется заплатить, чтобы проверить массы всех бриллиантов?

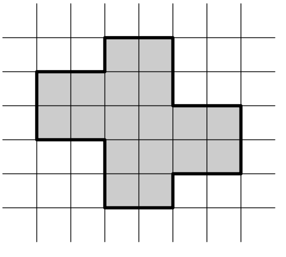
(*А. В. Грибалко*)

7 класс

1. Будем называть *флажком* пятиугольник, вершины которого — вершины некоторого квадрата и его центр. Разрежьте фигуру ниже справа на флажки (не обязательно одинаковые).

примеры флажков





(*М. А. Волчкевич, Т. В. Казицына*)

2. См. задачу 3 для 6 класса.

3. См. задачу 4 для 6 класса.

4. Фокусник научил Каштанку лаять столько раз, сколько он ей тайком от публики покажет. Когда Каштанка таким способом правильно ответила, сколько будет дважды два, он спрятал вкусный кекс в чемодан с кодовым замком и сказал:

— Восьмизначный код от чемодана — решение ребуса

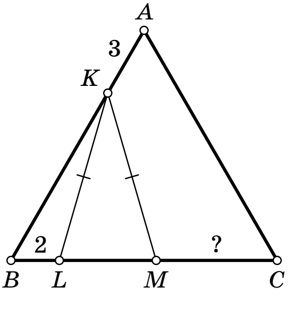
$$\text{УЧУЙ} = \text{КЕ} \times \text{КС}.$$

Надо заменить одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные разными так, чтобы получилось верное равенство. Пролай нужное число раз на каждую из восьми букв, и получишь угощение.

Но тут случился конфуз. Каштанка от волнения на каждую букву лаяла на 1 раз больше, чем надо. Конечно, чемодан не открылся. Вдруг раздался детский голос: «Нечестно! Собака правильно решила ребус!» И действительно, если каждую цифру решения, которое имел в виду фокусник, увеличить на 1, получится еще одно решение ребуса!

Можно ли восстановить: а) какое именно решение имел в виду фокусник; б) чему равнялось число УЧУЙ в этом решении? (*А.К.Кулыгин, Т.А.Корчемкина, И.В.Раскина*)

5. Дан правильный треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка K, на стороне BC — точки L и M (L лежит на отрезке BM) так, что $KL = KM$, $BL = 2$, $AK = 3$. Найдите CM.



(*Е. В. Бакаев*)

6. Пять друзей подошли к реке и обнаружили на берегу лодку, в которой могут поместиться все пятеро. Они решили покататься на лодке. Каждый раз с одного берега на другой переправляется компания из одного или нескольких человек. Друзья хотят организовать катание так, чтобы каждая возможная компания переправилась ровно один раз. Получится ли у них это сделать? (*А. В. Грибалко*)

8 класс

1. Барон Мюнхгаузен утверждает, что к любому двузначному числу можно справа приписать еще две цифры так, чтобы получился полный квадрат (к примеру, если задано число 10, то дописываем 24 и получаем $1024 = 32^2$). Прав ли барон? (*М. А. Евдокимов*)

2. Митя купил на день рождения круглый торт диаметром 36 сантиметров и 13 тоненьких свечек. Мите не нравится, когда свечки стоят слишком близко, поэтому он хочет поставить их на расстоянии не меньше 10 сантиметров друг от друга. Поместятся ли все свечки на торте? (*Д. Г. Мухин*)

3. В комнате находится несколько детей и куча из 2021 конфеты. Каждый из них по очереди подходит к куче, делит количество конфет в ней на количество детей в комнате (включая себя), округляет (если получилось нецелое число), забирает полученное число конфет и покидает комнату. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди. (*М. А. Дидин*)

4. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ отмечена точка F — середина CD. Серединный перпендикуляр к AF пересекает CE в точке H. Докажите, что прямая AH перпендикулярна прямой CE. (*А. Д. Блинков*)

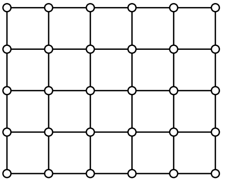
5. В каждом из 16 отделений коробки 4×4 лежит по золотой монете. Коллекционер помнит, что какие-то две лежащие рядом монеты (соседние по стороне) весят по 9 грамм, а остальные по 10 грамм. За какое наименьшее число взвешиваний на весах, показывающих общий вес в граммах, можно определить эти две монеты? (*М. А. Евдокимов*)

6. В некотором государстве 32 города, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Министр путей сообщения, тайный злодей, решил так организовать движение, что, покинув любой город, в него нельзя будет вернуться. Для этого он каждый день, начиная с 1 июня 2021 года, может менять направление движения на одной из дорог. Докажите, что он сможет добиться своего к 2022 году (то есть за 214 дней). (*А. А. Заславский*)

1. Положительные числа a и b таковы, что $a - b = a/b$. Что больше, $a + b$ или ab? (*В. А. Клепцын, А. С. Гусев*)

2. Клетки бумажного квадрата 8×8 раскрашены в два цвета. Докажите, что Арсений может вырезать из него по линиям сетки два квадрата 2×2, не имеющих общих клеток, раскраски которых совпадают. (Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются разными.)
(*Л. А. Попов, А. С. Гусев*)

3. В узлах сетки клетчатого прямоугольника 4×5 расположены 30 лампочек, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек (размерами лампочек следует пренебречь, считая их точками), такую, что с какой-то одной стороны от нее ни одна лампочка не горит, и зажечь все лампочки по эту сторону от прямой. Каждым ходом нужно зажигать хотя бы одну лампочку. Можно ли зажечь все лампочки ровно за четыре хода? (*А. В. Шаповалов*)



4. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает сторону AB в точке D, а сторону AC — в точке E. Пусть X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника MXY, касается ω. (*А. В. Доледенок*)

5. В ряд лежат $100N$ бутербродов, каждый с колбасой и сыром. Дядя Федор и кот Матроскин играют в игру. Дядя Федор за одно *действие* съедает один бутерброд с одного из краев. Кот Матроскин за одно действие может стянуть колбасу с одного бутерброда (а может ничего не делать). Дядя Федор каждый *ход* делает по 100 действий подряд, а кот Матроскин делает только 1 действие; дядя Федор ходит первым, кот Матроскин вторым, далее ходы чередуются до тех пор, пока дядя Федор не доест все бутерброды. Дядя Федор выигрывает, если последний съеденный им бутерброд был с колбасой. Верно ли, что при каждом натуральном N он сможет выиграть независимо от ходов кота Матроскина? (*И. В. Митрофанов*)

6. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0, каждый раз либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального $d < p + q$ найдутся два числа, посещенные лягушкой и отличающиеся на d. (*Н. Белухов*)

10 класс

1. На доске записано натуральное число. Если у него стереть последнюю цифру (в разряде единиц), то останется ненулевое число, которое будет делиться на 20, а если первую — то на 21. Какое наименьшее число может быть записано на доске, если его вторая цифра не равна 0? (*М. А. Евдокимов*)

2. Дана равнобокая трапеция, сумма боковых сторон которой равна большему основанию. Докажите, что острый угол между диагоналями не больше чем 60°. (*А.Д. Блинков*)

3. Есть бесконечная в одну сторону клетчатая полоска, клетки которой пронумерованы натуральными числами, и мешок с десятью камнями. В клетках полоски камней изначально нет. Можно делать следующее:

— перемещать камень из мешка в первую клетку полоски или обратно;

— если в клетке с номером i лежит камень, то можно переложить камень из мешка в клетку с номером $i+1$ или обратно.

Можно ли, действуя по этим правилам, положить камень в клетку с номером 1000? (*А. Шень*)

4. Внутри четырехугольника $ABCD$ взяли точку P. Прямые BC и AD пересекаются в точке X. Оказалось, что прямая XP является внешней биссектрисой углов APD и BPC. Пусть PY и PZ — биссектрисы треугольников APB и DPC. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой. (*Ф. К. Нилов*)

5. См. задачу 6 для 9 класса.

6. *Верхней целой частью* числа x называют наименьшее целое число, большее или равное x. Докажите, что существует такое вещественное число A, что для любого натурального n расстояние от верхней целой части A^n до ближайшего квадрата натурального числа всегда равно 2.

(*Д. М. Креков*)

11 класс, первый день

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Существует ли функция f, определенная на отрезке $[-1; 1]$, которая при всех действительных x удовлетворяет равенству

$$2f(\cos x) = f(\sin x) + \sin x?$$

(*Д. В. Горяшин*)

3. См. задачу 4 для 9 класса.

4. В некоторой стране есть 100 городов, которые связаны такой сетью дорог, что из любого города в любой другой можно проехать только одним способом без разворотов. Схема сети дорог известна, развилки и перекрестки сети необязательно являются городами, всякая тупиковая ветвь сети обязательно заканчивается городом. Навигатор может измерить длину пути по этой сети между любыми двумя городами. Можно ли за 100 таких измерений гарантированно определить длину всей сети дорог? (*П. А. Бородин*)

5. Многогранник[1] с вершинами в серединах ребер некоторого куба называется *кубооктаэдром*. В сечении кубооктаэдра плоскостью получился правильный многоугольник. Какое наибольшее число сторон он может иметь?

(*М. А. Евдокимов*)

6. *Верхней целой частью* числа x называют наименьшее целое число, большее или равное x. Существует ли такое число A, что для любого натурального n расстояние от верхней целой части A^n до ближайшего квадрата натурального числа всегда равно 2? (*Д. М. Креков*)

---

[1]Выпуклый.

11 класс, второй день

1. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, наибольший из которых равен сумме двух других. Докажите, что $c > ab$. (*Фольклор*)

2. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Точка B_1 симметрична точке B относительно стороны AC. Прямые AO и B_1C пересекаются в точке K. Докажите, что луч KA является биссектрисой угла BKB_1. (*М. А. Евдокимов*)

3. Найдите наименьшее натуральное число $N > 9$, которое не делится на 7, но если вместо любой его цифры поставить семерку, то получится число, которое делится на 7. (*М. А. Евдокимов*)

4. Существует ли такой выпуклый четырехугольник, у которого длины всех сторон и диагоналей в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию? (*О. Н. Косухин*)

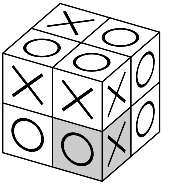
5. В лаборатории на полке стоят 120 внешне неразличимых пробирок, в 118 из которых находится нейтральное вещество, в одной — яд и в одной — противоядие. Пробирки случайно перемешались, и нужно найти пробирку с ядом и пробирку с противоядием. Для этого можно воспользоваться услугами внешней тестирующей лаборатории, в которую одновременно отправляют несколько смесей жидкостей из любого числа пробирок (по одной капле из пробирки), и для каждой смеси лаборатория сообщит результат: $+1$, если в смеси есть яд и нет противоядия; -1, если в смеси есть противоядие, но нет яда; 0 в остальных случаях. Можно ли, подготовив 19 таких смесей и послав их в лабораторию единой посылкой, по сообщенным результатам гарантированно определить, в какой пробирке яд, а в какой противоядие? (*С. Д. Брагин, Д. В. Галатенко*)

6 класс

1. *Ответ.*

$$\frac{4}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{20}{21},\quad \frac{4}{3}:\frac{7}{5}=\frac{20}{21},\quad \frac{9}{7}-\frac{1}{3}=\frac{20}{21},\quad \frac{4}{6}+\frac{2}{7}=\frac{20}{21}.$$

Есть и другие примеры. Интересно, что в последнем задании не удается обойтись несократимыми дробями.



2. а) *Решение.* Представим себе, что кубик сложен из восьми единичных кубиков, и посмотрим на закрашенный на рисунке кубик. Что бы Буратино ни написал на его нижней грани, требование Мальвины будет нарушено. Если там будет крестик, то нолик на его передней грани будет граничить с тремя крестиками. Если там будет нолик, то крестик на боковой грани будет граничить с тремя ноликами.

б) *Ответ.* Существуют (с точностью до поворотов куба) три различные расстановки крестиков и ноликов. Можно (рис. 1) на верхней грани нарисовать нолики, на нижней крестики, а боковые грани разметить «слоями». Второй способ (рис. 2) заключается в том, чтобы представить себе куб сложенным из восьми единичных кубиков (на четырех из которых нарисованы только крестики, а на четырех только нолики) в шахматном порядке. Наконец, третий способ представлен на рисунке 3. Невидимые грани будут размечены «противоположно» видимым: в клетках, симметричных относительно центра кубика клеткам с крестиками, стоят нолики, и наоборот.

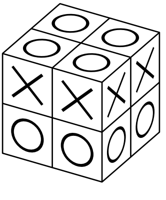


Рис. 1

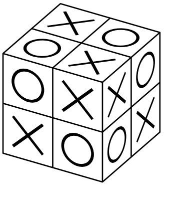


Рис. 2

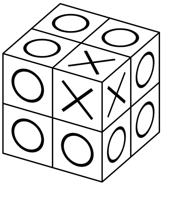


Рис. 3

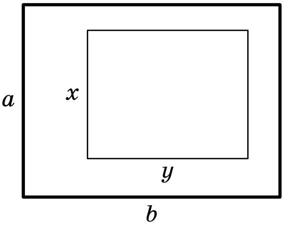
3. *Ответ.* 5 минут.

Решение. Давайте на одном мониторе запустим получившийся ролик, а на другом — Петино видео целиком с конца.

Тогда мониторы будут показывать разное, пока братья не окажутся в одной точке пути, а после этого они будут показывать одно и то же. Поэтому длительности таких двух видео равны.

4. *Ответ.* 21.

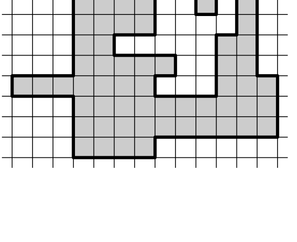
Первое решение. Пусть прямоугольник занимает a клеток по вертикали и b по горизонтали, $a+b=50:2=25$. Аналогично пусть размеры дырки — x клеток по вертикали и y по горизонтали, $x+y=32:2=16$.



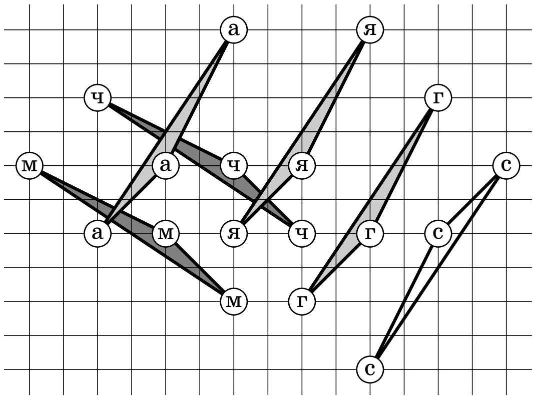
Если бы дырки не было, было бы a горизонтальных полосок. Дырка разрезает x из них на две части, так что всего горизонтальных полосок $a+x$, что по условию равно 20. Аналогично вертикальных полосок будет $b+y$. Но $a+b+$ $+x+y=25+16=41$ и $a+x=20$. Значит, $b+y=41-20=21$.

Второе решение. Для каждой горизонтальной полоски отметим ее левую и правую стороны, а для каждой вертикальной — верхнюю и нижнюю. Ясно, что мы по одному разу отметили все границы клеток на контуре прямоугольника и контуре дырки, то есть $50+32=82$ границы. Каждая полоска давала нам по две границы, так что всего полосок $82:2=41$. Горизонтальных среди них 20, значит, вертикальных 21.

Комментарий. Второе решение более общее — оно работает и в том случае, когда фигура и дырка имеют сложную многоугольную форму.



5. *Ответ.* Иван может спасти брата, заработать денег и даже (если царь сдержит слово) получить полцарства, посадив все 6 видов деревьев как на рисунке.



Других способов посадить все 6 видов деревьев не существует; а вот посадить только 4 или 5 видов деревьев можно многими различными способами.

6. *Ответ.* 800 монет.

Решение. Пример.

Какие гири покупаем	Что взвешиваем	Сколько монет мы заплатили
1	$1=\mathbf{1}$	100
2	$1+2=\mathbf{3}$, $2=\mathbf{2}$	200
4	$2+4=\mathbf{6}$	300
1	$1+2+4=\mathbf{7}$, $1+4=\mathbf{5}$, $4=\mathbf{4}$	400
8	$4+8=\mathbf{12}$	500
1	$1+4+8=\mathbf{13}$	600
2	$1+2+4+8=\mathbf{15}$, $2+4+8=\mathbf{14}$, $2+8=\mathbf{10}$	700
1	$1+2+8=\mathbf{11}$, $1+8=\mathbf{9}$, $8=\mathbf{8}$	800

Оценка. Переходя к каждому взвешиванию, мы либо покупаем одну или несколько гирек, либо отдаем их продавцу. Поэтому мы в сумме купили и отдали $N \geqslant 15$ гирек. При этом после последнего взвешивания у нас на руках есть хотя бы одна гирька, так что мы купили больше, чем отдали. Это значит, что мы купили более половины от N, то есть как минимум 8 гирек, а значит, заплатили жадному продавцу не менее 800 монет.

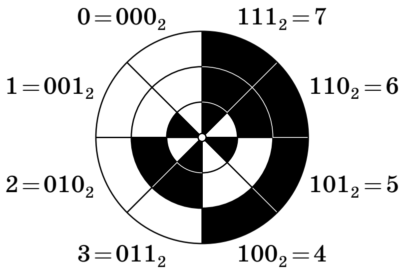
Оценка (другой способ). Представим себе, что плата за каждую гирьку разделена на две части: 50 монет покупатель платит, когда берет гирьку, а еще 50 — когда отдает. Если считать, что в конце все гирьки возвращаются продавцу, то при таком способе расчета суммарная плата не изменится.

Рассмотрим 16 моментов: начало, когда покупатель берет первые гирьки, 14 интервалов между взвешиваниями, и конец, когда покупатель отдает оставшиеся гирьки. В каждый из этих моментов покупатель производит какое-нибудь действие (что-то берет или что-то отдает), поэтому должен заплатить не менее 50 монет, а всего ему придется заплатить не менее $50 \cdot 16 = 800$ монет.

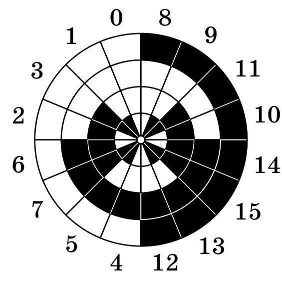
Комментарий. Из решения видно, что оптимальный порядок взвешивания перебирает все возможные наборы гирек, причем соседние наборы отличаются добавлением или удалением ровно одной гирьки. Такая последовательность наборов называется *кодом Грея*.

Зачем были придуманы коды Грея? Представьте себе, что нам почему-то хочется знать положение вращающегося диска. Если его хочется знать совсем приблизительно, то можно покрасить одну половину диска в черный цвет, а другую в белый и поставить фотодатчик. Теперь мы всегда знаем, какой половиной диск повернут к датчику.

Пусть мы хотим большей точности. Можно поставить несколько фотодатчиков и покрасить на диске несколько колец, а в каждом секторе написать его номер черными и белыми полосами как двоичным кодом (см. рисунок).



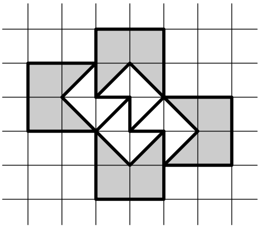
Но тогда на границе секторов датчики могут сработать не совсем одновременно, и между 001 и 010 мы «увидим» 011 или 000. Для такой ситуации и были придуманы коды Грея: если на границе двух секторов меняется цвет только одного из колец, то в любом случае получить можно только код одного из этих секторов.



Любое оптимальное решение задачи оказывается кодом Грея для 4 колец и 16 секторов (на рисунке справа использован код Грея из решения задачи).

7 класс

1. *Ответ.* См. рисунок.



2. См. решение задачи 3 для 6 класса.

3. См. решение задачи 4 для 6 класса.

4. *Ответ.* а) Нет. б) Да, УЧУЙ = 2021.

Решение. а) Заметим, что КЕ и КС заменяют разные числа, но от их перестановки произведение УЧУЙ не изменится. Значит, для каждого решения ребуса есть парное, где цифры, соответствующие Е и С, поменяны местами. Поэтому однозначно восстановить решение, задуманное фокусником, не получится.

б) После увеличения всех цифр на 1 получилось снова решение ребуса, значит,

$$\text{УЧУЙ} + 1111 = (\text{КЕ} + 11)(\text{КС} + 11) = \\ = \text{КЕ} \cdot \text{КС} + 11 \cdot \text{КЕ} + 11 \cdot \text{КС} + 11 \cdot 11.$$

Поскольку при этом УЧУЙ = КЕ · КС, получаем, что

$$1111 = 11 \cdot \text{КЕ} + 11 \cdot \text{КС} + 11 \cdot 11,$$
$$101 = \text{КЕ} + \text{КС} + 11,$$
$$\text{КЕ} + \text{КС} = 90,$$

то есть

$$10\cdot К+Е+10\cdot К+С=90,$$
$$20\cdot К+Е+С=90.$$

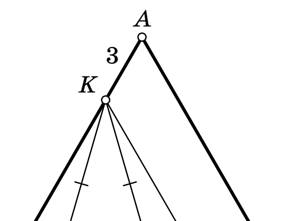
Заметим, что $Е+С$ — это число от 1 до 17, а значит, $20\cdot К$ — число от 73 до 89, которое делится на 20. Тогда $20\cdot К=80$ и $К=4$, а $Е+С=10$.

Цифры Е и С — разные, ни одна из них не равна 4, а также ни одна из них не равна 9 (иначе бы при добавлении 1 к каждой цифре произошел бы переход через десяток, который изменит ровно одну из цифр на месте букв У или К, и итог не будет решением ребуса). Тогда для равенства $Е+С=10$ остается только два варианта: $2+8$ и $3+7$.

Тогда $КЕ\cdot КС=42\cdot 48=2016$ или $КЕ\cdot КС=43\cdot 47=2021$. Но в слове УЧУЙ совпадают первая и третья буква, а значит, подходит только вариант $УЧУЙ=2021$.

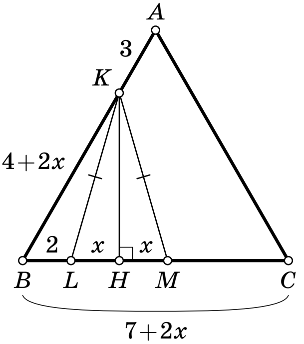
5. *Ответ.* 5.

Первое решение. Отметим на продолжении отрезка LM за точку M такую точку T, что $MT=2$. Углы BLK и TMK равны, так как они смежные с равными углами равнобедренного треугольника KLM. Значит, треугольники BLK и TMK равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда равны их соответствующие углы: $\angle KTM=\angle KBL=60^\circ$.



В треугольнике KBT два угла по 60°, поэтому он равносторонний, и $BK=BT$. Так как треугольник ABC тоже равносторонний и $BA=BC$, то $CT=BC-BT=BA-BK=AK=3$ (и точка T лежит именно на стороне BC, а не на ее продолжении). Тогда $CM=CT+MT=3+2=5$.

Второе решение. Проведем высоту KH равнобедренного треугольника KLM. Она также является его медианой, поэтому $LH = HM$. Обозначим $LH = HM = x$. Треугольник KBH — прямоугольный с углом B, равным 60°, а значит, его гипотенуза KB в 2 раза больше его катета BH. Так как $BH = 2 + x$, то $KB = 2BH = 4 + 2x$, а тогда $BA = BK + KA = 4 + 2x + 3 = 7 + 2x$. Треугольник ABC равносторонний, поэтому $BC = BA = 7 + 2x$. А значит, $MC = BC - BM = (7 + 2x) - (2 + 2x) = 5$.



6. *Ответ.* Не получится.

Решение. Предположим, что друзьям удастся осуществить желаемое. Давайте посчитаем, сколько всего возможных компаний можно составить из пяти человек (и, соответственно, сколько раз переплывет лодка с одного берега на другой). Каждый человек может либо войти, либо не войти в компанию, то есть для каждого есть два варианта, поэтому всего вариантов $2^5 = 32$. В том числе мы посчитали вариант, когда никто не попал в компанию. Однако лодка пустая не плавает, значит, всего компаний $32 - 1 = 31$. Так как это число нечетно, то друзья должны переплыть реку нечетное количество раз, поэтому в итоге лодка окажется на противоположном берегу. Следовательно, хотя бы один из друзей завершит катание на другом берегу, пусть это будет Вася.

Посмотрим, сколько раз он мог переправиться. Каждый из его друзей может либо плыть, либо не плыть с ним, поэтому Вася входит в $2^4 = 16$ различных компаний (в том числе он может плыть и один). Но это число четно, значит, после катания Вася должен вернуться на исходный берег. Полученное противоречие доказывает, что покататься требуемым образом не получится.

1. *Ответ.* Барон не прав.

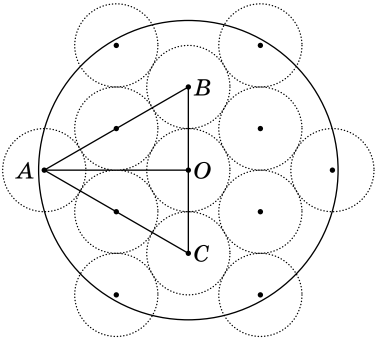
Первое решение. Заметим, что $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2\cdot 100 + 1 = 9801 < 9900$, а $100^2 = 10000 > 9999$. Таким образом, четырехзначных точных квадратов, начинающихся на 99, не существует, поэтому к числу 99 нельзя приписать две цифры так, чтобы получился точный квадрат.

Второе решение. Пусть барон прав. Двузначных чисел 90, поэтому если к каждому приписать две цифры так, чтобы получился точный квадрат, то получится 90 четырехзначных точных квадратов. Но четырехзначных точных квадратов всего 68, так как $31^2 = 961 < 1000$, а $100^2 > 9999$. Противоречие.

Комментарий. Всего существует 25 двузначных чисел, к которым нельзя приписать две цифры так, чтобы получился точный квадрат. Про каждое из них можно провести рассуждение, аналогичное первому решению.

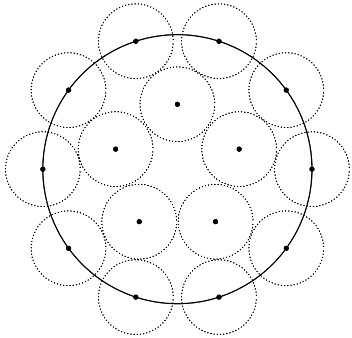
2. *Ответ.* Поместятся.

Решение. Разместим свечки так, как показано на рисунке. Докажем, что отрезок OA меньше радиуса, то есть самые удаленные от центра точки лежат внутри круга. В самом деле, ABC — равносторонний треугольник со стороной 20 см. Тогда его высота $AO = 10\sqrt{3}$ см < 18 см, так как $(10\sqrt{3})^2 = 300 < 324 = 18^2$.



Комментарии. 1. На самом деле $2\cdot OA = 20\sqrt{3}$ см меньше даже 35 см, поэтому такая конструкция поместится на торте диаметром 35 см.

2. Приведем без доказательства несколько более сложную конструкцию, которая позволяет на торте диаметром 36 см поместить 15 свечек (а для 13 свечек при размещении 10 свечек по окружности и трех внутри круга достаточно торта диаметром 33 см).



3. *Первое решение.* Докажем, что если поменять местами любых двух соседних детей, то количество конфет у мальчиков и у девочек не изменится. Так как такими перестановками можно добиться любого порядка детей в очереди, то это и будет означать, что общее количество конфет у мальчиков не зависит от этого порядка.

В самом деле, ясно, что если поменять местами двух девочек или двух мальчиков, то для детей ни до, ни после этой пары ничего изменится, не изменится и общее количество конфет у мальчиков.

Теперь пусть осталось всего k детей, и перед кучей из n конфет стоит пара мальчик и девочка. Если n делится на k, то легко видеть, что они оба возьмут по n/k конфет вне зависимости от порядка. Далее будем считать, что n делится на k с остатком $r>0$. Тогда $n=kq+r$, мальчик возьмет $q+1$ конфету и оставит $(k-1)q+r-1$ конфет, девочка за ним возьмет q конфет. А если бы сначала подошла девочка, то она бы взяла q конфет и оставила бы $(k-1)q+r$, а мальчик за ней взял бы $q+1$ конфету. Таким образом, эта пара берет одно и тоже количество конфет вне зависимости от порядка, а значит, ни для них, ни для детей за ними ничего не изменится, что и требовалось.

Второе решение. Пусть всего в комнате n детей, причем $2021=an+r$, $0\leqslant r<n$. К куче подходит первый ребенок и

делит ее на кучки размером a и кучки размером $a+1$ (общее количество кучек равно n, а кучек размером $a+1$ ровно r), причем все большие кучки лежат правее маленьких.

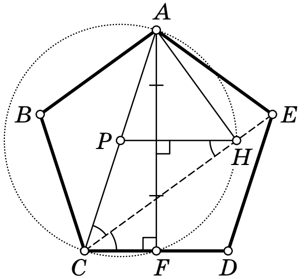
Пусть первый ребенок — мальчик, тогда он берет себе самую правую кучку и уходит. Если же это оказалась девочка, она возьмет себе самую левую кучку и тоже уйдет. Потом к конфетам подойдет следующий ребенок; перед ним лежит $n-1$ кучка из a или $a+1$ конфет.

Если остались кучки обоих видов, то это означает, что неполное частное от деления количества конфет на число детей равно a, и далее процесс продолжается аналогично: мальчики, округляя вверх, берут себе кучки справа, девочки, округляя вниз, — слева.

Если же остались только кучки одного вида, то количество конфет делится на количество детей, и любому ребенку подходит любая кучка, то есть и в этом случае мальчики могут брать кучки справа, а девочки — слева.

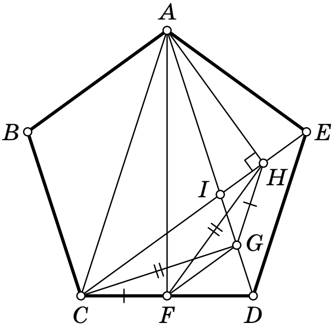
Тогда в итоге мальчики заберут все правые кучки (столько, сколько было мальчиков) независимо от того, в каком порядке дети подходили за конфетами.

4. *Первое решение.* Угол правильного пятиугольника равен 108°, тогда $\angle ECD = \angle CED = \dfrac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$, а $\angle ACD = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Таким образом, CE содержит биссектрису треугольника ACF и, следовательно, пересекает серединный перпендикуляр к стороне AF в точке, лежащей на описанной около этого треугольника окружности. Но $\angle F$ прямой, значит, и $\angle AHC$ прямой, как опирающийся на ту же дугу.



Второе решение. Аналогично первому решению $\angle ACE = \angle ECD = 36^\circ$. Так как $HP \parallel CD$, то по теореме Фалеса $AP = PC$, где P — точка пересечения серединного перпендикуляра к AF с диагональю AC, а углы PHC и ECD равны как внутренние накрест лежащие: $\angle PHC = \angle ECD = 36^\circ$. Следовательно, треугольник PHC равнобедренный и $PH = PC$. Окончательно получаем, что $HP = PA = PC$ и треугольник AHC прямоугольный, так как его медиана равна половине стороны, к которой она проведена.

Третье решение. Переформулируем задачу: пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CE. Тогда достаточно доказать, что полученная таким образом точка H равноудалена от A и F. Пусть диагонали AD и CE пересекаются в точке I. Отметим еще точку G — середину отрезка DI. Заметим, что треугольник AEI равнобедренный ($\angle AEI = \angle AIE = 72^\circ$). Тогда H — середина EI. Четырехугольник $HGFC$ — равнобокая трапеция, так как $GF \parallel IC$ (как средняя линия треугольника IDC), а $HG = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} DC = FC$. $AHGC$ — тоже равнобокая трапеция, потому что $HG \parallel DE \parallel AC$ и $AG = CH$. Окончательно получаем, что $AH = CG = HF$. Что и требовалось доказать.



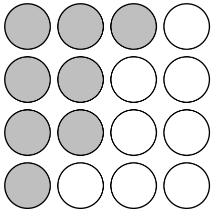
5. *Ответ.* За три взвешивания.

Решение. Отметим, что взвешивание любой группы монет может показать один из трех исходов: 0, 1 или 2 легкие монеты среди взвешенных. Действительно, эти исходы соответствуют показаниям весов в $10k$, $10k-1$ и $10k-2$ граммов, где k — количество монет на весах, а ничего другого при взвешивании k монет весы показать не могут.

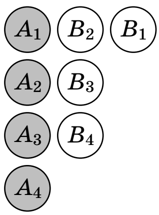
Теперь докажем, что менее чем тремя взвешиваниями обойтись не получится. Всего пар монет, которые могут быть легкими, 24: по 3 пары соседних монет в каждой строчке и в каждом столбце. Так как одно взвешивание дает три разных исхода, то два взвешивания дадут лишь $3^2 = 9$ различных исходов.

Покажем, как определить легкие монеты за три взвешивания.

Первое взвешивание. Разобьем монеты на две группы так, как показано на рисунке, и взвесим одну них. Так как группы симметричны, то возможны два различных случая: легкие монеты в одной группе и легкие монеты в разных группах.



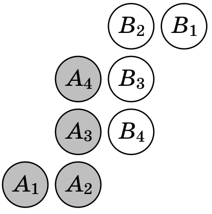
1) Первый случай (легкие монеты в одной группе), второе взвешивание. Оставим на рисунке только те монеты, которые могут оказаться легкими, разобьем их на две группы и пронумеруем. Взвесим одну из групп. Здесь возможны три случая: обе легкие монеты в группе A, обе легкие монеты в группе B, по одной легкой монете в каждой из групп.



Хотя в этом взвешивании группы не симметричны, ситуации с обеими монетами в одной группе разбираются аналогично. Возможные пары легких монет: (X_1, X_2), (X_2, X_3) и (X_3, X_4), где X — группа с легкими монетами. Поэтому третьим взвешиванием взвесим монеты X_1 и X_2. Либо они обе легкие, и тогда мы их нашли, либо среди них одна легкая, и тогда легкие монеты — это X_2 и X_3, либо среди них легких нет, и тогда легкие монеты — X_3 и X_4.

Если легкие монеты в разных группах, то это могут быть «горизонтальные» пары (A_1, B_2), (A_2, B_3) или (A_3, B_4). Тогда третьим взвешиванием взвесим монеты A_1, B_2 и A_2. Если среди них две легкие, то это A_1 и B_2. Если одна, то легкие монеты — это A_2 и B_3, если легких нет — то A_3 и B_4.

2) Второй случай (легкие монеты в разных группах), второе взвешивание. Оставим на рисунке только те монеты, которые могут оказаться легкими, разобьем их на две группы и пронумеруем. Взвесим одну из групп. Так как группы симметричны, то возможны два различных случая: легкие монеты в одной группе и легкие монеты в разных группах.



Ситуация, когда обе легкие монеты в одной группе, разбирается точно так же, как и в третьем взвешивании первого случая, но монеты X_3 и X_4 легкими оказаться не могут.

Если легкие монеты в разных группах, то это либо пара (A_3, B_4), либо пара (A_4, B_3). Чтобы найти легкие монеты, третьим взвешиванием достаточно взвесить одну из этих пар.

Комментарий. Приведем некоторые соображения, которые позволяют построить алгоритм. Одним взвешиванием, так как оно имеет три различных исхода, мы можем определить пару легких из трех подозрительных пар — и в первую очередь нас интересует не общее число монет, а именно общее число пар монет, которые могут быть легкими. Аналогично два взвешивания позволяют определить пару легких не более чем из девяти подозрительных пар. Это означает, что при любом результате первого взвешивания должно остаться не более девяти подозрительных пар монет. В приведенном алгоритме остается как раз 9 пар, если монеты в одной группе, и 6 пар, если в разных.

6. *Решение.* Докажем общую формулу. Пусть в государстве 2^n городов. Тогда министр сможет добиться желаемого не более чем за $2^{n-2}(2^n - n - 1)$ дней.

Лемма. Пусть в государстве $2k$ городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Выберем из них половину с наибольшим числом исходящих дорог. Тогда всего из выбранных городов исходит суммарно не менее k^2 дорог.

Доказательство. Пусть из k выбранных городов исходит менее k^2 дорог, тогда по принципу Дирихле найдется город, из которого исходит не более $k-1$ дороги. Тогда, так как выбраны города с наибольшим числом исходящих дорог, из каждого из оставшихся k городов исходит также не более $k-1$ дороги. Суммарно исходит *менее* $k^2+k(k-1)=$ $=2k^2-k$ дорог, при том, что общее число дорог в точности $\frac{2k(2k-1)}{2}=2k^2-k$. Противоречие, лемма доказана.

Теперь перейдем к доказательству основной формулы. Докажем ее по индукции.

База $n=1$: между двумя городами только одна дорога и она уже и так в одном направлении. Ничего менять не придется.

Шаг индукции. Пусть для 2^n городов утверждение верно. Докажем для 2^{n+1}. Разделим города на две группы по 2^n городов. В первую группу поместим города с наибольшим количеством исходящих дорог. В соответствии с леммой из всех городов этой группы суммарно исходит не менее 2^{2n} дорог.

Из этих дорог $\frac{2^n(2^n-1)}{2}$ — дороги внутри группы, поэтому из первой группы во вторую ведет не менее $2^{n-1}(2^n+1)$ дорог. Тогда из 2^{2n} дорог между первой и второй группами в первую направлено не более $2^{n-1}(2^n-1)$. Не более чем за $2^{n-1}(2^n-1)$ дней министр направит все эти дороги во вторую группу. И еще не более чем за $2\cdot 2^{n-2}(2^n-n-1)$ дней он добьется того, чтобы в каждой группе нельзя было выехать из города и в него вернуться. Тогда всего потребуется не более $2^{n-1}(2^{n+1}-n-2)$ дней.

Так как $32=2^5$, то на осуществление желаемого министру потребуется не более $2^3(2^5-5-1)=208$ дней, что меньше 214 дней, оставшихся до 2022 года.

Комментарий. Если в стране n городов, то оценку для числа $f(n)$ замен можно получить из соотношений

$$f(2n)\leqslant\frac{n(n-1)}{2}+2f(n)$$

(фактически доказано в задаче) и

$$f(2n+1)\leqslant n+f(2n)$$

(очевидно). Жюри неизвестно, является ли эта оценка точной.

9 класс

1. *Ответ.* $ab > a + b$.

Первое решение. Рассмотрим искомое сравнение

$$ab \vee a + b.$$

Умножим его на равенство $a/b = a - b$ (левую часть на левую, правую на правую). При умножении на положительное число (а a/b положительно) неравенство сохранится. Получаем

$$a^2 \vee a^2 - b^2.$$

Отсюда ясно, что левая часть больше правой.

Второе решение. Рассмотрим искомое сравнение

$$ab \vee a + b.$$

Прибавим к нему равенство $a/b = a - b$, сведя к сравнению

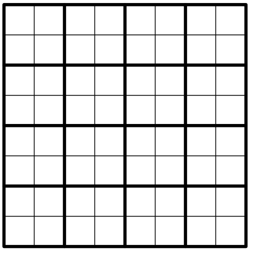
$$ab + a/b \vee 2a.$$

Перенеся все в левую часть, можно заметить, что оно равносильно $\frac{a}{b}(b-1)^2 \vee 0$. Чтобы убедиться в том, что левая часть больше, осталось показать, что $b \neq 1$.

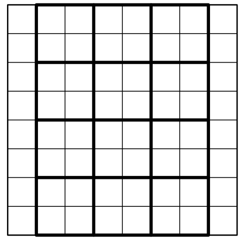
Действительно, предположим, что $b = 1$. Подстановка в исходное равенство дает $a - 1 = a$, противоречие.

Третье решение. Домножив равенство $a - b = a/b$ на b, получим $ab - b^2 = a$, откуда $ab = a + b^2$. Тогда достаточно сравнить $a + b^2$ и $a + b$, то есть сравнить b с 1. Предположим, что $b \leqslant 1$. Тогда $a/b \geqslant a > a - b$, противоречие. Значит, $b > 1$, откуда $ab = a + b^2 > a + b$.

2. *Первое решение.* Предположим, что вырезать такие два квадрата Арсению не удастся. Это означает, что любые два квадрата, совпадающие по раскраске, пересекаются хотя бы по одной клетке.



Разобьем наш квадрат на 16 квадратов 2×2, как отмечено на рисунке; все они должны быть раскрашены по-разному. Так как всего разных способов раскрасить квадрат 2×2 в два цвета ровно 16, то все раскраски среди них присутствуют по одному разу.



Теперь выделим 12 квадратов-«потомков» 2×2, отмеченных на втором рисунке, каждый из которых пересекается с двумя квадратами-«родителями» первого разбиения, состыкованными горизонтально. Заметим, что каждый «потомок» совпадает по раскраске с одним из «родителей» (так как он должен совпасть с одним из квадратов первого разбиения и он не может совпасть с теми, с которыми он не пересекается).

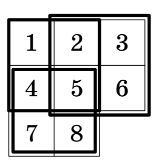
Но если два квадрата, смещенные друг относительно друга на одну клетку по горизонтали, совпадают по раскраске, то их верхние клетки должны быть одного цвета и их нижние клетки тоже одного цвета. Это дает всего четыре варианта раскраски для таких квадратов-«потомков». Но всего их 12, значит, какие-то два из них совпадут по раскраске; при этом они все попарно не пересекаются. Противоречие.

Второе решение. Как и в предыдущем решении, предположим, что вырезать такие два квадрата Арсению не удалось.

Рассмотрим все 49 квадратов 2×2. Так как всего возможных раскрасок таких квадратов 16, то по принципу Дирихле некоторые четверки квадратов совпадают по раскраске.

Заметим, что более чем 4 квадрата по раскраске совпасть не могут. Действительно, в этом случае либо их вертикальные координаты, либо горизонтальные принимают хотя бы три различных значения, то есть у двух квадратов одна из координат отличается хотя бы на 2 (для определенности можно рассматривать координаты центров квадратов). Такие квадраты пересекаться не могут.

Аналогичные соображения позволяют заметить, что три или четыре квадрата с одинаковой раскраской обязательно должны иметь общую клетку.



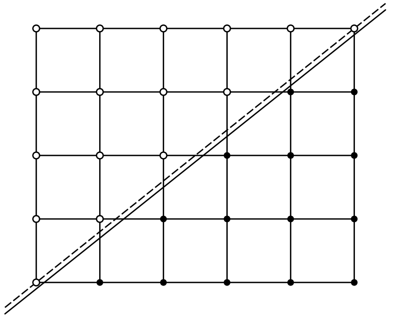
Рассмотрим некоторую тройку квадратов с одинаковой раскраской. Без ограничения общности будем считать, что они расположены так, как на рисунке. Тогда из совпадения раскрасок следует, что клетки 1, 2, 4 имеют одинаковый цвет; аналогично с тройками клеток $\{2, 3, 5\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{5, 6, 8\}$. Получается, что у всех этих клеток один и тот же цвет.

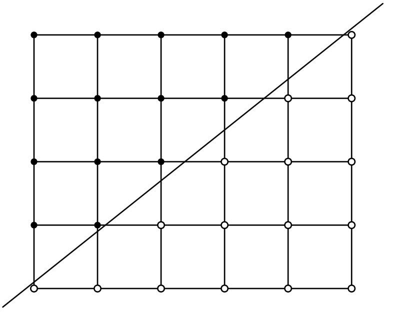
Ясно, что для четырех квадратов с одинаковой раскраской вывод будет аналогичен. Это означает, что в тройке или четверке квадратов с совпадающей раскраской они все либо целиком первого цвета, либо целиком второго. Значит, все остальные 14 способов раскрасить квадрат 2×2 могут быть представлены не более чем 2 экземплярами.

Тогда всего квадратов 2×2 не более $2 \cdot 4 + 14 \cdot 2 = 36$. Но их 49. Противоречие.

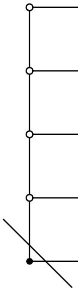
3. *Ответ*. Да.

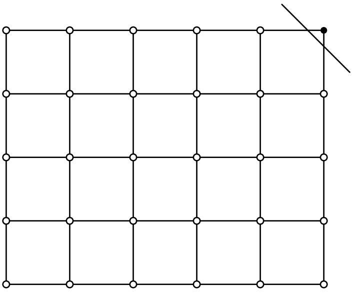
Решение. Проведем вспомогательную прямую через две лампочки в противоположных углах прямоугольника. Тогда ни одна другая лампочка на эту прямую не попадет. Теперь проведем первую прямую параллельно вспомогательной, чуть ниже, чтобы эти две лампочки оказались над ней, а все остальные лампочки остались с той же стороны, что и до этого; зажжем все лампочки ниже этой прямой, как на первом рисунке (зажигаемые лампочки обозначены черными точками). Вторую прямую аналогично проведем параллельно вспомогательной, но чуть выше, чтобы две угловые лампочки оказались под ней; зажжем все лампочки выше этой прямой, как на втором рисунке.





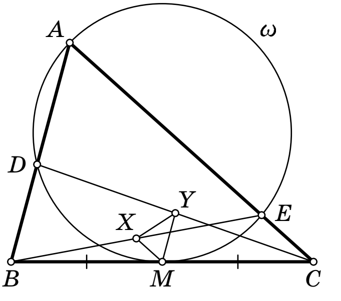
Незажженными остались две угловые лампочки. Их можно зажечь за два хода, просто отсекая прямой от остальных.





4. *Решение.* Заметим, что MX и MY — средние линии треугольников BCE и BCD (см. рисунок), поэтому $\angle XMB = \angle C$ и $\angle CMY = \angle B$. Тогда

$$\angle YMX = 180^\circ - \angle XMB - \angle CMY = \angle A.$$



По свойству касательной и секущей к окружности имеем $BM^2 = BD \cdot BA$, откуда

$$MY = \frac{BD}{2} = \frac{BM^2}{2AB}.$$

Аналогично получаем

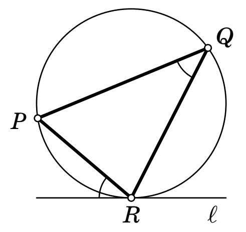
$$MX = \frac{CM^2}{2AC}.$$

Деля одно на другое и пользуясь тем, что $BM = CM$, находим

$$\frac{MY}{MX} = \frac{BM^2}{CM^2} \cdot \frac{2AC}{2AB} = \frac{AC}{AB}.$$

Получаем, что треугольники BAC и XMY подобны по углу и отношению прилежащих сторон.

Лемма (обратная теорема об угле между касательной и хордой). Пусть в треугольнике PQR угол Q равен углу между отрезком PR и прямой ℓ, проходящей через R, как на рисунке. Тогда прямая ℓ касается описанной окружности треугольника PQR.



Доказательство леммы. Проведем прямую ℓ', касающуюся окружности в точке R. Тогда по теореме об угле между хордой и касательной угол между прямой ℓ' и отрезком PR тоже равен углу Q треугольника. Отсюда следует, что ℓ и ℓ' совпадают. Лемма доказана.

Тогда $\angle XYM = \angle ACB = \angle XMB$. Получается, что в описанной окружности треугольника XMY угол, опирающийся на хорду XM, равен углу между хордой XM и прямой BC. Используя лемму, заключаем, что прямая BC касается окружности, описанной вокруг треугольника XMY. Это и означает, что рассматриваемые окружности касаются.

5. *Ответ*. Нет.

Решение. Докажем, что при $N = 3^{100}$ выиграет кот Матроскин. Для этого необходимо, чтобы на последнем шаге дяди Федора все оставшиеся 100 бутербродов оказались без колбасы (иначе он сможет выбрать последовательность действий так, чтобы закончить на бутерброде с колбасой).

Пронумеруем бутерброды по порядку. Стратегию кота Матроскина разделим на несколько стадий. Сначала покажем, что он может действовать так, чтобы к моменту, когда останется треть от исходного количества бутербродов, все бутерброды, номер которых дает остаток 1 при делении на 100, были без колбасы.

Отметим в каждой сотне бутербродов тот бутерброд, номер которого дает остаток 1 при делении на 100. Пусть за первые 3^{99} ходов кот Матроскин стянет колбасу с каждого отмеченного бутерброда среди центральной трети бутербродов. Так как дядя Федор за это время съедает $3^{99} \cdot 100$ бутербродов, никакие бутерброды среди центральной трети съедены не будут. Следующие 3^{99} ходов кот Матроскин будет забирать колбасу с произвольного отмеченного бутерброда, а если отмеченных бутербродов с колбасой не останется —

ничего не делать. Так как за один ход дядя Федор съедает не более одного отмеченного бутерброда (см. замечание 1), то еще через 3^{99} ходов все оставшиеся отмеченные бутерброды будут без колбасы.

На следующей стадии своей стратегии кот Матроскин аналогичным образом добьется того, чтобы все бутерброды, номер которых дает остаток 2 при делении на 100, оказались без колбасы; при этом количество бутербродов снова уменьшится в 3 раза. На каждой следующей стадии он будет освобождать от колбасы очередной остаток от деления на 100; через сто стадий, когда останется ровно 100 бутербродов, они все будут без колбасы.

Комментарии. 1. Каждым ходом дядя Федор будет съедать бутерброды с номерами, дающими различные остатки от деления на 100, даже если съедает их с двух сторон. Это можно понять, заметив, что до его хода количества бутербродов для каждого остатка одинаковы, так как общее их количество кратно 100; и после его хода ситуация такая же.

2. Можно уточнить стратегию кота Матроскина, показав, что при $N = 2^{100}$ он тоже выигрывает; на каждой стадии количество бутербродов при этом будет уменьшаться в два раза. Для этого колбасу ему нужно стягивать только с тех бутербродов (с номерами, дающими данный остаток от деления на 100), до которых дядя Федор на данной стадии гарантированно не доберется. Нетрудно понять, что такой бутерброд действительно всегда будет находиться.

А вот при $N = 2^{100} - 1$ уже выигрывает дядя Федор. Действительно, первыми $2^{99} - 1$ ходами он съест любые $2^{99} - 1$ сотен бутербродов; за это время усилиями соперника появится не более $2^{99} - 1$ бутербродов без колбасы. Далее, если перед дядей Федором лежит 2^k сотен бутербродов, из которых не более $(100 - k) \cdot 2^k - 1$ без колбасы, то при $k > 0$ он может съесть ту половину ряда (правую или левую), в которой бутербродов без колбасы больше. Тогда их в ряду останется не более $(100 - k) \cdot 2^{k-1} - 1$ плюс, благодаря коту Матроскину, не более 2^{k-1} новых — всего не более $(100 - k + 1)\dot{2}^{k-1} - 1$. Продолжая так и далее, при $k = 0$ дядя Федор получит сто бутербродов, из которых не более 99 будут без колбасы.

6. *Первое решение.* Пусть в момент времени k лягушка находится в точке a_k, $a_0 = a_N = 0$. Продолжим последовательность (a_i) периодически по правилу $a_{i+N} = a_i$. Обозначим $A=p+q$. Заметим, что $-q\equiv p \bmod A$, поэтому $a_n\equiv$ $\equiv np \bmod A$ для любого n.

Так как p и q взаимно простые, то p и A взаимно простые. Докажем, что найдется такое целое s, что $sp\equiv d \bmod A$.

В самом деле, числа 0, p, $2p$, ..., $(A-1)p$ дают различные остатки при делении на A (иначе для некоторых $0\leqslant i<j<A$ получаем, что $(j-i)p\equiv 0 \bmod A$, чего не может быть, так как $j-i$ не делится на A, а p взаимно просто с A). А значит, среди этих остатков есть и d.

Обозначим $r_k=a_{s+k}-a_k$. Легко видеть, что все r_k дают остаток d от деления на A.

Если a_k — самая левая из точек, посещенных лягушкой, то $r_k>0$. Если a_k — самая правая точка, то $r_k<0$. Значит, при некотором i в последовательности r_i происходит перемена знака, $r_i<0$ и $r_{i+1}>0$. Тогда $r_{i+1}<A$, потому что

$$r_{i+1}-r_i=(a_{i+s+1}-a_{i+s})-(a_{i+1}-a_i)\leqslant p-(-q)=A.$$

А так как $r_{i+1}\equiv d \bmod A$, то $r_{i+1}=d$, что и требовалось.

Второе решение. Предположим, что для какого-то $d<$ $<p+q$ такие точки не найдутся.

Лемма. Найдутся такие целые a и b, что $d=ap-bq$.

Доказательство леммы. Рассмотрим числа $ap-d$ при $a=2, 3, \ldots, q+1$. Если хотя бы одно из них делится на q, то есть имеет вид bq, то мы получаем $ap-d=bq$, что и требуется. В ином случае какие-то два их этих чисел дают одинаковый остаток от деления на q (так как их всего ровно q и остатка 0 там нет). Тогда $(a_1p-d)-(a_2p-d)=qk$, откуда $p(a_1-a_2)=qk$. Тогда, так как p и q взаимно просты, a_1-a_2 кратно q; но в диапазоне от 2 до $q+1$ все числа отличаются менее чем на q, то есть этот случай невозможен. Лемма доказана.

Мы можем увеличить a на q, а b на p — соотношение $d=ap-bq$ при этом не нарушится. Будем делать так до тех пор, пока не добьемся $a, b>1$.

Пусть лягушка вернулась в 0, сделав n шагов вправо и m шагов влево. Тогда $np=mq$, а значит, $\frac{n}{m}=\frac{q}{p}$. Будем считать, что лягушка пропрыгивает эту последовательность $m+n$ ходов бесконечное число раз по циклу; ясно, что точки она при этом будет посещать те же.

Возьмем $k > \frac{a+b}{m+n}$. Расставим по кругу буквы, описывающие $(m+n)k$ подряд идущих ходов лягушки. Будем выписывать их по часовой стрелке, по одной букве на ход; если это ход вправо, напишем букву «П», а если ход влево — «Л». Всего мы расставили по кругу nk букв «П» и mk букв «Л».

Пусть мы найдем отрезок из $a+b$ подряд идущих букв, среди которых ровно a раз встречается «П» (и ровно b раз — «Л»). Тогда эти буквы соответствуют $a+b$ последовательным ходам, за которые лягушка сдвинулась ровно на $ap-bq=d$. Противоречие. Значит, ни на каком таком отрезке буква «П» не может встречаться a раз.

Рассмотрим какой-то отрезок из $a+b$ подряд идущих букв. Пусть буква «П» встречается на нем не более чем $a-1$ раз. Посмотрим на отрезок из $a+b$ букв, отличающийся от предыдущего сдвигом на 1 по часовой стрелке, то есть получившийся выкидыванием одной буквы и добавлением другой. Заметим, что на новом отрезке буква «П» встречается не более чем $a-1+1=a$ раз, а так как ровно a быть не может, то тоже не более чем $a-1$ раз. Повторив эти рассуждения, получим, что на любом отрезке такой длины буква «П» встречается не более чем $a-1$ раз. Мы можем рассмотреть среднее количество букв «П» во всех наборах $a+b$ подряд идущих букв и сделать вывод, что доля букв «П» во всем круге не более $\frac{a-1}{a+b}$. Значит, отношение количества букв «П» к количеству букв «Л» во всем круге не превосходит $\frac{a-1}{b+1}$.

Аналогично, если на каком-то отрезке из $a+b$ подряд идущих букв буква «П» встречается не менее чем $a+1$ раз, то отношение количества букв «П» во всем круге к количеству букв «Л» не менее $\frac{a+1}{b-1}$. Следовательно,

$$\text{либо} \quad \frac{nk}{mk} \leqslant \frac{a-1}{b+1}, \quad \text{либо} \quad \frac{nk}{mk} \geqslant \frac{a+1}{b-1}.$$

При этом $\frac{nk}{mk} = \frac{n}{m} = \frac{q}{p}$. Чтобы прийти к противоречию, нам достаточно показать, что

$$\frac{a-1}{b+1} < \frac{q}{p} < \frac{a+1}{b-1}.$$

Левое неравенство эквивалентно $(a-1)p<(b+1)q$, что следует из $ap-bq=d<p+q$. Правое неравенство аналогично эквивалентно $(a+1)p>(b-1)q$, что следует из $ap-bq=$ $=d>-p-q$.

Мы пришли к противоречию, значит, точки на расстоянии d найдутся.

Третье решение. Как и в предыдущем решении, будем считать, что лягушка прыгает в бесконечном цикле. Также воспользуемся представлением $d=ap-bq$ для положительных a и b, сумму $a+b$ обозначив за r.

За δ_i обозначим разность между положениями лягушки в момент $i+r$ (то есть через $i+r$ шагов после начала) и в момент i. Так как их разделяет r шагов, то

$$\delta_i = xp-(r-x)q = ap+(x-a)p-bq-(r-x-b)q = \\ = d+(x-a)p+(x-(r-b))q = d+(x-a)(p+q).$$

Если δ_i равно d, то мы нашли искомые позиции. Предположим противное: пусть $\delta_i \neq d$ для всех i. Тогда все числа δ_i имеют вид $d+(p+q)k$ для целых $k\neq 0$.

Заметим, что разность между δ_i и δ_{i+1} определяется тем, какими были $(i+1)$-й и $(i+r+1)$-й шаги; разобрав случаи, нетрудно убедиться, что она равна $-(p+q)$, 0 или $p+q$. Это означает, что числа δ_i либо все меньше 0 (имеют вид $d-(p+q)k$ для натурального k), либо все больше 0 (имеют вид $d+(p+q)k$ для натурального k).

Тогда рассмотрим позицию лягушки через rT шагов, где T — количество шагов в ее цикле. С одной стороны, она равна сумме $\delta_0+\delta_r+\delta_{2r}+\ldots+\delta_{r(T-1)}$, которая по доказанному выше должна быть либо отрицательной, либо положительной. С другой стороны, через rT шагов лягушка вернется на позицию 0. Противоречие.

10 класс

1. *Ответ*. 1609.

Решение. Предпоследняя цифра числа равна 0, так как число без последней цифры делится на 20. Значит, число хотя бы четырехзначное. Заметим, что число, оставшееся после стирания последней цифры, не может равняться 100 по условию. Также это число не может равняться 120 и

140, так как числа вида $\overline{20a}$ и $\overline{40a}$ не делятся на 21. Для 160 существует единственный пример: 1609.

2. *Первое решение*. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD, где $AD=AB+CD=2AB$. В треугольнике ABD

$$\sin \angle ADB = \frac{AH}{AD} \leqslant \frac{AB}{AD} = \frac{1}{2},$$

где AD — высота из точки A. Тем самым угол $\angle ADB \leqslant 30^\circ$, аналогично $\angle CAD \leqslant 30^\circ$. В треугольнике AOD, где O — точка пересечения диагоналей, $\angle AOD \geqslant 120^\circ$, а значит, меньший угол не больше чем 60°, как смежный.

Второе решение. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Ее боковая сторона вдвое меньше основания и, значит, не длиннее радиуса окружности. Поэтому боковые стороны стягивают дуги не больше чем 60°. А угол между диагоналями равен полусумме этих дуг.

3. *Ответ*. Да.

Решение. Заметим, для каждого действия есть обратное ему. Поэтому если мы из ситуации A, действуя по правилам, получили ситуацию B, то из ситуации B можем получить ситуацию A, действуя по правилам.

Покажем по индукции, что если есть запас в n камней, то, действуя по вышеуказанным правилам, можно положить камень в любую клетку от 1 до 2^n-1.

База индукции: $n=1$. Очевидно.

Переход индукции. Допустим, мы доказали, что при помощи запаса в n камней можно положить камень во все клетки до (2^n-1)-й. Пусть теперь есть n черных камней и один красный камень. Будем действовать следующим образом:

(1) Не вынимая красный камень из мешка, добьемся того, чтобы в (2^n-1)-й клетке оказался черный камень. Это можно сделать по предположению индукции.

(2) Положим красный камень в 2^n-ю клетку.

(3) Проведем операции как в пункте (1), но противоположные и в обратном порядке. Понятно, что красный камень не помешает это сделать. В конце окажется, что все черные камни снова лежат в мешке, а на полоске ровно один камень — красный камень в клетке 2^n.

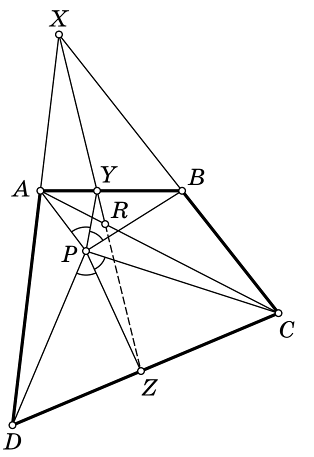
Договоримся, что далее мы красный камень убирать не будем.

(4) Клетки с номерами от 2^n+1 до $2^{n+1}-1$ образуют полоску длиной 2^n-1. К ней применимо предположение индукции для n камней, так как красный камень позволяет совершать операции с самой левой клеткой этой полоски. Поэтому можно положить камень в последнюю клетку.

Таким образом, имея запас в 10 камней, можно положить камень во все клетки с номерами от 1 до $1023=2^{10}-1$.

Комментарий. На самом деле достаточно полоски длиной 1000. Действительно, заметим, что среди клеток с номерами от 1000 до 1023 самый первый камень будет положен в клетку с номером 1000. То есть, чтобы положить камень в 1000-ю клетку, клетки с номерами от 1001 до 1023 использовать не обязательно, а значит, при запасе в 10 камней можно положить камень в последнюю клетку полоски длиной 1000.

4. *Первое решение.* Рассмотрим $\triangle PBC$ и внешнюю биссектрису XP угла BPC, $\triangle APB$ и биссектрису PY угла APB, $\triangle PCD$ и биссектрису PZ угла DPC, $\triangle APD$ и внешнюю биссектрису XP угла APD. Из свойства биссектрисы



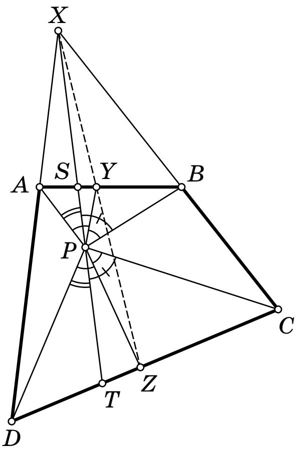
$$\frac{BX}{XC}=\frac{PB}{PC},\quad \frac{AY}{YB}=\frac{PA}{PB},$$
$$\frac{PD}{PC}=\frac{DZ}{ZC},\quad \frac{PA}{PD}=\frac{AX}{XD}.$$

Пусть прямая XY пересекает отрезок AC в точке R (см. рисунок). Используя теорему Менелая для треугольника ABC и прямой XYR, получаем:

$$1=\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AY}{YB}=\frac{PB}{PC}\cdot\frac{CR}{RA}\cdot\frac{PA}{PB}=\frac{PD}{PC}\cdot\frac{CR}{RA}\cdot\frac{PA}{PD}=\frac{DZ}{ZC}\cdot\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AX}{XD}.$$

Применяя теорему Менелая для треугольника ACD, получаем, что точки Z, R, X лежат на одной прямой. Остается вспомнить, что точка Y тоже лежит на этой прямой.

Второе решение. Пусть прямая XP пересекает AB и CD в точках S и T соответственно (см. рисунок). По условию $\angle DPT = \angle APS$, $\angle TPC = \angle SPB$, $\angle DPZ = \angle ZPC$, $\angle APY = \angle YPB$. Запишем равенства двойных отношений[1]:



$$[XD, XT, XZ, XC] = [D, T, Z, C] = [PD, PT, PZ, PC] = [PA, PS, PY, PB] = [A, S, Y, B] = [XA, XS, XY, XB] = [XD, XT, XY, XC].$$

Значит, прямые XZ и XY совпадают, что и требовалось.

5. См. решение задачи 6 для 9 класса.

6. *Решение*. Пусть t — больший корень многочлена $x^2 - 10x + 1$, тогда $t + \frac{1}{t} = 10$. Докажем по индукции, что число $t^n + \frac{1}{t^n}$ целое при любом целом неотрицательном n. Действительно, это верно при $n = 0$, 1. Кроме того,

$$t^{n+1} + \frac{1}{t^{n+1}} = \left(t^n + \frac{1}{t^n}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(t^{n-1} + \frac{1}{t^{n-1}}\right),$$

что позволяет проделать шаг индукции.

Положим $A = t^2$, тогда $A^n + \frac{1}{A^n} = \left(t^n + \frac{1}{t^n}\right)^2 - 2$ и $\frac{1}{A^n} < 1$, значит, $A^n + \frac{1}{A^n}$ и есть верхняя целая часть A^n, а ближайший к ней квадрат целого числа равен $\left(t^n + \frac{1}{t^n}\right)^2$.

Комментарий. Несложно видеть, что можно взять в качестве t любое число, являющееся бо́льшим корнем многочлена вида $x^2 - nx + 1 = 0$, где n — натуральное число, не меньшее 3. Действительно, как и в решении выше, сумма $t^n + \frac{1}{t^n}$ оказывается целой, откуда для $A = t^2$ следует утверждение задачи.

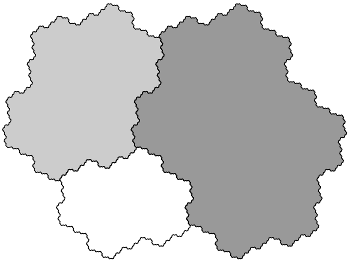
---

[1] См., например, *А. А. Заславский*. Геометрические преобразования. М.: МЦНМО, 2004; Элементы математики в задачах. Через олимпиады и кружки — к профессии. М.: МЦНМО, 2018.

В этом решении мы увидели, что для взятых нами чисел t расстояние от степени t^n до ближайшего целого стремится к нулю с ростом n. На самом деле чисел, степени которых становятся все ближе и ближе к целым числам, больше (но про остальные нельзя сказать, что они подходят для решения данной задачи!).

А именно, пусть $P(x)$ — приведенный многочлен с целыми коэффициентами, у которого все корни (в том числе комплексные), кроме одного, по модулю меньше 1. Тогда этот корень x_1 вещественный, и расстояние от x_1^n до ближайшего целого числа стремится к 0 с ростом n. Это следует из того, что сумма n-х степеней *всех* корней многочлена P целочисленно выражается через его коэффициенты и потому является целой. А степени всех остальных корней стремятся к 0 — как раз потому, что они по модулю меньше 1. Это рассуждение можно прочитать в статье А. Егорова в «Кванте»[1]; см. также проект «Дробные части степеней» на Летней конференции Турнира городов-2000.

Такие числа — корни приведенного многочлена с целыми коэффициентами, у которого все остальные корни по модулю меньше 1, — называются *числами Пизо* или *числами Пизо — Виджаярагхавана*. Они представляют интерес в связи с задачами диофантовой аппроксимации и изучались в работах Туэ, Харди, Пизо[2]. *Фрактал Рози* (см. рис.) связан с числом Пизо — корнем кубического уравнения $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ (и с соответствующими подстановочными последовательностями)[3]. Свое название эти числа получили после публикации[4] Шарля Пизо, который в своей диссертации открыл много замечательных свойств этих чисел.



[1] *А. Егоров*. Числа Пизо // «Квант», № 5 и 6, 2005.

[2] См., например, *Дж. В. С. Касселс*. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961, глава VIII.

[3] Об этом можно прочитать в статьях: *G. Rauzy*. Nombres algébriques et substitutions // Bulletin de la S. M. F., Tome 110 (1982), p. 147–178; *В. Клепцын*. Слова на ленте // «Квантик», № 6, 2020.

[4] *Charles Pisot*. La répartition modulo un et les nombres algébriques. Thèses de l’entre-deux-guerres, no. 203 (1938).

1. См. решение задачи 1 для 10 класса.

2. *Решение.* Пусть такая функция существует. Тогда, подставляя $\pi - x$ вместо x в данное равенство, получаем

$$2f(-\cos x) = f(\sin x) + \sin x.$$

Значит, $f(-\cos x) = f(\cos x)$ при всех x, поэтому $f(-t) = f(t)$ при всех $t \in [-1; 1]$, то есть функция f четная.

С другой стороны, подставляя в исходное равенство $-x$ вместо x, получим

$$2f(\cos x) = f(-\sin x) - \sin x,$$

а поскольку f четная, то $f(-\sin x) = f(\sin x)$, поэтому

$$2f(\cos x) = f(\sin x) - \sin x.$$

Вычитая это равенство из исходного, получаем $\sin x = 0$ при всех x. Противоречие.

Комментарий. Отметим, что если равенство имеет вид

$$2f(\cos x) = f(\sin x) + |\sin x|,$$

то удовлетворяющая ему при всех x функция существует, и найти ее можно следующим образом. Подставляя $\pi/2 - x$ вместо x, получаем

$$2f(\sin x) = f(\cos x) + |\cos x| = \frac{1}{2}(f(\sin x) + |\sin x|) + |\cos x|,$$

откуда находим

$$f(\sin x) = \frac{1}{3}|\sin x| + \frac{2}{3}|\cos x| = \frac{1}{3}|\sin x| + \frac{2}{3}\sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Таким образом, $f(x) = \frac{1}{3}|x| + \frac{2}{3}\sqrt{1 - x^2}$. Легко убедиться, что эта функция удовлетворяет исходному равенству при всех действительных x.

3. См. решение задачи 4 для 9 класса.

4. *Решение.* Представим описанную в условии сеть дорог в виде графа, вершинами которого являются города, развилки и перекрестки, а ребрами — дороги. Покажем, что этот граф является деревом, то есть связным графом без циклов. Связность следует из того, что из любого города можно проехать в любой другой, а любая развилка или перекресток должны быть соединены с каким-либо городом. Допустим, что в нашем графе есть цикл. Он не содержит двух и более вершин-городов, так как в этом случае, двигаясь в противоположных направлениях по циклу, мы могли бы получить два различных пути из одного города в другой. Далее, пусть между некоторыми городами A и B существует путь, содержащий какую-то вершину цикла. Он обязательно найдется, так как иначе эта вершина не могла бы быть в нашей сети. Но тогда, добавляя к этому пути «кольцо» вдоль цикла, мы получим еще один путь между A и B. Значит, циклов в нашем графе быть не может и это действительно дерево.

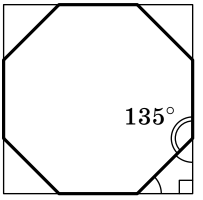
По условию задачи все концевые вершины дерева — города. Назовем эти города концевыми. Назовем также концевой город B следующим за концевым городом A, если по пути из A в B на каждой развилке выбирается самая правая дорога. Выберем какой-нибудь концевой город A_1 и измерим расстояние между ним и следующим за ним концевым городом A_2. Потом измерим расстояние между A_2 и следующим за ним концевым городом A_3 и так далее. После не более чем 100 таких измерений мы вернемся в исходный город A_1.

Покажем, что при этом каждая дорога нашей сети будет пройдена ровно два раза в противоположных направлениях. Рассмотрим произвольную дорогу. При удалении из дерева любого ребра оно распадается на две компоненты связности K_1 и K_2, причем каждая из них содержит города. Пусть изначально мы находились в K_1. Поскольку необходимо обойти все города сети, мы должны пройти по этой дороге два раза: первый раз — когда движемся из K_1 в K_2, а второй — когда возвращаемся обратно. Процедура обхода устроена таким образом, что мы посетим все вершины компоненты K_2 до того, как покинем ее, поэтому больше проходить по дороге из K_1 в K_2 не потребуется.

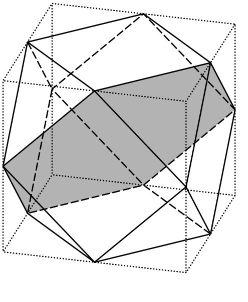
Наконец, сложив измеренные величины и разделив сумму пополам, мы получим длину всей сети.

5. *Ответ*. 8.

Решение. Пусть ребро исходного куба, из которого получился кубооктаэдр, равно 1. Рассмотрим сечения кубооктаэдра плоскостью, параллельной основанию куба, на расстоянии $0 < h < \frac{1}{2}$ от основания. В сечении будут получаться восьмиугольники, все углы которых равны 135°. Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть точки пересечения плоскости сечения с ребрами куба (см. рисунок). Найдем значение h, при котором соседние стороны получающегося в сечении восьмиугольника равны, тогда он окажется правильным. Длина x стороны, которая лежит в грани куба, находится из пропорции $\frac{x}{1} = \frac{h}{1/2} = 2h$. Другая сторона — это гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника, длина которой равна $\frac{\sqrt{2}}{2} - h\sqrt{2}$. Поэтому достаточно потребовать, чтобы выполнялось равенство $2h = \frac{\sqrt{2}}{2} - h\sqrt{2}$, то есть $h = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} < \frac{1}{2}$. Итак, правильный восьмиугольник в сечении получиться может.



Предположим, что в сечении кубооктаэдра некоторой плоскостью α получился правильный n-угольник и $n > 8$. Тогда вершины этого n-угольника должны лежать на ребрах кубооктаэдра, причем одному ребру не может принадлежать более двух вершин n-угольника. Рассмотрим сечение исходного куба, которое является правильным шестиугольником (на рисунке закрашено серым), а также сечения, которые получаются из данного поворотом на 90°, 180° и 270° относительно вертикальной оси куба. Заметим, что объединение сторон этих четырех правильных шестиугольников есть объединение всех ребер кубооктаэдра. Покажем, что на сторонах какого-то из четырех выбранных правильных шестиугольников лежит хотя бы 3 вершины n-угольника. Действительно, если на



сторонах каждого такого шестиугольника лежит не более двух вершин, то всего вершин будет не более восьми. Следовательно, плоскость сечения n-угольника совпадает с плоскостью этого шестиугольника и в сечении кубооктаэдра получается шестиугольник. Получаем противоречие.

6. См. решение задачи 6 для 10 класса.

11 класс, второй день

1. *Решение*. Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ — корни многочлена $P(x)$. По условию $x_3 = x_1 + x_2$. Заметим, что $x_1 > 0$ (а значит, все корни положительны), так как иначе $x_3 \leqslant x_2$, что противоречит максимальности корня x_3. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пользуясь формулами Виета для коэффициентов a, b, c, получаем

$$\begin{aligned} c - ab &= -x_1x_2x_3 + (x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = \\ &= -x_1x_2(x_1+x_2) + 2(x_1+x_2)(x_1x_2+(x_1+x_2)^2) = \\ &= (x_1+x_2)(x_1x_2+2(x_1+x_2)^2) > 0, \end{aligned}$$

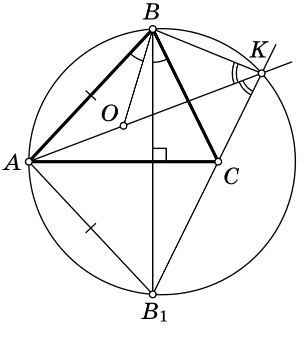
откуда и следует требуемое неравенство.

Второй способ. Заметим, что $-a = x_1+x_2+x_3 = 2x_3$. Кроме того,

$$c - ab = P(-a) = P(2x_3) > 0,$$

так как многочлен $P(x)$ положителен при $x > x_3$.

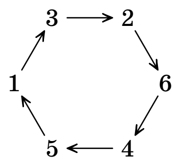
2. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, следовательно, $\angle AOB = 2\angle C$. Треугольник AOB равнобедренный, поэтому $\angle BAO = \dfrac{180^\circ - \angle AOB}{2} = 90^\circ - \angle C$. Точки B и B_1 симметричны относительно прямой AC, откуда $\angle BB_1C = 90^\circ - \angle C$. Следовательно, четырехугольник $ABKB_1$ вписанный (см. рис.). Дуги BA и AB_1 равны в силу симметрии, поэтому $\angle BKA = \angle AKB_1$. Значит, луч KA является биссектрисой угла BKB_1, что и требовалось доказать.



3. *Ответ*. 13 264 513.

Решение. Пусть наименьшее подходящее число имеет вид $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$. Из условия следует, что среди его цифр нет 0 и 7. Если в числе есть цифры 8 или 9, то их можно заменить на 1 или 2 соответственно и получить меньшее число с тем же свойством. Таким образом, искомое число состоит из цифр от 1 до 6.

Рассмотрим соседние цифры a_k и a_{k+1}. По условию числа с замененными семеркой цифрами $\overline{a_1a_2\ldots 7a_{k+1}\ldots a_n}$ и $\overline{a_1a_2\ldots a_k7\ldots a_n}$ делятся на 7, следовательно, их разность также кратна 7, то есть $10a_k \equiv a_{k+1} \pmod 7$ для любого k. Значит, запись числа может быть устроена только следующим образом: за 1 следует 3, за 3 следует 2 (поскольку цифры 9 в числе нет) и так далее (см. рисунок).



По условию исходное число, у которого вместо последней цифры стоит 7, делится на 7. Следовательно, исходное число без последней цифры $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}}$ делится на 7. Используя несколько раз сравнение $10a_k \equiv a_{k+1} \pmod 7$, получаем:

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}} = a_1 10^{n-2} + a_2 10^{n-3} + a_3 10^{n-4} + \ldots + a_{n-1} \equiv$$
$$\equiv 10a_1 \cdot 10^{n-3} + a_2 10^{n-3} + a_3 10^{n-4} + \ldots + a_{n-1} \equiv$$
$$\equiv 2a_2 10^{n-3} + a_3 10^{n-4} \ldots + a_{n-1} \equiv \ldots \equiv (n-1)a_{n-1} \pmod 7.$$

Поскольку a_{n-1} не делится на 7, заключаем, что $n-1$ делится на 7, поэтому наименьшее возможное n равно 8. Таким образом, наименьшее возможное число состоит не менее чем из восьми знаков. Остается заметить, что число 13 264 513 удовлетворяет условию задачи, а поскольку оно начинается с 1, то это число и будет наименьшим.

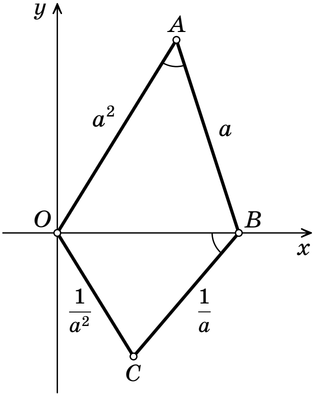
4. *Ответ*. Да, существует.

Решение. Пусть a — некоторое положительное число. Треугольник со сторонами 1, a и a^2 существует тогда и только тогда, когда выполняются три неравенства:

$$1 < a + a^2, \quad a < 1 + a^2, \quad a^2 < a + 1.$$

Первое из этих неравенств выполнено при $a > \frac{1}{\varphi}$, второе — при всех положительных a, третье — при $a < \varphi$, где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — так называемое «золотое сечение», положительный корень квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Следовательно, треугольник с такими сторонами существует при $a \in \left(\frac{1}{\varphi}; \varphi\right)$. При таких же a существует треугольник со сторонами 1, $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{a^2}$. Пусть далее значение a принадлежит отрезку $[1; \sqrt{\varphi}] \subset \left(\frac{1}{\varphi}; \varphi\right)$.

В декартовой системе координат Oxy отметим точки $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, точку A в полуплоскости $y > 0$, для которой $OA = a^2$ и $AB = a$, а также точку C в полуплоскости $y < 0$, для которой $OC = \frac{1}{a^2}$ и $CB = \frac{1}{a}$ (см. рисунок). По доказанному выше такие точки существуют для всех $a \in [1; \sqrt{\varphi}]$. Кроме того, треугольники OAB и OBC подобны по трем пропорциональным сторонам. Значит, $\angle AOB = \angle BOC$ и $\angle OAB = \angle OBC$. Поскольку $1 \leqslant a \leqslant a^2$, угол AOB, лежащий напротив стороны a треугольника OAB, меньше 90°. Отсюда получаем, что $\angle AOC = 2\angle AOB < 180^\circ$ и $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = \angle ABO + \angle OAB < 180^\circ$. Следовательно, $OABC$ — выпуклый четырехугольник при всех указанных значениях a.



Пусть точка A имеет координаты $(x; y)$, тогда $x^2 + y^2 = a^4$ и $(x-1)^2 + y^2 = a^2$. Из этих уравнений получаем $x = \frac{a^4 - a^2 + 1}{2} = f(a)$ и $y = \sqrt{a^4 - f^2(a)}$. Эти выражения непрерывно зависят от a на отрезке $[1; \sqrt{\varphi}]$. Аналогично доказывается, что координаты точки C также непрерывно зависят от a на этом отрезке. Следовательно, длина диагонали AC

четырехугольника $OABC$, равная $g(a)$, также непрерывно зависит от a на этом отрезке.

При $a=1$ треугольники OAB и OBC являются равносторонними со стороной 1, поэтому $g(1)=\sqrt{3}$. При $a=\sqrt{\varphi}$ получаем

$$g(\sqrt{\varphi})=AC<AB+BC=\sqrt{\varphi}+\frac{1}{\sqrt{\varphi}}=\frac{1+\varphi}{\sqrt{\varphi}}=(\sqrt{\varphi})^3.$$

Значит, непрерывная на отрезке $[1;\sqrt{\varphi}]$ функция $g(a)-a^3$ принимает в концах этого отрезка значения разных знаков: $g(1)-1^3=\sqrt{3}-1>0$ и $g(\sqrt{\varphi})-(\sqrt{\varphi})^3<0$. Поэтому найдется такое значение $a\in(1;\sqrt{\varphi})$, при котором $g(a)-a^3=0$ и, следовательно, $OC=\frac{1}{a^2}$, $CB=\frac{1}{a}$, $OB=1$, $AB=a$, $OA=a^2$ и $AC=a^3$. Таким образом, искомый четырехугольник существует.

5. *Ответ*. Да, можно.

Решение. Для описания отправляемых в лабораторию смесей составим таблицу, состоящую из 120 строк и 19 столбцов. Каждый столбец таблицы — это описание состава смеси, отправляемой в лабораторию. На пересечении i-й строки и j-го столбца стоит единица, если j-я смесь содержит жидкость из i-й пробирки, и ноль в противном случае.

Сначала попробуем найти пару пробирок с ядом и противоядием, не устанавливая, где в этой паре яд, а где противоядие. Для этого огрубим результат лаборатории, убрав из него знак (то есть будем считать, что для каждой смеси лаборатория сообщает результат $+1$, если в смеси есть яд без противоядия или противоядие без яда, и ноль иначе). Рассмотрим две строки, соответствующие пробиркам с ядом и противоядием. Их покоординатная сумма, взятая по модулю 2, совпадает со строкой результатов, присланных лабораторией. Следовательно, если все суммы пар строк таблицы, взятые по модулю 2, будут попарно различны, то в результате тестирования мы сможем определить номера строк, соответствующих яду и противоядию.

Такую таблицу можно построить следующим образом. Первую ее строку заполним произвольно. Вторую строку заполняем так, чтобы она не совпадала с первой. Третья и все последующие строки должны удовлетворять двум условиям:

- новая строка не должна совпадать с уже заполненными;
- новая строка должна быть такой, чтобы суммы всех возможных пар построенных строк, взятые по модулю 2, были различны.

Покажем, что построение возможно. Покоординатную сумму строк a и b, взятую по модулю 2, будем обозначать как $a \oplus b$. Рассмотрим строчки s_1, s_2, s_3 и s_4. Предположим, что $s_1 \oplus s_2 = s_3 \oplus s_4$, тогда $s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 = s_3 \oplus s_3 \oplus s_4 = s_4$. Следовательно, правила построения таблицы можно переформулировать следующим образом:

- новая строка не должна совпадать с уже заполненными;
- новая строка должна быть такой, чтобы она была отлична от всех возможных сумм троек уже построенных строк.

Число строк длины 19, составленных из нулей и единиц, равно $2^{19} = 2^{10} \cdot 2^9 > 1000 \cdot 500 = 500000$. Запретов, даже после заполнения всех 120 строк, будет не более чем $C_{120}^3 + 120 = \frac{120 \cdot 119 \cdot 118}{6} + 120 < 20 \cdot 120 \cdot 120 + 120 = 288120 < 300000$. Следовательно, такую таблицу можно построить.

Чтобы определить пару пробирок с ядом и противоядием, найдем все попарные суммы строк таблицы, взятые по модулю 2. Найдем такие строки s_1 и s_2, что $s_1 \oplus s_2$ совпадает с огрубленным результатом лаборатории. Пробирки, соответствующие строкам s_1 и s_2, содержат яд и противоядие. Далее, рассматривая уже настоящий результат лаборатории, мы сможем точно сказать, в какой пробирке яд, а в какой противоядие. Действительно, обязательно найдется хотя бы одна смесь, содержащая либо только яд, либо только противоядие, иначе строки таблицы, соответствующие пробирке с ядом и пробирке с противоядием, будут одинаковыми, что запрещено построением. Тогда по знаку результата для этой смеси мы сможем определить, был в ней яд или противоядие.

6 класс (*3410 работ*)

	1	2	3	4	5	6
8						4
7					26	0
6				139	0	0
5		452	145	12	1304	1
4	318	127	15	11	3	0
3	579	157	138	23	853	44
2	1374	455	127	215	2	61
1	570	179	110	72	1	51
0	569	2040	2875	2938	1221	3249

7 класс (*2066 работ*)

	1	2	3	4	5	6
9						46
8						0
7			370	51	181	0
6			16	19	29	1
5		239	24	43	25	3
4		15	20	10	28	7
3	1544	241	48	32	48	21
2	3	122	223	25	85	121
1	0	59	61	124	210	0
0	519	1390	1304	1762	1460	1867

8 класс (*2440 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	1295	105	34	48	41	1
$\pm$	84	16	29	2	9	0
$\mp$	122	156	64	1	13	1
$-$	804	1773	1104	1004	2071	841
0	135	390	1209	1385	306	1597

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9 класс (*1566 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	532	179	245	89	11	0
$\pm$	110	31	13	13	6	1
$\mp$	176	42	0	2	1	1
$-$	692	1005	958	744	1043	579
0	56	309	350	718	505	985

10 класс (*917 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	445	201	61	36	3	1
$\pm$	76	8	7	0	4	0
$\mp$	27	11	13	8	17	0
$-$	311	469	589	236	353	110
0	58	228	247	637	540	806

11 класс, первый день (*566 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	440	312	241	90	9	3
$\pm$	14	33	9	37	3	0
$\mp$	37	3	37	43	143	0
$-$	74	217	278	395	410	562

11 класс, второй день (*210 работ*)

	1	2	3	4	5
$+$	171	155	144	7	0
$\pm$	12	8	9	11	0
$\mp$	9	7	10	13	3
$-$	18	40	47	179	207

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики, в котором представлены все основные направления современной математики.

С 1933 года на мехмате было подготовлено свыше 40 тысяч специалистов в самых разных областях математики и механики. Среди них около 5 тысяч кандидатов и докторов наук, более 50 академиков, 6 лауреатов Филдсовской премии (С. П. Новиков, Г. А. Маргулис, В. Г. Дринфельд, М. Л. Концевич, В. А. Воеводский, А. Ю. Окуньков). Сейчас на мехмате работают 14 академиков и 13 членов-корреспондентов РАН. В 2019 году в России по решению Правительства РФ созданы 4 математических центра мирового уровня; мехмат — соорганизатор одного из них.

Научная работа на мехмате происходит в рамках научных школ. Во главе школы стоит один или несколько ученых, вокруг которых группируются их ученики и ученики их учеников. Выбирая научного руководителя и кафедру, студент попадает в большой научный коллектив. А студентам младших курсов помогают включиться в научную работу организованные кафедрами просеминары.

Система образования на мехмате динамично развивается: организуются новые курсы и циклы курсов, открываются новые образовательные программы и т. д. В частности, в 2021 году впервые пройдет набор на программу «Фундаментальная математика и математическая физика» (https://fmmp.math.msu.ru/), включающую самые современные курсы по математике и математической физике.

Большое внимание на факультете уделяется прикладным исследованиям: изучаются атомные реакторы, свойства химических веществ, прогнозируется погода, анализируются экономические процессы и пр.

Выпускники мехмата работают в Московском университете и других крупнейших вузах страны, в академических институтах. Практически вся современная московская математическая школа вышла с мехмата. Мехматяне также работают в школах, в авиакосмической отрасли, в инжиниринговых компаниях, в IT, в банках, в страховании, — везде, где нужны фундаментальные знания, аналитический ум, навыки работы с большими объемами информации.

Поэтому мехмат всюду плотен — где бы вы ни оказались, где-то рядом есть наши выпускники…

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ НИУ ВШЭ

создан в 2007 г. при участии Независимого Московского Университета для подготовки ведущих специалистов мирового уровня в области чистой математики, ее приложений и математического образования. Международный экспертный совет факультета включает филдсовских лауреатов П. Делиня, С. К. Смирнова и других выдающихся математиков. Согласно отчету за 2017 г., «Совет повторно оценивает общий уровень научных исследований на факультете как выдающийся, как в отношении объема, так и в отношении качества. Факультет удерживает лидирующую позицию среди математических факультетов страны».

На старших курсах студенты выбирают индивидуальные учебные планы, позволяющие глубоко изучить заинтересовавшую область чистой математики или ее приложений. Благодаря этому выпускники, нацеленные на академическую карьеру, поступают в лучшие аспирантуры мира, а остальные неизменно востребованы в IT, финансах и других наукоемких приложениях.

Помимо программы общего профиля «Математика», на факультете действует совместный бакалавриат с Центром педагогического мастерства, который готовит высококвалифицированных преподавателей физико-математических школ.

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК НИУ ВШЭ

создан в 2014 году совместно с компанией «Яндекс». Факультет ведет подготовку специалистов высокого уровня по работе с данными, аналитиков, исследователей в области компьютерных наук и программных инженеров для ведущих ИТ-компаний и исследовательских центров. Бакалаврские программы «Прикладная математика и информатика» и «Программная инженерия» ежегодно привлекают сильнейших абитуриентов страны. В 2018 году открыта англоязычная программа двух дипломов «Прикладной анализ данных» совместно с Лондонской Школой Экономики.

Наряду с отличной фундаментальной подготовкой в области математики и информатики большое внимание уделяется прикладным курсам и проектной работе, построению индивидуальной образовательной траектории. В числе преподавателей — ведущие российские математики и эксперты в области Computer Science, международные специалисты, исследователи из научных институтов, сотрудники высокотехнологичных компаний, победители олимпиад по спортивному программированию ICPC и математических олимпиад.

Магистерские программы ФКН реализуются совместно со Сбером, Сколтехом, Школой анализа данных Яндекса, Институтом проблем передачи информации и Институтом системного программирования РАН. На факультете тринадцать научных лабораторий. Среди реализуемых проектов — применение методов машинного обучения к обработке данных на экспериментах Большого адронного коллайдера, анализ динамики сообществ в графах и кластеризация, разработки в области биоинформатики и автоматической обработки текстов. Наши студенты участвуют в фундаментальных и прикладных проектах, побеждают на хакатонах и олимпиадах, проходят стажировки в ведущих научных центрах и компаниях-лидерах ИТ-индустрии.

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ МОСКОВСКОГО ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА (МФТИ)

Новый формат Физтех-школы в 2016 году объединил лучшее от факультета инноваций и высоких технологий (ФИВТ) и факультета управления и прикладной математики (ФУПМ).

Физтех-школа прикладной математики и информатики специализируется на образовании и исследованиях в области соприкосновения математики, физики, программирования и компьютерных наук. Это сочетание позволяет предлагать своим абитуриентам выбор из нескольких программ бакалавриата, обновляемых перед каждым учебным годом. Все программы позволяют взять фундаментальное математическое образование; а вместе с ним конкурентно подготовиться по программированию, компьютерным наукам и физике — в сочетании, нужном студенту.

Базовые кафедры и лаборатории ФПМИ представлены ведущими IT-компаниями (Яндекс, Abbyy, 1C и проч.) и институтами Российской академии наук (МИАН, ИСП РАН, ВЦ РАН и проч.). Благодаря системе индивидуальных планов, курсов по выбору, большому разнообразию базовых кафедр и лабораторий, каждый студент имеет возможность построить образовательную траекторию в соответствии со своими интересами, а также участвовать в исследовательской работе — уже с младших курсов бакалавриата.

Своим выпускникам ФПМИ стремится предоставить полный спектр возможностей и способностей к деятельности в будущем, будь то академическая наука или прикладные исследования, аналитика и разработка для ведущих российских и глобальных компаний, работа в ФПМИ и сильнейших институтах РАН.

Сайт: `mipt.ru/fpmi`
Группа Вконтакте: `vk.com/miptfpmi`

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК СПбГУ

В 2015 году Санкт-Петербургский государственный университет открыл новое направление бакалавриата «Математика», которое сразу завоевало популярность: в 2015–2019 годах его выбрало наибольшее число победителей и призеров Всероссийской олимпиады школьников по математике среди всех образовательных программ России. В 2019 году добавились две новые образовательные программы: «Математика, алгоритмы и анализ данных» (совместно с компанией Яндекс, с 2021 программа называется «Науки о данных») и «Современное программирование» (совместно с компанией JetBrains) и был образован новый факультет, включающий эти три программы и программу магистратуры.

В работу со студентами вовлечен выдающийся коллектив преподавателей и научных сотрудников, который обеспечивает подготовку во всех направлениях современной математики — программа «Математика» курируется Советом, в который входят ведущие российские и зарубежные ученые (председатель Совета — филдсовский лауреат С. К. Смирнов). Программу отличает включение современных научных достижений, большое количество курсов по выбору студента и возможность индивидуальных образовательных траекторий. Теоретическая информатика в рамках программы рассматривается как часть математики.

Обучение происходит в историческом центре Санкт-Петербурга — на Васильевском острове, где расположена и часть общежитий. Студенты активно вовлекаются в научную работу в сотрудничестве с лабораторией им. П. Л. Чебышева, а также в работу над программными продуктами под руководством профессионалов из индустрии.

Веб-сайт факультета: `http://math-cs.spbu.ru/`
Сайт о поступлении: `joinmkn.ru`
Чат про поступление: `https://t.me/mathcs_admission`
E-mail: `math-cs@spbu.ru`

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru

www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

ИНТЕРНЕТ-БИБЛИОТЕКА ВИТАЛИЯ АРНОЛЬДА

ilib.mccme.ru

Замечательные книги, бывшие в течение десятков лет настольными для многих школьных учителей математики, руководителей кружков, школьников, интересующихся точными науками, стали в последние годы физически недоступны читателям (несмотря на большие тиражи, издания давно стали библиографической редкостью, недоступной, к сожалению, в большинстве библиотек; переиздать все эти книги — непростая техническая и финансовая задача).

Понимая (и не понаслышке зная) эту ситуацию, мы решили собрать электронные версии любимых книг и журналов, чтобы те, кому это нужно и интересно, могли уже сейчас читать, решать задачи, обсуждать идеи...

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»

www.problems.ru

Все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.) размещены на сайте www.problems.ru

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ»

zadachi.mccme.ru

Более 9000 задач по планиметрии и 3000 задач по стереометрии с решениями, чертежами, атрибутами для тематического поиска и прослеживания взаимосвязей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ

www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях.

Недавно сайту исполнилось 15 лет, открылась его новая версия, каждую неделю появляются новые материалы.

АРХИВ ИЗДАТЕЛЬСТВА «MATHESIS»

maTHesis.ru

Одесское издательство «Mathesis» с 1904 по 1925 год выпускало удивительно интересные книги. Некоторые из них стали классикой, часть сейчас незаслуженно забыта.

Ясность и доступность изложения, подбор научно-популярных книг поможет лучше понять математику, физику, астрономию, другие естественные науки, а также историю их познания.

Чтение этих книг заведомо будет полезно молодому поколению, а также тем, кто занимается его образованием и воспитанием.

Книгоиздательство научныхъ и популярно научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ

МЕХАНИЗМЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

tcheb.ru

В проекте собираются все механизмы, созданные Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821—1894), великим российским математиком. Задача проекта — навсегда сохранить уникальное наследие путем создания высокоточных компьютерных моделей уцелевших механизмов, воссоздать уже утраченные по архивным документам. По договоренности с музеями моделирование производится на основе тщательного измерения всех параметров оригиналов.

К 200-летию Чебышева открылась новая версия сайта.

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЕ ЖУРНАЛЫ В ИНТЕРНЕТЕ

Первые научно-популярные журналы начали выходить в России более двух веков назад. На их статьях выросло не одно поколение российских ученых, инженеров, просто думающих и читающих людей самых разных родов занятий. Сейчас старые номера этих журналов доступны читателям лишь в ничтожном числе библиотек. Электронные архивы призваны сделать их материалы доступными для широкой аудитории.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (1886—1917)
vofem.ru

Журнал, фактически заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год его существования вышло 674 выпуска В.О.Ф.Э.М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое. Среди постоянных рубрик журнала были, например: «Статьи, посвященные вопросам преподавания математики и физики», «Опыты и приборы», «Математические мелочи», «Библиографический отдел».

Статьи составлялись настолько популярно, насколько это возможно без ущерба для научной стороны дела.

ЖУРНАЛ «ПРИРОДА» (1912—)
priroda.ras.ru

Ежемесячный научно-популярный журнал Российской академии наук (РАН) «Природа» — одно из старейших в России изданий. Первый номер этого журнала вышел в 1912 году.

Фактически перед вами огромная энциклопедия по естественным наукам, составленная и регулярно пополнявшаяся отечественными учеными на протяжении 100 лет.

ЖУРНАЛ «КВАНТ» (1970—)
kvant.ras.ru

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

СБОРНИКИ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»
(3 сер., 1997—)
www.mccme.ru/free-books/matpros.html

Сборники с таким названием выходили в 1934—38 и 1957—61 годах. Сборники новой серии играют роль связующего звена между специальной и популярной математической литературой. Математическое содержание «должно быть понятно вдумчивому и настойчивому читателю, даже при отсутствии специальной подготовки». Кроме того в сборниках публикуются материалы о математической жизни, материалы по преподаванию математики.

LXXXIV Московская математическая олимпиада
Задачи и решения

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-08-04

ВСЕ КНИГИ ПО МАТЕМАТИКЕ
В МАГАЗИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА»
В МЦНМО