I олимпиада (1935)

Первый тур

1-й вариант

З-ча **1**. Определить отношение двух чисел, если отношение их среднего арифметического к среднему геометрическому равно 25 : 24.

Реш **1**. Пусть x и y — искомые числа. По условию $\frac{x+y}{2} : \sqrt{xy} = 25 : 24$, т.е. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{25}{12}$. Положим $q = \sqrt{x/y}$. Тогда $q + \frac{1}{q} = \frac{25}{12}$, т.е. $q^2 - \frac{25}{12}q + 1 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим $q_1 = 4/3$ и $q_2 = 3/4$. Таким образом, $x : y = 16 : 9$ или $9 : 16$.

З-ча **2**. Построить треугольник по данным двум сторонам a и b и биссектрисе m угла между ними.

Реш **2**. Пусть ABC — искомый треугольник, CD — его биссектриса. Возьмём на прямой AC точку E так, что $BE \| CD$. Тогда углы при стороне BE треугольника BCE равны, поэтому $EC = CB = a$. Кроме того, $EB : CD = EC : CA$, поэтому $EB = \frac{m(a+b)}{b}$. В треугольнике BCE мы знаем длины всех сторон, поэтому можем его построить. Теперь для построения треугольника ABC достаточно отложить отрезок b на продолжении стороны EC за точку C.

З-ча **3**. Пирамида, все боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом φ, имеет в основании равнобедренный треугольник с углом α, заключенным между равными сторонами. Определить двугранный угол при ребре, соединяющем вершину пирамиды с вершиной угла α.

Реш **3**. Пусть ABC — основание данной пирамиды ($\angle BAC = \alpha$), S — вершина пирамиды. Боковые рёбра наклонены под равными углами, поэтому они равны. Из равенства треугольников ASB и ASC следует, что основания перпендикуляров, опущенных из точек B и C на прямую AS, совпадают. Пусть D — основание этих двух перпендикуляров, E — середина отрезка BC. Тогда угол $\theta = \angle CDB$ искомый. Ясно, что $DE = AE \sin\varphi$ и $EC = AE \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Поэтому $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{EC}{DE} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}$.

2-й вариант

З-ча **1**. Железнодорожный поезд проходит мимо наблюдателя в течение t_1 секунд, при той же скорости он проходит через мост длиной в a метров в течение t_2 секунд. Найти длину и скорость поезда.

Реш **2**. Пусть длина поезда равна l м. Чтобы проехать через мост, передний вагон должен въехать на мост, проехать по нему a м, а потом проехать ещё l м, чтобы последний вагон покинул мост. В результате получаем систему уравнений $l = t_1 v$, $l + a = t_2 v$. Решая её, находим $l = \frac{t_1 a}{t_2 - t_1}$ м и $v = \frac{a}{t_2 - t_1}$ м/с.

З-ча **2**. Построить квадрат, три вершины которого лежали бы на трёх данных параллельных прямых.

Реш **2**. Пусть a, b, c — данные прямые, причём прямая b лежит между a и c. Предположим, что вершины A, B, C квадрата $ABCD$ лежат на прямых a, b, c соответственно.

Первое решение. Из того, что $\angle ABC = 90^\circ$ и $AB = BC$ вытекает следующее построение. Возьмём на прямой b произвольную точку B и повернём прямую a относительно точки B на 90° (в одну или в другую сторону). Точка C — это точка пересечения прямой c и образа прямой a при указанном повороте.

Второе решение. Возьмём на прямой b произвольную точку B и опустим из неё перпендикуляр BA_1 на прямую a и перпендикуляр BC_1 на прямую c. Прямоугольные треугольники BA_1A и CC_1B имеют равные гипотенузы и равны углы, поэтому они равны. Из этого вытекает следующее построение. На прямой a строим отрезок A_1A, равный отрезку BC_1. Мы построили вершину A. Вершина C строится аналогично.

З-ча **3**. Найти объем правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой a, а плоские углы при вершине равны углам наклона боковых рёбер к плоскости основания.

Реш **3**. Пусть длина бокового ребра равна b, а высота пирамиды равна h. Искомый объём V равен $a^2h/3$. Пусть плоские углы при вершине и углы наклона боковых ребер к плоскости основания равны α. Тогда $b\sin\alpha = h$, $b\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ и $b\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}$. Поэтому $h = b\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2)} = a\cos\frac{\alpha}{2}$, а значит, $V = \frac{1}{3}a^3\cos\frac{\alpha}{2}$. Кроме того, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha$. Пусть $\cos\frac{\alpha}{2} = x$ Тогда $\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x^2-1)$. Решая это уравнение и оставляя только положительный корень, получаем $x = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{5}}$.

3-й вариант

З-ча **1**. Составить две прогрессии: арифметическую и геометрическую, каждую из четырёх членов; при

этом, если сложить одноимённые члены обеих прогрессий, то должны получиться числа: 27, 27, 39, 87.

Реш **1**. Пусть $a, a+d, a+2d, a+3d$ — искомая арифметическая прогрессия, b, bq, bq^2, bq^3 — искомая геометрическая прогрессия. По условию

$$\begin{aligned} a+b &= 27,\\ a+d+bq &= 27,\\ a+2d+bq^2 &= 39,\\ a+3d+bq^3 &= 87. \end{aligned}$$

Вычтем из второго уравнения первое, из третьего второе, из четвёртого третье:

$$\begin{aligned} d+b(q-1) &= 0,\\ d+bq(q-1) &= 12,\\ d+bq^2(q-1) &= 48. \end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем $b(q-1) = -d$; подставим это выражение во второе и третье уравнения:

$$\begin{aligned} d-dq &= 12,\\ d-dq^2 &= 48. \end{aligned}$$

Поделив последнее уравнение на предпоследнее, получим $q = 3$. Следовательно, $d = -6, b = 3$ и $a = 24$. Таким образом, искомые прогрессии — это

$$\begin{array}{cccc} 24, & 18, & 12, & 6;\\ 3, & 9, & 27, & 81. \end{array}$$

З-ча **2**. Доказать: если стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, то радиус вписанного круга равен $\frac{1}{3}$ одной из высот.

Реш **2**. Пусть $a, a+d, a+2d$ — стороны треугольника, h — высота, опущенная на сторону $a+d$. Площадь треугольника, с одной стороны, равна $\frac{(a+d)h}{2}$, а с другой стороны, она равна произведению половины периметра на радиус вписанного круга: $\frac{a+(a+d)+(a+2d)}{2}r$. Приравнивая эти выражения, получаем $\frac{(a+d)h}{2} = \frac{3(a+d)r}{2}$, т.е. $r = \frac{1}{3}h$.

З-ча **3**. Высота усеченного конуса равна радиусу его большего основания; периметр правильного шестиугольника, описанного около меньшего основания, равен периметру равностороннего треугольника, вписанного в большее основание. Определить угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

Реш **3**. Пусть R — радиус окружности большего основания, r — радиус окружности меньшего основания. Периметр правильного шестиугольника, описанного около меньшего основания, равен $\frac{12r}{\sqrt{3}}$. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в большее основание, равен $3R\sqrt{3}$. По условию $\frac{12r}{\sqrt{3}} = 3R\sqrt{3}$, т.е. $r = \frac{3}{4}R$. Если φ — искомый угол наклона, то $\operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{R-r} = 4$.

4-й вариант

З-ча **1**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2z^2 &= 2a^2,\\ x+y+2z &= 4(a^2+1),\\ z^2-xy &= a^2. \end{cases}$$

Реш **1**. Запишем эти уравнения следующим образом:

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 2z^2+2a^2,\\ x+y &= 4(a^2+1)-2z,\\ -xy &= a^2-z^2. \end{cases}$$

Второе уравнение возведём в квадрат, прибавим к нему третье уравнение, умноженное на 2, и вычтем первое уравнение. В результате получим:

$$0 = 16(a^2+1)^2 - 16(a^2+1)z,$$

т.е. $z = a^2 + 1$. Теперь второе и третье уравнения записываются так:

$$\begin{cases} x + y &= 2(a^2+1), \\ xy &= a^4 + a^2 + 1. \end{cases}$$

Решение этой системы сводится к решению квадратного уравнения; решая его, находим

$$x = a^2 \pm a + 1, \quad y = a^2 \mp a + 1.$$

З-ча **2**. В треугольнике ABC из произвольной точки D на стороне AB проведены две прямые, параллельные сторонам AC и BC, пересекающие BC и AC соответственно в точках F и G. Доказать, что сумма длин окружностей, описанных около треугольников ADG и BDF, равна длине окружности, описанной около треугольника ABC.

Реш **2**. Радиусы описанных окружностей подобных треугольников ADG, DBF и ABC пропорциональны соответственным сторонам:

$$\frac{R_1}{AD} = \frac{R_2}{DB} = \frac{R}{AB},$$

поэтому $\frac{R_1+R_2}{AD+DB} = \frac{R}{AB}$, а значит, $R_1 + R_2 = R$. Умножая это равенство на 2π, получаем требуемое.

З-ча **3**. Развертка боковой поверхности конуса представляет сектор с углом в $120°$; в конус вписана треугольная пирамида, углы основания которой составляют арифметическую прогрессию с разностью $15°$. Определить угол наклона к плоскости основания наименьшей из боковых граней.

Реш **3**. Пусть l — длина образующей конуса. Длина окружности основания равна длине дуги развёртки, поэтому радиус окружности основания равен $l/3$. Учитывая, что сумма углов любого треугольника равна $180°$, получаем, что основание пирамиды — треугольник ABC с углами $45°$, $60°$, $75°$. Пусть BC — меньшая сторона, O — центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\angle BOC = 2 \cdot 45° = 90°$, поэтому BOC — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $l/3$. Значит, $BC = l\sqrt{2}/3$. Пусть D — середина отрезка BC, S — вершина конуса. Тогда $OD = \frac{l}{3\sqrt{2}}$ и $SD = \sqrt{SB^2 - DB^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{18}} = \frac{l\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$. Если φ — искомый угол, то $\cos\varphi = \frac{OD}{SD} = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

Второй тур

Серия А

З-ча **1**. Дана окружность и на ней 3 точки M, N, P, в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) высота, биссектриса и медиана, выходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

Реш **1**. Сначала по точкам M, N и P построим описанную окружность. Пусть O — её центр. Прямая ON параллельна прямой AM (A — вершина треугольника ABC, из которой проведены медиана, биссектриса и высота). Из этого вытекает следующее построение. Через точку M проводим прямую, параллельную прямой ON. Вершина A — это точка пересечения построенной прямой с описанной окружностью. Чтобы построить остальные вершины, найдём точку пересечения прямых AP и ON; из этой точки восставим перпендикуляр к прямой ON. Он пересекает окружность в искомых точках.

З-ча **2**. На поверхности куба найти точки, из которых диагональ видна под наименьшим углом. Доказать, что из остальных точек поверхности куба диагональ видна под бóльшим углом, чем из найденных.

Реш **2**. Множество точек, из которых диагональ куба видна под углом $90°$, представляет собой описанную сферу куба (концы диагонали исключены). Пересечение этого множества с поверхностью куба состоит из 6 точек, отличных от концов данной диагонали. Все остальные точки поверхности куба лежат строго внутри описанной сферы, поэтому из них диагональ видна под тупым углом.

З-ча **3**. В двух различных плоскостях лежат два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Прямая AB пересекается с прямой A_1B_1, прямая BC — с прямой B_1C_1, прямая CA — с прямой C_1A_1. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 или все три пересекаются в одной точке, или параллельны друг другу.

Реш **3**. Рассмотрим плоскости ABA_1B_1, BCB_1C_1 и ACA_1C_1. Пересечением первых двух плоскостей служит прямая BB_1. Если третья плоскость пересекает прямую BB_1 в некоторой точке, то эта точка является как точкой пересечения трёх указанных плоскостей, так и точкой пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1. Действительно, прямые AA_1 и CC_1 являются пересечениями пар плоскостей, поэтому точка пересечения трёх плоскостей им принадлежит. Если же третья плоскость параллельна прямой BB_1, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны друг другу. Действительно, в этом случае пересечения пар плоскостей являются тремя параллельными прямыми.

Серия B

З-ча **1**. Сколько действительных решений имеет система двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y &= 2, \\ xy-z^2 &= 1? \end{cases}$$

Реш **1**. Из второго уравнения следует, что $xy \geqslant 1$. Числа x и y не могут быть оба отрицательны, поскольку их сумма равна 2. Значит, числа x и y положительны и $x+y \geqslant 2\sqrt{xy} \geqslant 2$, причём равенство $x+y=2$ возможно лишь в том случае, когда $x=y=1$. В таком случае $z=0$.

З-ча **2**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3-y^3 &= 26, \\ x^2y-xy^2 &= 6. \end{cases}$$

Реш **2**. Пусть $y=kx$. Сразу отметим, что $k \neq 1$. Из уравнений

$$\begin{aligned} x^3-k^3x^3 &= 26, \\ kx^3y-k^2x^3 &= 6 \end{aligned}$$

получаем $x^3=\frac{26}{1-k^3}$ и $x^3=\frac{6}{k-k^2}$. Следовательно,

$$\frac{26}{1-k^3}=\frac{6}{k-k^2}.$$

Это уравнение можно умножить на $1-k$. В результате получим

$$\frac{26}{1+k+k^2}=\frac{6}{k},$$

откуда $k=3$ или $\frac{1}{3}$. Поэтому $x^3=-1$ или $x^3=27$. В итоге получаем следующие решения: $(-1,-3)$, $\left(\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}(1\pm i\sqrt{3})\right)$, $(3,1)$, $\left(\frac{-3\pm 3i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})\right)$.

З-ча **3**. Найти сумму

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3.$$

Реш **3**. Индукцией по m легко доказать, что $1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3=\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$. Действительно, база индукции очевидна, поэтому нужно лишь проверить равенство

$$\frac{m^2(m+1)^2}{2}+(m+1)^3=\frac{(m+1)^2(m+2)^2}{.}$$

После сокращения на $m+1$ и умножения на 4 получаем очевидное равенство $m^2+4(m+1)=(m+2)^2$*

Таким образом, $1^3+2^3+3^3+\cdots+(2n-1)^3+(2n)^3=\left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)$, т.е. $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3+2^3(1^3+2^3+\cdots+n^3)=\left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2$. Преобразуем последнее равенство, воспользовавшись тем, что $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. В результате получим $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

Серия C

З-ча **1**. Выбраны 6 различных цветов; требуется раскрасить 6 граней куба, каждую в особый цвет из числа избранных. Сколькими геометрически различными способами можно это сделать? Геометрически различными называются две такие расцветки, которые нельзя совместить одну с другой при помощи вращений куба вокруг его центра.

Решить ту же задачу для случая раскраски граней правильного двенадцатигранника в двенадцать различных цветов.

(*Эта задача не была решена никем из участников олимпиады.*)

Реш **1**. Куб можно повернуть так, чтобы грань, окрашенная первым цветом, заняла заданное положение. Для окраски противоположной ей грани есть 5 различных вариантов; разные раскраски противоположной грани дают геометрически различные раскраски куба.

Среди оставшихся четырёх граней можно выбрать грань, окрашенную данным цветом и перевести её в данное положение (не меняя при этом положение первых двух граней). Разные раскраски трёх оставшихся граней дают геометрически различные раскраски куба. Одну из этих граней можно окрасить тремя способами, одну из оставшихся — двумя. Всего получаем $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ геометрически различных раскрасок.

Решим теперь задачу для 12-гранника (додекаэдра). Количество всех возможных раскрасок додекаэдра равно $12! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 12$. Чтобы найти число геометрически различных раскрасок, нужно поделить $12!$ на число самосовмещений додекаэдра. Любую из 12 граней можно перевести в любую другую. Кроме того, есть 5 поворотов (включая тождественный), сохраняющих данную грань. Всего получается 60 самосовмещений. Поэтому количество геометрически различных раскрасок додекаэдра равно $12!/60 = 7\,983\,360$.

З-ча **2**. Сколькими различными способами можно разложить целое положительное число n на сумму трех положительных целых слагаемых? При этом два разложения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за различные.

Реш **2**. Ответ: $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Первое решение. Пусть $n = x + y + z$. Число x может быть равно 1, 2, 3, ... , $n-2$. При фиксированном x число y может принимать одно из $n - x - 1$ значений. Всего получаем $(n-2) + (n-3) + \dots + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ вариантов.

Второе решение. Запишем n как сумму единиц: $n = 1 + 1 + \dots + 1$. Среди $n-1$ знаков плюс мы должны выбрать два: то, что стоит перед первым по порядку выбранным знаком плюс — это число x, а то, что стоит после второго знака плюс — это число z. Всего получаем $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ вариантов.

З-ча **3**. Будем обозначать через $M(a,b)$ — общее наименьшее кратное двух чисел a и b, $D(a,b)$ — общий наибольший делитель двух чисел a и b.

Доказать формулу

$$M(a,b) \cdot D(a,b) = ab.$$

Для трех чисел доказать формулу

$$\frac{M(a,b,c) \cdot D(a,b) \cdot D(b,c) \cdot D(c,a)}{D(a,b,c)} = abc.$$

Реш **3**. Докажем сначала формулу для двух чисел. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ и $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$. Тогда

$$D(a,b) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}},$$
$$M(a,b) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}.$$

Поэтому доказательство можно провести для каждого простого множителя отдельно.

Если $a = p^\alpha$ и $b = p^\beta$, причём $\alpha \leqslant \beta$, то $D(a,b) = p^\alpha$ и $M(a,b) = p^\beta$. Поэтому $M(a,b) \cdot D(a,b) = p^\alpha p^\beta = ab$.

Докажем теперь формулу для трёх чисел. Достаточно рассмотреть случай, когда $a = p^\alpha$, $b = p^\beta$, $c = p^\gamma$, причём $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. В этом случае

$$\frac{M(a,b,c)D(a,b)D(b,c)D(c,a)}{D(a,b,c)} = \frac{p^\gamma p^\alpha p^\beta p^\alpha}{p^\alpha} = abc.$$

II олимпиада (1936)

Второй тур

З-ча **1**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y &= a, \\ x^5+y^5 &= b^5. \end{cases}$$

Реш **1**. Пусть $xy=t$. Несложно проверить, что

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5(x+y)^3xy+5(x+y)x^2y^2=a^5-5a^3t+5at^2$$

Для t получаем квадратное уравнение $t^2-a^2t+\frac{a^5-b^5}{5a}=0$. Решая его, находим $t=\frac{1}{2}\left(a^2\pm\sqrt{\frac{a^5+4b^5}{5a}}\right)$. В результате получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x+y &= a, \\ xy &= t. \end{cases}$$

Решение этой системы тоже сводится к решению квадратного уравнения.

З-ча **2**. На плоскости дан угол, образованный двумя лучами a и b, и некоторая точка M. Провести через точку M прямую c так, чтобы треугольник, образованный прямыми a, b и c, имел периметр данной величины.

Реш **2**. Пусть A, B, C — точки пересечения прямых b и c, c и a, a и b. Рассмотрим вписанную окружность треугольника ABC. Пусть она касается сторон CA и CB в точках K и L. Тогда $CK=CL=p$, где p — полупериметр. Из этого вытекает следующее построение. Построим на сторонах CA и CB угла ACB точки K и L так, что $CK=CL=p$. Затем построим окружность S, касающуюся прямых b и a в точках K и L. Наконец, проведём из точки M касательные к окружности S. Та касательная, для которой окружность S будет вписанной окружностью треугольника ABC, является искомой прямой c.

З-ча **3**. Доказать, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то произведение чисел, выражающих длины катетов, делится на 12.

Реш **3**. Пусть a и b — катеты данного треугольника, c — его гипотенуза. Тогда $a^2+b^2=c^2$. Легко проверить, что при делении на 3 квадрат целого числа даёт остаток 0 или 1. Поэтому если a^2+b^2 — квадрат целого числа, то одно из чисел a и b делится на 3. То же самое справедливо и для остатков от деления на 4, поэтому одно из чисел a и b делится на 4. Следовательно, ab делится на 12.

З-ча **4**. Сколькими различными способами можно представить 1 000 000 в виде произведения трёх натуральных[1] чисел? Произведения, отличающиеся лишь порядком сомножителей, считаются тождественными.

(*Эта задача не была решена никем из участников олимпиады.*)

Реш **4**. Пусть множители имеют вид $2^{a_1}5^{b_1}$, $2^{a_2}5^{b_2}$ и $2^{a_3}5^{b_3}$. Тогда $a_1+a_2+a_3=6$ и $b_1+b_2+b_3=6$. При этом числа a_i и b_i могут быть равны нулю. Если $a_1=k$, то для разложения $a_2+a_3=6-k$ получаем $7-k$ вариантов. Поэтому для разложения $a_1+a_2+a_3=6$ получаем $7+6+5+4+3+2+1=28$ вариантов. Всего получаем $(28)^2=784$ способа.

Но пока что мы не учли тождественность разложений, отличающихся лишь порядком множителей. Есть ровно одно разложение, не зависящее от порядка множителей, в котором все множители равны 100. Те разложения, в которых есть два равных множителя, мы посчитали трижды. В каждый из равных множителей 2 может входить в степени $0, 1, 2$ или 3, т.е. всего четырьмя различными способами; столькими же способами может входить 5. Всего получаем 16 разложений такого вида, но одно из них — рассмотренное выше разложение с тремя равными множителями. Остаётся 15 разложений, каждое из которых мы посчитали трижды. Количество разложений с попарно различными множителями равно $784-1-45=738$. Каждое из них мы посчитали 6 раз, поэтому среди них будет $738/6=123$ различных разложения. Всего получаем $1+15+123=139$ разложений.

З-ча **5**. В пространстве расположены 3 плоскости и шар. Сколькими различными способами можно поместить в пространстве второй шар так, чтобы он касался трех данных плоскостей и первого шара? (*В этой задаче речь фактически идёт о касании сфер, т.е. не предполагается, что шары могут касаться только внешним образом — прим. ред.*)

[1] В оригинальной формулировке вместо *натуральных* говорилось *целых*, но имелись в виду именно натруральные числа — прим. ред.

Реш **5**. Ответ: от 0 до 16 (в зависимости от расположения данных плоскостей и шара).

Пусть O и R — центр и радиус данной сферы S. Предположим, что сфера S_1 с центром O_1 касается данной сферы и трёх данных плоскостей. Сопоставим сфере S_1 сферу S_1' с центром O_1 и радиусом O_1O. Сфера S_1' проходит через данную точку O и касается трёх плоскостей, удалённых от данных плоскостей на расстояние R. Для каждой плоскости есть ровно две плоскости, удалённых от неё на расстояние R. Поэтому сфера S_1' проходит через данную точку O и касается тройки плоскостей, причём есть $2^3 = 8$ различных таких троек.

Легко проверить, что существует не более двух сфер, проходящих через данную точку и касающихся трёх данных плоскостей. В случае, когда три данные плоскости пересекаются в одной точке, это доказывается следующим образом. Впишем сферу в тот трёхгранный угол, который образован данными плоскостями и содержит данную точку. Проведём прямую, соединяющую данную точку и точку пересечения данных плоскостей. Искомые сферы соответствуют точкам пересечения этой прямой с данной сферой, а таких точек не более двух. Отдельно рассматривается случай, когда данная точка лежит на одной из данных плоскостей. Кроме того, нужно рассмотреть два более простых случая: 1) есть две параллельные плоскости и их пересекает третья плоскость; 2) прямые пересечения плоскостей параллельны. (Легко видеть, что если все три плоскости параллельны или пересекаются по одной прямой, то сфера не может касаться трёх таких плоскостей.)

В итоге мы получаем, что существует не более 16 сфер S_1'. По сфере S_1' сфера S_1 восстанавливается не однозначно. Чтобы её восстановить, нужно взять точку O', в которой прямая OO_1 пересекает сферу S; сфера S_1 — это сфера с центром O_1 и радиусом O_1O'. Точек пересечения сферы с прямой, проходящей через её центр, две, поэтому мы получаем две сферы. Но лишь одна из них может касаться трёх данных плоскостей (вторая сфера касается других плоскостей). Поэтому существует не более 16 сфер, касающихся данной сферы и трёх данных плоскостей.

Покажем теперь, что при различных расположениях данных плоскостей и данной сферы количество сфер, касающихся их, может быть любым целым числом от 0 до 16. Будем считать, что данные плоскости пересекаются по трём параллельным прямым, причём расстояния между этими прямыми попарно различны. Сферы, касающиеся трёх данных плоскостей, заметают четыре цилиндра, соответствующих вписанной и трём вневписанным окружностям треугольника, который образуется при пересечении данных плоскостей плоскостью, ортогональной всем трём данным плоскостям. Эти цилиндры не имеют общих точек, в том числе и точек касания.

Рассмотрим цилиндр и точку вне его. Рассмотрим семейство сфер S_R с центром в выбранной точке. Нас интересуют сферы, вписанные в цилиндр и касающиеся сферы S_R. Если радиус R сферы S_R мал, то таких сфер нет. Будем увеличивать радиус R до тех пор, пока сфера S_R не коснётся цилиндра. В этом случае количество искомых сфер равно 1. Будем снова увеличивать радиус R. Когда сфера S_R пересечёт цилиндр, количество искомых сфер станет равно 2. Затем сфера S_R будет пересекать цилиндр и ещё касаться его в одной точке. В этом случае количество искомых сфер равно 3. Если же радиус R увеличить ещё больше, то количество искомых сфер будет равно 4.

Эти замечания показывают, что если мы выберем точку вне данных четырёх цилиндров и рассмотрим семейство сфер S_R с центром в выбранной точке, то при постепенном увеличении радиуса R мы получим конфигурации, для которых число искомых сфер последовательно изменяется от 0 до 16. Нужно лишь позаботиться о том, чтобы не появлялись одновременно две точки касания сферы S_R с цилиндрами.

III олимпиада (1937)

Первый тур

З-ча **1**. Решить систему:

$$\begin{cases} x+y+z &= a, \\ x^2+y^2+z^2 &= a^2, \\ x^3+y^3+z^3 &= a^3. \end{cases}$$

Реш **1**. Ответ: $(0,0,a)$, $(0,a,0)$ и $(a,0,0)$.
Тождество $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2(xy+yz+xz)$ показывает, что

$$xy+yz+xz=0. \tag{1}$$

Тождество $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$ показывает, что $(x+y)(y+z)(z+x)=0$. Учитывая равенство (1), получаем $3xyz=0$. Если $x=0$, то равенство (1) показывает, что $yz=0$. Поэтому либо $y=0$ и $z=a$, либо $z=0$ и $y=a$. Аналогично разбираются остальные варианты. В итоге получаем следующие решения: $(0,0,a)$, $(0,a,0)$ и $(a,0,0)$.

З-ча **2**. Даны прямая и две точки A и B по одну сторону от неё. Найти на прямой такую точку M, чтобы сумма $MA+MB$ равнялась заданному отрезку.

Реш **2**. Пусть l — данная прямая, a — данный отрезок. Пусть, далее, S — окружность радиуса a с центром B, S' — окружность радиуса AM с центром M, A' — точка, симметричная точке A относительно прямой l. Тогда окружность S' касается окружности S, а точка A' лежит на окружности S'. Остаётся провести через данные точки A и A' окружность S', касающуюся данной окружности S, и найти её центр M. Окружность S' строится следующим образом. Можно считать, что центр окружности S не лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AA' (иначе построение очевидно). Возьмём произвольную точку C окружности S и построим описанную окружность треугольника $AA'C$; она пересекает S в некоторой точке D. Пусть X — точка пересечения прямых AA' и CD. Проведём к окружности S касательные XP и XQ. Тогда описанные окружности треугольников $AA'P$ и $AA'Q$ искомые, так как $XP^2=XQ^2=XA\cdot XA'$.

З-ча **3**. По двум скрещивающимся прямым скользят два отрезка. Доказать, что объем тетраэдра с вершинами в концах этих отрезков не зависит от положения последних.

Реш **3**. Покажем, что объём такого тетраэдра равен $\frac{1}{6}abd\sin\varphi$, где a и b — длины отрезков, d — расстояние между скрещивающимися прямыми, φ — угол между ними. Рассмотрим параллелепипед, образованный плоскостями, проходящими через рёбра тетраэдра параллельно противоположным рёбрам. Плоскости граней исходного тетраэдра отсекают от параллелепипеда 4 тетраэдра, объём каждого из которых составляет $1/6$ объёма параллелепипеда. Поэтому объём тетраэдра составляет $1/3$ объёма параллелепипеда. А объём параллелепипеда легко вычисляется, поскольку его грань является параллелограммом с диагоналями a и b у углом φ между ними, а высота, опущенная на эту грань равна d.

Второй тур

З-ча **1**. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Через каждые две из них провести окружность так, чтобы три проведенные окружности имели в точках пересечения взаимно перпендикулярные касательные.

Реш **1**. Пусть A, B, C — данные точки, A', B', C' — центры требуемых окружностей (A' — центр окружности, проходящей через точки B и C и т.д.). Треугольники $BA'C$, $AB'C$, $AC'B$ равнобедренные. Пусть x, y, z — углы при их основаниях. Тогда

$$\begin{cases} y+z+\angle A &= \pm 90^\circ, \\ z+x+\angle B &= \pm 90^\circ, \\ x+y+\angle C &= \pm 90^\circ. \end{cases}$$

Эта система уравнений легко решается. Например, чтобы найти x, нужно сложить два последних уравнения и вычесть из них первое уравнение. Если же мы знаем (ориентированные) углы x, y, z, то требуемые окружности строятся очевидным образом.

З-ча **2**. В пространстве расположен правильный додекаэдр. Сколькими способами можно провести плоскость так, чтобы она высекла на додекаэдре правильный шестиугольник?

Реш **2**. Ответ: 30 способами. Прежде всего заметим, что для каждой из 10 больших диагоналей додекаэдра есть ровно три различных плоскости, перпендикулярных этой диагонали и высекающих правильный шестиугольник. Действительно, будем двигать плоскость, перпендикулярную диагонали, от одной вершины к другой. Сначала в сечении будет правильный треугольник, потом неправильный шестиугольник, который в определённый момент станет правильным, потом снова неправильный шестиугольник, который станет правильным, когда мы дойдём до центра додекаэдра; после этого всё повторится в обратном порядке. Остаётся проверить, что плоскость, не перпендикулярная большим диагоналям додекаэдра, не может высекать правильный шестиугольник. Для этого нужно рассмотреть следующие случаи: 1) параллельные стороны правильного шестиугольника лежат на двух смежных гранях; 2) параллельные стороны шестиугольника лежат на двух несмежных гранях, граничащих с одной и той же гранью; 3) параллельные стороны шестиугольника лежат на двух противоположных гранях. Первый случай невозможен. Второй случай легко разбирается. В третьем случае, если учесть второй, то окажется, что каждая пара параллельных сторон лежит на противоположных гранях. Этот случай теперь тоже несложно разобрать.

З-ча **3**. На сколько частей разделяют n-угольник его диагонали, если никакие три диагонали не пересекаются в одной точке?

Реш **3**. Ответ: на $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-3)}{2} + 1$ частей.

Будем поочерёдно проводить диагонали. Когда мы проводим новую диагональ, число частей, на которые проведённые ранее диагонали делят многоугольник, увеличивается на $m+1$, где m — число точек пересечения новой диагонали с ранее проведёнными, т.е. каждая новая диагональ и каждая новая точка пересечения диагоналей увеличивают число частей на 1. Поэтому общее число частей, на которые диагонали делят n-угольник, равно $D + P + 1$, где D — число диагоналей, P — число точек пересечения диагоналей. Ясно, что $D = \frac{n(n-3)}{2}$. Остаётся вычислить P. Любой точке пересечения диагоналей соответствуют две диагонали, концы которых задают четыре вершины n-угольника. Наоборот, четыре вершины n-угольника определяют одну точку пересечения диагоналей. Поэтому P равно количеству способов выбора четырёх точек из n, т.е. $P = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

IV олимпиада (1938)

Второй тур

З-ча **1**. В пространстве даны точки O_1, O_2, O_3 и точка A. Точка A симметрично отражается относительно точки O_1, полученная точка A_1 — относительно O_2, полученная точка A_2 — относительно O_3.

Получаем некоторую точку A_3, которую также последовательно отражаем относительно O_1, O_2, O_3. Доказать, что полученная точка совпадает с A.

Реш **1**. Легко проверить, что $\overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$, $\overrightarrow{A_2A_4} = 2\overrightarrow{O_3O_1}$ и $\overrightarrow{AA_6} = 2\overrightarrow{O_2O_3}$. Поэтому $\overrightarrow{AA_6} = \overrightarrow{0}$, т.е. $A = A_6$.

З-ча **2**. На сколько частей могут разделить пространство n плоскостей?

Реш **2**. Ответ: на $(n^3+5n+6)/6$ частей. (*Мы предполагаем, что набор плоскостей невырожденный в том смысле, что любые три плоскости пересекаются в одной точке и никакие четыре плоскости не имеют общей точки. Если же рассматривать вырожденные наборы плоскостей, то возникает много вариантов. Описать все возможные ответы в этом случае очень трудно. — Прим. ред.*)

Докажем сначала, что n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, разбивают плоскость на $(n^2 + n + 2)/2$ частей. Доказательство проведём индукцией по n. Для $n = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для n прямых, и докажем его для $n + 1$ прямых. Выделим среди них одну прямую. Остальные прямые делят её на $n + 1$ частей, каждая из которых делит на две части какую-либо из тех частей, на которые делят плоскость n прямых. Поэтому после проведения одной прямой число частей увеличилось на $n + 1$. Остаётся заметить, что $\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2} = \frac{n^2+n+2}{2} + n + 1$.

Для плоскостей доказательство проводится почти так же, как и для прямых. Нужно лишь воспользоваться тем, что n плоскостей пересекают выделенную плоскость по n прямым, т.е. они разбивают её на $(n^2 + n + 1)/2$ частей. Для $n = 0$ утверждение очевидно; равенство

$$\frac{(n+1)^3+5(n+1)+6}{6} = \frac{n^3+5n+6}{6} + \frac{n^2+n+2}{2}$$

проверяется простыми вычислениями.

З-ча **3**. Построить треугольник по основанию, высоте и разности углов при основании.

Реш **3**. Пусть надо построить треугольник ABC по основанию c, высоте h_c и разности углов A и B. Предположим, что треугольник ABC построен. Обозначим через C' точку, симметричную C относительно серединного перпендикуляра к стороне AB, через B' — точку, симметричную B относительно прямой CC'. Для определённости будем считать, что $AC < BC$. Тогда $\angle ACB' = \angle ACC' + \angle C'CB = 180^\circ - \angle A + \angle C'CB = 180^\circ - (\angle A - \angle B)$, т.е. угол ACB' известен.

Треугольник ABB' можно построить, так как $AB = c$, $BB' = 2h_c$ и $\angle ABB' = 90^\circ$. Точка C является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BB' и дуги окружности, из которой отрезок AB' виден под углом $180^\circ - (\angle A - \angle B)$.

З-ча **4**. Сколько существует натуральных[2] чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

Реш **4**. Ответ: 686 чисел. Сначала вычеркнем из набора чисел 1, 2, ... , 999 числа, кратные 5; их количество равно $\left[\frac{999}{5}\right] = 199$. Затем из того же набора чисел 1, 2, ... , 999 вычеркнем числа, кратные 7; их количество равно $\left[\frac{999}{7}\right] = 142$. При этом числа, кратные 35, будут вычеркнуты дважды. Их количество равно $\left[\frac{999}{35}\right] = 28$. Значит, всего мы вычеркнули $199 + 142 - 28 = 313$ чисел, а осталось $999 - 313 = 686$ чисел.

[2] В оригинальной формулировке вместо *натуральных* говорилось *целых*, но имелись в виду именно натруральные числа — прим. ред.

V олимпиада (1939)

Первый тур

З-ча **1**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 &= b^3, \\ x + y + z &= 2b, \\ x^2 + y^2 - z^2 &= b^2. \end{cases}$$

Реш **1**. Рассмотрим сначала случай, когда $b = 0$. В этом случае последние два уравнения запишутся в виде $z = -x - y$ и $z^2 = x^2 + y^2$. Возведя первое из них в квадрат, получим $xy = 0$. Значит, $x = 0$, $z = -y$ или $y = 0$, $z = -x$. Первое уравнение исходной системы при этом выполняется.

Рассмотрим теперь случай, когда $b \neq 0$. Воспользуемся тождеством

$$3xyz - x^3 - y^3 - z^3 = (x + y + z)(xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2).$$

Из первого и второго уравнений следует, что $xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2 = \frac{b^2}{2}$. Возведя в квадрат уравнение $x + y + z = 2b$, получим $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 4b^2$. Следовательно, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ и $xy + yz + xz = \frac{3}{2}b^2$. Сравнивая первое из этих уравнений с последним уравнением исходной системы, получаем $z = 0$. Таким образом, $x^2 + y^2 = b^2$ и $xy = \frac{3}{2}b^2$. Решая эту систему уравнений, находим $x = \left(1 \pm \sqrt{\frac{-1}{2}}\right) b$, $y = \left(1 \mp \sqrt{\frac{-1}{2}}\right) b$.

З-ча **2**. Доказать, что $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

Реш **2**. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 1 с центром O. Сумма векторов, идущих из точки O в вершины этого пятиугольника, равна нулю, поскольку при повороте на угол $\frac{2\pi}{5}$ эта сумма переходит сама в себя. Поэтому сумма проекций векторов $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ на ориентированную прямую OA равна -1. С другой стороны, эта сумма проекций равна $2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

З-ча **3**. Даны три точки A, B, C. Через точку A провести прямую так, чтобы сумма расстояний от точек B и C до этой прямой была равна заданному отрезку.

Реш **3**. Предположим, что требуемая прямая l построена. Рассмотрим два случая.

Случай 1. *Прямая l пересекает отрезок BC.*

Проведём из точки B перпендикуляр к прямой l, а из точки C проведём прямую, параллельную l. Пусть A' — точка пересечения двух проведённых прямых. Треугольник $A'BC$ прямоугольный. В нём известны гипотенуза BC и катет $A'B$. Из этого вытекает следующее построение. Построим треугольник $A'BC$, а затем проведём прямую l, перпендикулярную BA'. Если прямая l пересекает отрезок BA', то эта прямая искомая.

Случай 2. *Прямая l не пересекает отрезок BC.*

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABA'C$. Сумма расстояний от точек B и C до прямой l равна расстоянию от точки A' до прямой l. Из этого вытекает следующее построение. Построим прямоугольный треугольник $AA'H$ с заданной гипотенузой AA' и катетом $A'H$, длина которого равна длине данного отрезка. Если прямая $l = AH$ не пересекает отрезок BC, то эта прямая искомая.

З-ча **4**. Решить уравнение $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$.

Реш **4**. Избавляясь от радикалов, приходим к уравнению

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0.$$

Относительно a это уравнение квадратное. Решая его, получаем два решения:

$$\begin{aligned} a &= x^2 + x + 1; \\ a &= x^2 - x. \end{aligned}$$

Решая эти квадратные уравнения относительно x, получаем четыре решения:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{a - \tfrac{3}{4}}; \\ x_{3,4} &= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{a + \tfrac{1}{4}}. \end{aligned}$$

З-ча **5**. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

Реш **5**. Пусть AD, AM и AH — биссектриса, медиана и высота треугольника ABC. Пусть, далее, D' — точка пересечения прямой AD с описанной окружностью этого треугольника. Тогда D' — середина дуги BC, поэтому $MD' \parallel AH$. Из этого следует, что точка D лежит на отрезке MH.

Второй тур

З-ча **1**. Разложить на целые рациональные множители выражение

$$a^{10} + a^5 + 1.$$

Реш **1**. Ответ: $(a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$.

З-ча **2**. Даны два многочлена от переменной x с целыми коэффициентами. Произведение их есть многочлен от переменной x с чётными коэффициентами, не все из которых делятся на 4. Доказать, что в одном из многочленов все коэффициенты чётные, а в другом — хоть один нечётный.

Реш **2**. Из того, что не все коэффициенты произведения делятся на 4, следует, что у одного многочлена есть нечётный коэффициент. Нужно доказать, что у другого многочлена нет нечётных коэффициентов. Предположим, что у обоих многочленов есть нечётные коэффициенты. Заменим каждый коэффициент на его остаток от деления на 2. В результате получим многочлены $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + x^r$ и $b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + x^s$. Если в произведении данных многочленов мы заменим каждый коэффициент на его остаток от деления на 2, то получим многочлен $a_n b_m x^{n+m} + \cdots + x^{r+s}$. Таким образом в произведении данных многочленов коэффициент при x^{r+s} нечётен, что противоречит условию.

З-ча **3**. Даны две точки A и B и окружность. Найти на окружности точку X так, чтобы прямые AX и BX отсекли на окружности хорду CD, параллельную данной прямой MN.

Реш **3**. Предположим, что мы построили требуемую точку X. Пусть прямая AX пересекает данную окружность S в точке C, а прямая BX — в точке D. Проведём через точку D прямую, параллельную прямой AB; она пересекает окружность S в некоторой точке K. Пусть прямая KC пересекает прямую AB в точке P. Треугольники APC и AXB подобны, поскольку угол A у них общий и $\angle APC = \angle CKD = \angle CXD$. Из подобия этих треугольников следует, что $AP \cdot AB = AC \cdot AX$.

Из этого вытекает следующее построение. Проведём через точку A прямую, пересекающую окружность S в некоторых точках C' и X'. Тогда $AP \cdot AB = AC \cdot AX = AC' \cdot AX'$, поэтому мы можем построить точку P. Далее, нам известен угол CDK (он равен углу между прямыми AB и MN). Поэтому мы знаем длину хорды KC, а значит, мы можем построить окружность S', которая имеет тот же самый центр, что и окружность S, и касается хорды KC. Проведя из точки P касательную к окружности S', находим точку C.

З-ча **4**. Найти остаток от деления на 7 числа

$$10^{10} + 10^{(10^2)} + 10^{(10^3)} + \cdots + 10^{(10^{10})}.$$

Реш **4**. Заметим, что $10^6 \equiv 1 \pmod 7$, поскольку $10^3 + 1$ делится на 7, и $10^k \equiv 4 \pmod 6$ при $k \geqslant 1$, поскольку число $99\ldots96$ чётно и делится на 3. Значит, $10^{10^k} \equiv 10^4 \pmod 7$ при $k \geqslant 1$. Поэтому требуемый остаток равен остатку от деления числа $10 \cdot 10^4 = 10^5$ на 7. Этот остаток равен 5.

З-ча **5**. Дана правильная пирамида. Из произвольной точки P её основания восставлен перпендикуляр к плоскости основания. Доказать, что сумма отрезков от точки P до точек пересечения перпендикуляра с плоскостями граней пирамиды не зависит от выбора точки P на основании.

Реш **5**. Пусть Π — плоскость основания пирамиды, Q — точка пересечения перпендикуляра к плоскости Π, восставленного из точки P, с плоскостью грани пирамиды, R — основание перпендикуляра, опущенного на ребро этой грани, лежащее в плоскости Π. Тогда $PQ = PR \operatorname{tg} \varphi$, где $\varphi = \angle PRQ$. Угол φ — это угол наклона плоскости грани к плоскости основания. Для всех граней пирамиды он один и тот же. Поэтому нужно доказать, что для правильного многоугольника, лежащего в основании пирамиды, имеет место следующее утверждение: «Для любой точки P, лежащей внутри правильного многоугольника, сумма расстояний от P до сторон многоугольника одна и та же.» Чтобы доказать это утверждение, разрежем правильный многоугольник на треугольники, проведя отрезки из точки P в вершины. С одной

стороны, сумма площадей этих треугольников постоянна (она равна площади многоугольника). С другой стороны, она равна половине произведения суммы расстояний от точки P до сторон многоугольника на длину стороны правильного многоугольника.

З-ча **6**. На какое самое большее число частей можно разбить пространство пятью сферами?

Реш **6**. Ответ: на 30 частей.

Пусть a_n — наибольшее число частей, на которые разбивают сферу n окружностей, b_n — наибольшее число частей, на которые разбивают пространство n сфер. Ясно, что $a_2 = 2$ и $b_2 = 2$. Покажем, что $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ и $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$. Прежде всего заметим, что число частей будет наибольшим в том случае, когда никакие три окружности не пересекаются в одной точке и, соответственно, никакие четыре сферы не пересекаются в одной точке и никакие три сферы не имеют общей окружности. Действительно, иначе число частей всегда можно увеличить, слегка пошевелив окружности (сферы). Пусть на сфере дано n окружностей, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Фиксируем одну из них. Оставшиеся окружности разбивают сферу не более чем на a_{n-1} частей, причём возможна конфигурация, когда они разбивают сферу на a_{n-1} частей. Фиксированная окружность пересекает остальные окружности не более чем в $2n-2$ точках, причём случай, когда число точек пересечения равно $2n-2$, возможен. Точки пересечения разбивают фиксированную окружность на $2n-2$ частей; каждая их этих частей окружности добавляет одну новую часть разбиения сферы. Поэтому $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$. Равенство $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$ доказывается аналогично. Таким образом, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 14$ и $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 16$, $b_5 = 30$.

VI олимпиада (1940)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Разложить на множители: $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

Реш **1**. Ответ: $3(b-c)(c-a)(a-b)$.

З-ча **2**. Пароход от Горького до Астрахани идёт 5 суток, а от Астрахани до Горького 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Горького до Астрахани?

Реш **2**. Ответ: 35. Пусть v — скорость течения реки, u — скорость парохода, l — расстояние от Горького до Астрахани. По условию $\frac{l}{u+v}=5$ и $\frac{l}{u-v}=7$; требуется найти l/v. Из системы уравнений $l=5u+5v,\ \ l=7u-7v$ находим $l/v=35$.

З-ча **3**. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 100 включительно?

Реш **3**. Ответ: 24. Среди чисел от 1 до 100 есть 20 чисел, делящихся на 5, и 4 числа, делящихся на 25 (чисел, делящихся на 125, среди них нет). Поэтому рассматриваемое произведение делится на 5^{24} и не делится на 5^{25}. Ясно также, что оно делится на 2^{24}.

З-ча **4**. Провести данным радиусом окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности. Сколько решений имеет эта задача?

Реш **4**. Пусть r — данный радиус, R и O — радиус и центр данной окружности. Центр искомой окружности лежит на окружности S радиуса $|R\pm r|$ с центром O. С другой стороны, её центр лежит на прямой l, параллельной данной прямой и удалённой от неё на расстояние r; таких прямых две. Любая точка пересечения окружности S и прямой l может служить центром искомой окружности. Задача может иметь от 0 до 8 решений.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (x^3+y^3)(x^2+y^2) &= 2b^5,\\ x+y &= b. \end{cases}$$

Реш **1**. Пусть $xy=t$. Тогда $x^2+y^2=b^2-2t$ и $x^3+y^3=b(b^2-3t)$. Поэтому $b(b^2-2t)(b^2-3t)=2b^5$. Если $b=0$, то получаем решение $x=-y$. Если $b\neq 0$, то для t получаем квадратное уравнение $(b^2-2t)(b^2-3t)=2b^4$. Решив его, находим $t_1=b^2$, $t_2=-b^2/6$. Остаётся заметить, что x и y являются корнями квадратного уравнения $X^2-bX+t=0$.

З-ча **2**. Все целые числа выписаны подряд, начиная от единицы. Определить, какая цифра стоит на 206 788-м месте.

Реш **2**. Ответ: цифра 7. Однозначных чисел ровно 9, двузначных $99-9=90$, трёхзначных $999-99-9=900$, четырёхзначных 9000 и т.д. Однозначные числа займут в выписанном ряду первые 9 мест, двузначные $90\cdot 2=180$ мест, трёхзначные $900\cdot 3=2700$ мест, четырёхзначные $9000\cdot 4=36\,000$ мест, пятизначные $90000\cdot 5=450\,000$ мест. Поэтому интересующая нас цифра принадлежит пятизначному числу.

Цифры, принадлежащие не более чем четырёхзначным числам, имеют номера от 1 до $9+180+2700+36\,000=38\,889$. Разность $206\,788-38\,889=167\,899$ нужно разделить на 5 с остатком: $167\,899=5\cdot 33\,579+4$. Интересующая нас цифра принадлежит 33 580-му пятизначному числу, т.е. числу 43 579 (первое пятизначное число — это число 10 000). В этом числе интересующая нас цифра стоит на 4-м месте.

З-ча **3**. Построить окружность, равноудаленную от четырех точек плоскости. Сколько решений имеет задача?

Реш **3**. Ответ: 7 решений (в невырожденном случае).

Пусть A, B, C, D — данные точки, S — искомая окружность. По одну сторону от S лежит k данных точек, по другую сторону лежит $4-k$ данных точек. Мы будем предполагать, что данные точки не лежат на одной окружности (иначе в качестве S можно взять любую окружность с тем же центром; получается бесконечно много решений). Таким образом, $1\leqslant k\leqslant 3$. Мы получаем два существенно различных расположения точек по отношению к S: $2+2$ и $1+3$.

Пусть сначала точки A и B лежат по одну сторону от окружности S, а точки C и D — по другую. Центром окружности S является точка O пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и

CD. Радиус окружности S равен среднему арифметическому длин отрезков OA и OC. Четыре точки можно разбить на пары тремя способами, поэтому мы получаем 3 решения.

Пусть теперь точки A, B и C лежат по одну сторону от окружности S, а точка D — по другую. Проведём через точки A, B и C окружность. Пусть O и R — её центр и радиус. Точка O является центром искомой окружности, а радиус искомой окружности равен среднему арифметическому R и OD. Одну точку из четырёх можно выбрать четырьмя способами, поэтому мы получаем 4 решения.

З-ча **4**. В плоскости даны две прямые. Найти геометрическое место точек, разность расстояний которых от этих прямых равна заданному отрезку.

Реш **4**. Пусть a — заданный отрезок. Пусть, далее, точки пересечения данных прямых l_1 и l_2 с прямыми, параллельными l_1 и l_2 и удалёнными от них на расстояние a, образуют прямоугольник $M_1M_2M_3M_4$. Покажем, что искомое ГМТ — продолжения сторон этого прямоугольника. Опустим из точки X перпендикуляры XA_1 и XA_2 на данные прямые l_1 и l_2. Пусть, например, $XA_1 - XA_2 = a$. Возьмём на луче A_1X точку B так, что $A_1B = a$. Тогда $BX = XA_2$. Пусть M — точка пересечения прямой l_2 и прямой, проходящей через точку B параллельно прямой l_1 (M — это одна из точек M_1, M_2, M_3, M_4). Тогда MX — биссектриса угла BMA_2.

З-ча **5**. Факториалом числа n называется произведение всех целых чисел от 1 до n включительно. Найти все трёхзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

Реш **5**. О т в е т : 145. Пусть $N = 100x + 10y + z$ — искомое число, для которого $N = x! + y! + z!$. Число $7! = 5040$ четырёхзначное, поэтому ни одна цифра числа N не превосходит 6. Поэтому число N меньше 700. Но тогда ни одна цифра числа N не превосходит 5, поскольку $6! = 720$. Неравенство $3 \cdot 4! = 72 < 100$ показывает, что хотя бы одна цифра числа N равна 5. При этом $x \neq 5$, поскольку $3 \cdot 5! = 360 < 500$. Это неравенство показывает также, что $x \leqslant 3$. Более того, $x \leqslant 2$, поскольку $3! + 2 \cdot 5! = 246 < 300$. Число 255 не удовлетворяет условию задачи, а если лишь одна цифра искомого числа равна 5, то $x \leqslant 1$, поскольку $2! + 5! + 4! = 146 < 200$. Так как $1! + 5! + 4! = 145 < 150$, получаем $y \leqslant 4$. Следовательно, $z = 5$. Учитывая, что $x = 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 4$, находим единственное решение $N = 145$.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Найти четырёхзначное число, являющееся точным квадратом, и такое, что две первые цифры одинаковы между собой и две последние также.

Реш **1**. Пусть a — первая и вторая цифры, b — третья и четвёртая. Тогда данное число равно $11(b + 100a)$, поэтому $b + 100a = 11x^2$ для некоторого натурального числа x. Кроме того, $100 \leqslant b + 100a \leqslant 908$, а значит, $3 \leqslant x \leqslant 9$. Вычисляя квадраты чисел $33, 44, \ldots, 99$, получаем, что ровно одно из них имеет требуемый вид: $88^2 = 7744$.

З-ча **2**. Точки A, B, C — вершины вписанного в окружность равностороннего треугольника. Точка D лежит на меньшей дуге AB. $DC = AD + BD$. Доказать.

Реш **2**. Прежде всего заметим, что $\angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$, поскольку эти углы опираются на одну и ту же дугу. Аналогично $\angle BDC = 60^\circ$. Отложим на отрезке CD точки K и L так, чтобы треугольники BDK и ADL были правильными. Треугольники ADB и ALC равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $CL = DB$, а значит, $DC = DL + LC = AD + BD$.

З-ча **3**. Данным четырёхугольником неправильной формы настлать паркет, т.е. покрыть всю плоскость четырёхугольниками, равными данному, без промежутков и перекрытий.

Реш **3**. Составим из четырёх экземпляров данного четырёхугольника фигуру, как показано на рис.???. При этом $ABCD$ — параллелограмм и при сдвигах на векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ одна пара сторон фигуры переходит в другую пару сторон.

Очевидно, что параллелограммами можно покрыть всю плоскость, поэтому полученными фигурами тоже можно покрыть всю плоскость.

З-ча **4**. Сколько существует пар целых чисел x, y, заключённых между 1 и 1000, таких, что $x^2 + y^2$ делится на 7.

Реш **4**. О т в е т : $142^2 = 20164$. Число $x^2 + y^2$ делится на 7 тогда и только тогда, когда оба числа x и y делятся на 7. Действительно, квадрат целого числа при делении на 7 даёт остатки 0, 2 и 4. Количество целых чисел, заключенных между 1 и 1000 и делящихся на 7, равно 142. Поэтому искомое число равно $142^2 = 20164$.

9 — 10 классы

З-ча **1**. На бесконечном конусе, угол развёртки которого равен α, взята точка. Из это точки в обе стороны проводится линия так, что после развёртки она превращается в отрезки прямых. Определить число ее самопересечений.

Реш **1**. О т в е т : число самопересечений равно n, где n — наибольшее натуральное число, для которого $n\alpha < 180^\circ$.

Рассмотрим на плоскости точки S и A, соответствующие вершине конуса и взятой точке при развёртке конуса на эту плоскость. Восставим из точки A перпендикуляр к прямой SA и возьмём на этом перпендикуляре по одну сторону от прямой SA точки $B_1, \ldots, B_n$ так, что $\angle ASB_k = k\frac{\alpha}{2}$ Аналогично по другую сторону от прямой SA возьмём точки $C_1, \ldots, C_n$ так, что $\angle ASC_k = k\frac{\alpha}{2}$. На конусе точка B_k совпадает с точкой C_k; других точек самопересечения проведённой линии нет.

З-ча **2**. Что больше: $300!$ или 100^{300}?

Реш **2**. О т в е т : $300! > 100^{300}$.

Сначала докажем, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ для любого натурального n. Действительно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots < \\ < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots,$$

поскольку $\frac{n-1}{2n} < \frac{1}{2}$, $\frac{n-2}{3n} < \frac{1}{2}$, $\frac{n-3}{4n} < \frac{1}{2}$ и т.д.

Из доказанного неравенства следует, что

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{3}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{3} < n+1.$$

Поэтому индукцией по n получаем неравенство $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$. Остаётся подставить в него $n = 300$.

З-ча **3**. Центр O описанной около треугольника ABC окружности отражается симметрично относительно каждой из сторон. По трем полученным точкам O_1, O_2, O_3 восстановить треугольник ABC, если все остальное стёрто.

Реш **3**. Пусть точки O_1, O_2 и O_3 симметричны точке O относительно сторон BC, CA и AB соответственно. Пусть, далее, A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB. Тогда $BC \| B_1C_1 \| O_2O_3$ и $OA_1 \perp BC$. Поэтому $OO_1 \perp O_2O_3$. Аналогично $OO_2 \perp O_1O_3$ и $OO_3 \perp O_1O_2$. Таким образом, O — точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$. Построив точку O, проводим серединные перпендикуляры к отрезкам OO_1, OO_2, OO_3. Эти прямые образуют треугольник ABC.

З-ча **4**. Доказать неравенство:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n;$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа).

Реш **4**. Числа $b_1 = a_1/a_2$, $b_2 = a_2/a_3, \ldots, b_n = a_n/a_1$ положительны и их произведение равно 1. Поэтому их среднее геометрическое равно 1. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим среднее арифметическое этих чисел не меньше 1, т.е. их сумма не меньше n.

З-ча **5**. Сколько существует положительных целых чисел x, меньших 10 000, для которых $2^x - x^2$ делится на 7?

Реш **5**. О т в е т : 2857. Остатки от деления на 7 чисел 2^x и x^2 повторяются с периодами 3 и 7, поэтому остатки от деления на 7 числа $2^x - x^2$ повторяются с периодом 21. Среди чисел x от 1 до 21 равные остатки от деления на 7 чисел 2^x и x^2 дают ровно 6 чисел. Поэтому среди чисел от 1 до $9996 = 7\cdot 476$ есть $476\cdot 6 = 2856$ требуемых чисел. Непосредственная проверка с использованием полученной последовательности остатков показывает, что из оставшихся чисел 9997, 9998 и 9999 только число 9998 обладает требуемым свойством.

VII олимпиада (1941)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Построить треугольник по высоте и медиане, выходящим из одной вершины, и радиусу описанного круга.

Реш **1**. Пусть ABC — искомый треугольник, AH — высота, AM — медиана, R — радиус описанного круга, O — его центр. Построим прямоугольный треугольник AHM по катету и гипотенузе. Восставим из точки M перпендикуляр l к прямой MH. Точка O является точкой пересечения прямой l с окружностью радиуса R с центром A. Вершины B и C являются точками пересечения прямой MH с окружностью радиуса R с центром O.

З-ча **2**. Дописать к $523\ldots$ три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

Реш **2**. Ответ: 523 152 или 523 656.

Полученное число должно делиться на $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Поделим 523 000 на 504 с остатком: $523\,000 = 1037 \cdot 504 + 352$. Поскольку $504 - 352 = 152$, на 504 делятся числа 523 152 и $523\,152 + 504 = 523\,656$. Других чисел, делящихся на 504, среди чисел от 523 000 до 523 999 нет.

З-ча **3**. Дан четырёхугольник; A, B, C, D — последовательные середины его сторон, P, Q — середины диагоналей. Доказать, что треугольник BCP равен треугольнику ADQ.

Реш **3**. Отрезки AD и CB параллельны одной из диагоналей, а их длина равна половине её длины. Отрезки DQ и BP параллельны одной из сторон четырёхугольника, а их длина равна половине её длины. Отрезки AQ и CP тоже параллельны стороне четырёхугольника и их длина равна половине длине этой стороны.

З-ча **4**. Через точку P, лежащую вне окружности, проводятся всевозможные прямые, пересекающие эту окружность. Найти множество середин хорд, отсекаемых окружностью на этих прямых.

Реш **4**. Пусть O — центр данной окружности, M — середина хорды, отсекаемой от окружности прямой, проходящей через точку P. Тогда $\angle PMO = 90^\circ$. Поэтому искомое множество — часть окружности с диаметром OP, лежащая внутри данной окружности.

З-ча **5**. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с единицей даёт полный квадрат.

Реш **5**. Достаточно заметить, что

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = \big(n(n+3)+1\big)^2.$$

9 — 10 классы

З-ча **1**. См. задачу 2 для 7 — 8 классов.

З-ча **2**. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что их центры лежат в вершинах некоторого квадрата.

Реш **2**. Пусть P, Q и R — центры квадратов, построенных на сторонах DA, AB и BC параллелограмма с острым углом α при вершине A. Легко проверить, что $\angle PAQ = 90^\circ + \alpha = \angle RBQ$, а значит, $\Delta PAQ = \Delta RBQ$. Стороны AQ и BQ этих треугольников перпендикулярны, поэтому $PQ \perp QR$.

З-ча **3**. Доказать, что многочлен с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

принимающий при $x = 0$ и $x = 1$ нечётные значения, не имеет целых корней.

Реш **3**. Пусть $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. По условию числа $a_n = P(0)$ и $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = P(1)$ нечётны. Если x — чётное число, то $P(x) \equiv a_n \pmod 2$. Если x — нечётное число, то $P(x) \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n \pmod 2$. В обоих случаях получаем, что число $P(x)$ нечётно, поэтому оно не может быть равно нулю.

З-ча **4**. Построить треугольник ABC по точкам M и N — основаниям высот AM и BN — и прямой, на которой лежит сторона AB.

Реш **4**. Точки M и N лежат на окружности с диаметром AB. Центр O этой окружности является точкой пересечения прямой AB и серединного перпендикуляра к отрезку NM, поэтому мы можем его

построить. Точки A и B являются точками пересечения прямой AB и окружности с центром O, проходящей через точку M. Поэтому точки A и B можно построить. Точка C после этого строится как точка пересечения прямых AN и BM.

З-ча **5**. Решить уравнение:

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x + 2.$$

Реш **5**. О т в е т : $x = -2$ или $x \geqslant 2$.

Если $x \geqslant 2$, получаем тождество.

Если $1 \leqslant x < 2$, получаем уравнение $4x = 8$, которое не имеет корней на данном интервале.

Если $0 \leqslant x < 1$, получаем уравнение $-2x = 2$, которое не имеет корней на данном интервале.

Если $-1 \leqslant x < 0$, получаем $0 = 2$, чего не может быть.

Если $x < -1$, получаем корень $x = -2$.

З-ча **6**. Сколько корней имеет уравнение

$$\sin x = \frac{x}{100}?$$

Реш **6**. О т в е т : 63.

Прежде всего отметим, что число положительных корней равно числу отрицательных корней, а ещё есть корень 0. Поэтому достаточно убедиться, что число положительных корней равно 31. Если $\sin x = \frac{x}{100}$, то $|x| = 100|\sin x| \leqslant 100$. Рассмотрим графики функций $y = x/100$ и $y = \sin x$. Участок оси Ox от 0 до 100 содержит 15 отрезков длиной 2π и один отрезок длиной меньше 2π. Рассматривая указанные графики, легко убедиться, что на первом отрезке длиной 2π есть один корень данного уравнения, а на каждом из остальных 14 отрезков длиной 2π есть два корня. Вычисления показывают, что длина последнего отрезка больше π, поэтому на нём тоже есть два корня. Всего получаем 31 положительный корень.

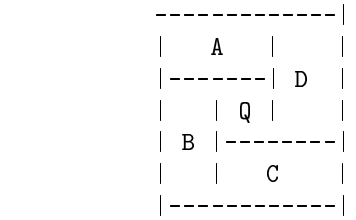
Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Доказать, что из 5 попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник.

Реш **1**. Предположим, что из нескольких попарно различных по величине квадратов сложен прямоугольник. Рассмотрим самый маленький квадрат Q. С одной из его сторон имеет общую часть сторона некоторого большего квадрата A. Сторона квадрата A выходит за пределы стороны квадрата Q. Образовавшийся угол должен быть заполнен некоторым квадратом B, сторона которого снова больше стороны квадрата Q. Получаем ещё один угол, который должен быть заполнен квадратом C, а затем ещё один угол, который должен быть заполнен квадратом D. При этом между квадратами A и D не может быть «колодца» (т.е. квадраты A и D должны иметь общую границу), поскольку иначе для заполнения «колодца» потребовался бы квадрат, который меньше самого маленького квадрата Q.

Итак, если из пяти попарно различных по величине квадратов можно сложить прямоугольник, то мы знаем, как они должны быть сложены: самый маленький квадрат находится в центре, а к нему примыкают четыре других квадрата, образуя следующую конфигурацию (или симметричную ей):



Пусть q, a, b, c, d — длины сторон квадратов. Тогда $a = b + q$, $b = c + q$, $c = d + q$, $d = a + q$. Сложив эти равенства, получим $5q = 0$. Этого не может быть.

З-ча **2**. Дан треугольник ABC. Требуется разрезать его на наименьшее число частей так, чтобы, перевернув эти части на другую сторону, из них можно было сложить тот же треугольник ABC.

Реш **2**.

З-ча **3**. Дан треугольник ABC. Точка M, лежащая внутри него, движется параллельно стороне BC до пересечения со стороной CA, затем параллельно стороне AB до пересечения со стороной BC, затем параллельно стороне CA и т.д. Доказать, что через некоторое число таких шагов точка вернется в исходное положение, и найти это число.

Реш **3**. Пусть A_1, B_1, B_2, C_2, C_3, A_3, A_4, B_4, ... — последовательные точки траектории на сторонах треугольника ABC. Так как $A_1B_1 \| AB_2$, $B_1B_2 \| CA_1$ и $B_1C \| B_2C_2$, то треугольник AB_2C_2 получается из треугольника A_1B_1C параллельным переносом. Аналогично треугольник A_3BC_3 получается из AB_2C_2 параллельным переносом, а A_4B_4C — из A_3BC_3. Но треугольник A_1B_1C тоже получен из треугольника A_3BC_3 параллельным переносом. Поэтому $A_1 = A_4$, т.е. после семи шагов траектория замкнётся. (Если точка M лежит на одной из средних линий треугольника ABC, то траектория замкнётся после четырёх шагов.)

З-ча **4**. Найти целое число a, при котором

$$(x-a)(x-10)+1$$

разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ двух множителей с целыми b и c.

Реш **4**. Пусть $(x-a)(x-10)+1 = (x+b)(x+c)$. Положив $x = -b$, получим $(b+a)(b+10) = -1$. Числа a и b целые, поэтому числа $b+a$ и $b+10$ тоже целые. Число -1 представляется в виде произведения двух множителей двумя способами. Соответственно получаем два варианта: 1) $b+10 = 1$ и $b+a = -1$; 2) $b+10 = -1$ и $b+a = 1$. Поэтому $a = 8$ или $a = 12$. В первом случае $(x-8)(x-10)+1 = (x-9)^2$, а во втором случае $(x-12)(x-10)+1 = (x-11)^2$.

З-ча **5**. Доказать, что квадрат любого простого числа $p > 3$ при делении на 12 дает в остатке 1.

Реш **5**. Посмотрим, какие остатки может давать простое число $p > 3$ при делении на 6. Оно не может давать остаток 2 или 4, поскольку иначе оно было бы чётно. Оно не может давать остаток 3, поскольку иначе оно делилось бы на 3. Значит, простое число $p > 3$ при делении на 6 даёт остаток 1 или 5, т.е. оно имеет вид $6n \pm 1$; его квадрат имеет вид $36n^2 \pm 12n + 1$.

З-ча **6**. Построить треугольник ABC по трем точкам H_1, H_2 и H_3, которые являются симметричными отражениями точки пересечения высот искомого треугольника относительно его сторон.

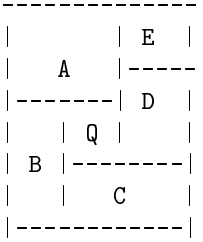
Реш **6**. Пусть точки H_1, H_2 и H_3 симметричны точке пересечения высот H относительно сторон BC, CA и AB. Построение легко вытекает из следующего факта: если треугольник ABC остроугольный, то его вершины являются точками пересечения описанной окружности треугольника $H_1H_2H_3$ с продолжениями его биссектрис, а если, например, угол A тупой, то из точки H_1 нужно снова провести биссектрису, а из точек H_2 и H_3 — биссектрисы внешних углов.

Мы ограничимся разбором случая остроугольного треугольника. Углы BHC и CAB имеют перпендикулярные стороны, поэтому они составляют в сумме 180°. Значит, $\angle BH_1C + \angle BAC = 180°$, т.е. точка H_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC. Аналогично доказывается, что точки H_2 и H_3 тоже лежат на описанной окружности треугольника ABC, поэтому описанные окружности треугольников ABC и $H_1H_2H_3$ совпадают. Далее, $\angle AH_1H_2 = \angle ACH_2 = \angle ACH_3 = \angle AH_1H_3$, поэтому H_1A — биссектриса треугольника $H_1H_2H_3$. Для H_2A и H_3A доказательство аналогично.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Доказать, что из шести попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник.

Реш **1**. Продолжим решение задачи 1 для 7 — 8 классов, пользуясь тем, что там уже доказано. Мы уже знаем, как должны быть расположены самый маленький квадрат и прилегающие к нему квадраты. Поэтому если из шести попарно различных квадратов можно сложить прямоугольник, то они должны быть расположены так:



Но тогда у квадратов D и E есть общая стороны, поэтому они равны. А по условию все квадраты попарно различны.

З-ча **2**. Некоторое количество точек расположено на плоскости так, что каждые 3 из них можно заключить в круг радиуса $r = 1$. Доказать, что тогда и все точки можно заключить в круг радиуса 1.

Реш **2**. Рассмотрим круг, содержащий все данные точки. Будем уменьшать радиус такого круга до тех пор, пока это возможно. Пусть R — радиус полученного круга. На границе этого круга лежат по крайней мере две данные точки. Рассмотрим сначала случай, когда на границе лежат ровно две точки A и B. Ясно, что они — диаметрально противоположные точки круга. Возьмём третью данную точку C. Минимальный радиус круга, содержащего точки A, B и C, равен R, поэтому $R \leqslant 1$. Рассмотрим теперь случай, когда на границе лежат ровно три данные точки A, B и C. Тогда треугольник ABC остроугольный, поскольку иначе можно было бы уменьшить радиус круга, содержащего все данные точки. Поэтому снова минимальный радиус круга, содержащего точки A, B и C, равен R. Рассмотрим наконец случай, когда на границе лежат по крайней мере четыре данные точки. Пусть α_1, α_2, $\ldots$, α_n — угловые величины последовательных дуг, на которые данные точки разбивают границу круга. Если сумма угловых величин двух последовательных дуг не больше 180°, то сотрём их общую точку. Покажем, что при $n \geqslant 4$ такая пара последовательных дуг всегда найдётся. Предположим, что $\alpha_1 + \alpha_2 > 180^\circ$, $\alpha_2 + \alpha_3 > 180^\circ$, $\ldots$, $\alpha_n + \alpha_1 > 180^\circ$. Сложив эти неравенства, получим $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) > n \cdot 180^\circ$, а значит, $4 \cdot 180^\circ > n \cdot 180^\circ$. Получено противоречие. Таким образом, на границе полученного круга лежат либо две диаметрально противоположные данные точки, либо три данные точки, являющиеся вершинами остроугольного треугольника. Такие случаи мы уже разбирали.

З-ча **3**. Найти такие отличные от нуля неравные между собой целые числа a, b, c, чтобы выражение

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$$

разлагалось в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

Реш **3**. Пусть $x(x-a)(x-b)(x-c)+1 = P(x)Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Ясно, что $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены со старшим коэффициентом 1. При $x = 0$, $x = a$, $x = b$ и $x = c$ имеет место равенство $P(x)Q(x) = 1$, т.е. либо $P(x) = 1$ и $Q(x) = 1$, либо $P(x) = -1$ и $Q(x) = -1$. В обоих случаях $P(x) - Q(x) = 0$. Степень многочлена $P(x) - Q(x)$ строго меньше четырёх, поэтому $P(x) = Q(x)$ для всех x. Таким образом, $x(x-a)(x-b)(x-c) = P^2(x) - 1 = \big(P(x)+1\big)\big(P(x)-1\big)$. Поэтому $P(x) \pm 1 = x(x-a)$ и $P(x) \mp 1 = (x-b)(x-c)$, т.е. $x(x-a) - (x-b)(x-c) = \pm 2$ (мы не различаем решения, отличающиеся лишь перестановкой чисел a, b, c). Следовательно, $a = b + c$ и $bc = \mp 2$. В результате получаем следующие наборы значений (a, b, c): $(1, 2, 3)$, $(-1, -2, -3)$, $(1, -2, -1)$, $(2, -1, 1)$. Им соответствуют следующие разложения многочлена $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$: $(x^2-3x+1)^2$, $(x^2+3x+1)^2$, $(x^2+x-1)^2$, $(x^2-x-1)^2$.

З-ча **4**. Решить в целых числах уравнение

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

Реш **4**. Ответ: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

Рассмотрим данное уравнение как квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $-3y^2+6y+1$. Он отрицателен при $y \geqslant 3$ и при $y \leqslant -1$. Поэтому для y получаем три возможных значения: 0, 1, 2. Для каждого из этих значений получаем уравнение, которое легко решается.

З-ча **5**. В пространстве даны две скрещивающиеся перпендикулярные прямые. Найти множество середин всех отрезков данной длины, концы которых лежат на этих прямых.

Реш **5**. Пусть a — расстояние между данными прямыми, d — длина рассматриваемых отрезков. Выберем систему координат так, чтобы точки первой прямой имели координаты $(x, 0, 0)$, а точки второй прямой имели координаты $(0, y, a)$. Нас интересуют пары точек, для которых $x^2 + a^2 + y^2 = d^2$, т.е. $x^2 + y^2 = d^2 - a^2$. Середины отрезка с концами в точках с координатами $(x, 0, 0)$ и $(0, y, a)$ имеет координаты $(x/2, y/2, a/2)$, поэтому искомое множество — окружность радиуса $\sqrt{d^2 - a^2}/2$ с центром $(0, 0, a/2)$, расположенная в плоскости $z = a/2$.

З-ча **6**. Построить прямоугольный треугольник по двум медианам, проведённым к катетам.

Реш **6**. Пусть a и b — длины медиан, x и y — длины катетов. Тогда $\frac{x^2}{4} + y^2 = a^2$ и $x^2 + \frac{y^2}{4} = b^2$. Поэтому $x^2 = \frac{16b^2 - 4a^2}{15}$ и $y^2 = \frac{16a^2 - 4b^2}{15}$.

VIII олимпиада (1945)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Разделить $a^{128}-b^{128}$ на $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})(a^{64}+b^{64})$.

Реш **1**. Ответ: $a-b$. Легко проверить, что если мы умножим $(a+b)(a^2+b^2)\dots(a^{64}+b^{64})$ на $(a-b)$, то получим $a^{128}-b^{128}$.

З-ча **2**. Доказать, что при любом целом положительном n сумма

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

больше $\frac{1}{2}$.

Реш **2**. Сложим $n-1$ неравенств $\frac{1}{n+1}>\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2}>\frac{1}{2n}$, $\dots$, $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$ и равенство $\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}$. В результате получим требуемое.

З-ча **3**. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, даёт полный квадрат. Найти все такие числа.

Реш **3**. Ответ: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

Пусть $10a+b$ — искомое число. По условию число $(10a+b)+(10b+a)=11(a+b)$ является квадратом некоторого числа k. Тогда k делится на 11, а значит, $a+b$ тоже делится на 11. Но $a+b\leqslant 18$, поэтому $a+b=11$.

З-ча **4**. Доказать, что разносторонний треугольник нельзя разрезать на два равных треугольника.

Реш **4**. Предположим, что отрезок CD разрезает разносторонний треугольник ABC на два равных треугольника ACD и BCD. Эти треугольники имеют, в частности, равные площади, поэтому $AD=BD$. Кроме того, сторона CD общая. Следовательно, оставшиеся стороны равны, т.е. $AC=BC$. Приходим к противоречию.

З-ча **5**. К двум окружностям, касающимся извне, проведены общие внешние касательные и точки касания соединены между собой. Доказать, что в полученном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Реш **5**. Пусть O — точка касания окружностей, A и D — точки касания с окружностями одной касательной, B и C — точки касания другой касательной (точки A и B лежат на одной окружности, C и D на другой). Проведём через точку O общую касательную к окружностям. Пусть она пересекает прямые BC и AD в точках P и Q. Две касательные, проведённые из одной точки к окружности, равны, поэтому $PB=PO=PC$ и $QA=QO=QD$. Из этого следует, что: 1) отрезок PQ является средней линией трапеции $ABCD$; 2) длина отрезка PQ равна полусумме длин сторон BC и AD. Остаётся заметить, что длина средней линии трапеции $ABCD$ равна полусумме длин её оснований AB и CD.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Разделить $a^{2^k}-b^{2^k}$ на

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdot\ldots\cdot(a^{2k-1}+b^{2k-1})$$

Реш **1**. Ответ: $a-b$. Легко проверить, что если умножить $(a+b)(a^2+b^2)\cdot\ldots\cdot(a^{2k-1}+b^{2k-1})$ на $a-b$, то получим $a^{2^k}-b^{2^k}$.

З-ча **2**. Найти трёхзначное число, всякая целая степень которого оканчивается на три цифры, составляющие исходное число (в том же порядке).

Реш **2**. Ответ: 376 и 625.

Пусть N — искомое число. Тогда $N^2-N=N(N-1)$ делится на 1000. Числа N и $N-1$ взаимно простые, поэтому одно из них делится на 8, а другое на 125. Пусть сначала $N=125k$. Тогда $k\leqslant 8$. Среди чисел $125k-1$, $k=1,\dots,8$, только число 624 делится на 8. Пусть теперь $N-1=125k$. Тогда $N=125k+1$, поэтому $k\leqslant 7$. Среди чисел $125k+1$, $k=1,\dots,7$, только число 376 делится на 8.

Если $N^2-N=N(N-1)$ делится на 1000, то $N^k-N=N(N^{k-1}-1)$ тоже делится на 1000, поскольку $N^{k-1}-1$ делится на $N-1$.

З-ча **3**. Система уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 0, \\ (x-a)^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

имеет, вообще говоря, четыре решения. При каких значениях a число решений системы уменьшается до трех или до двух?

Реш **3**. Ответ: число решений уменьшается до трёх при $a = \pm 1$, число решений уменьшается до двух при $a = \pm\sqrt{2}$.

Из первого уравнения получаем $y = \pm x$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим

$$(x-a)^2 + x^2 = 1. \tag{1}$$

Число решений системы уменьшается до трёх, если одно из решений уравнения (1) обращается в нуль. Подставив в (1) $x = 0$, получим $a^2 = 1$, т.е. $a = \pm 1$. Число решений системы уменьшается до двух, если уравнение (1) имеет единственный корень (т.е. два совпадающих корня). Приравнивая нулю дискриминант уравнения (1), получаем $a = \pm\sqrt{2}$.

З-ча **4**. Прямоугольный треугольник ABC движется по плоскости так, что его вершины B и C скользят по сторонам данного прямого угла. Доказать, что множеством точек A является отрезок и найти его длину.

Реш **4**. Пусть O — вершина данного прямого угла. Точки O и A лежат на окружности с диаметром BC, поэтому $\angle AOB = \angle ACB = \angle C$. Из этого следует, что точка A движется по прямой, образующей со стороной данного прямого угла угол, равный $\angle C$. В крайних положениях расстояния от точки A до точки O равны гипотенузе BC и наименьшему катету BA. Действительно, $OA = BC\sin\varphi$, где $\varphi = \angle OCA$. Угол φ изменяется от $\angle C$ до $90^\circ + \angle C = 180^\circ - \angle B$, поэтому наибольшее значение $\sin\varphi$ равно 1, а наименьшее значение равно наименьшему из чисел $\sin C$ и $\sin B$. Таким образом, длина отрезка, по которому движется точка A, равна разности между длиной гипотенузы и длиной наименьшего катета прямоугольного треугольника ABC.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Даны 6 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найти сумму всех четырёхзначных чётных чисел, которые можно написать этими цифрами (одна и та же цифра в числе может повторяться).

Реш **1**. Ответ: 1 769 580.

Будем отдельно подсчитывать сумму тысяч, сотен, десятков и единиц для рассматриваемых чисел. На первом месте может стоять любая из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5. Количество всех чисел с фиксированной первой цифрой равно $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$, поскольку на втором и третьем месте может стоять любая из шести цифр, а на четвёртом месте может стоять любая из трёх цифр 0, 2, 4 (мы рассматриваем только чётные числа). Поэтому сумма тысяч равна $(1+2+3+4+5) \cdot 108 \cdot 1000 = 1\,620\,000$. Количество чисел с фиксированной второй цифрой равно $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$ (на первом месте стоит любая из пяти цифр). Поэтому сумма сотен равна $(1+2+3+4+5) \cdot 90 \cdot 100 = 135\,000$. Аналогично сумма десятков равна $(1+2+3+4+5) \cdot 90 \cdot 10 = 13\,500$, а сумма единиц равна $(2+4) \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,080$.

З-ча **2**. Из картона вырезали два одинаковых многоугольника, совместили их и проткнули в некоторой точке булавкой. При повороте одного из многоугольников около этой «оси» на $25^\circ 30'$ он снова совместился со вторым многоугольником. Каково наименьшее возможное число сторон таких многоугольников?

Реш **2**. Ответ: 240. Прежде всего заметим, что $\frac{1}{360} \cdot 25\frac{1}{2} = \frac{17}{240}$, причём числа 17 и 240 взаимно простые. Рассмотрим луч, идущий из «оси» в вершину первого многоугольника. Повороты этого луча вокруг «оси» на углы $k \cdot 25^\circ 30'$, где $k = 1, 2, \ldots, 240$, различны. Действительно, если повороты луча на углы $k_1 \cdot 25^\circ 30'$ и $k_2 \cdot 25^\circ 30'$ совпадают, то число $\frac{(k_1 - k_2)17}{240}$ целое, а значит, $k_1 - k_2$ делится на 240. На каждом из этих 240 лучей есть вершина многоугольника, поэтому число сторон многоугольника не меньше 240. С другой стороны, при повороте правильного 240-угольника на угол $25^\circ 30'$ вокруг центра он совмещается сам с собой.

З-ча **3**. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B. Доказать, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ, которая равна $\frac{1}{n+1}$ части диагонали $\left(AQ = \frac{AC}{n+1}\right)$.

Реш **3**. Разделим сторону BC тоже на n равных частей и проведём через точки деления прямые, параллельные прямой BP. Они разделят диагональ AC на $n+1$ равных частей.

З-ча **4**. Вершины A, B, C треугольника ABC соединены отрезками с точками A_1, B_1, C_1, лежащими на противоположных сторонах треугольника. Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не лежат на одной прямой.

Реш **4**. Пусть A', B', C' — середины сторон BC, CA, AB. Тогда середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на сторонах треугольника $A'B'C'$.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Решить в целых числах уравнение

$$xy + 3x - 5y = -3$$

Реш **1**. Рассматриваемое уравнение можно переписать в виде $(x-5)(y+3) = -18$. Его решения в целых числах соответствуют представлениям числа -18 в виде произведения двух целых чисел.

З-ча **2**. Некоторые из чисел $a_1, a_2, \dots a_n$ равны $+1$, остальные равны -1. Доказать, что

$$2\sin\left(a_1 + \tfrac{a_1a_2}{2} + \tfrac{a_1a_2a_3}{4} + \dots + \tfrac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}{2^{n-1}}\right)\tfrac{\pi}{4} = \\ = a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + a_3\sqrt{2 + \dots + a_n\sqrt{2}}}}.$$

В частности, при $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, имеем:

$$2\sin\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \dots + \tfrac{1}{2^{n-1}}\right)\tfrac{\pi}{4} = 2\cos\tfrac{\pi}{2^{n+1}} = \\ = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}.$$

Реш **2**. Применим индукцию по n. При $n = 1$ получаем очевидное тождество. Равенство

$$2\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \dots + \frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4} = \\ = a_1\frac{\pi}{2} + a_1\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + + \frac{a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}$$

показывает, что

$$\cos 2\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \dots + \frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4} = \\ = -\sin\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + + \frac{a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}.$$

Воспользовавшись этой формулой и тождеством $2\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{2-2\cos\alpha}$, получим

$$2\sin\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \dots + \frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4} = \\ = \pm a_1\sqrt{2 + 2\sin\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \dots + \frac{a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}}.$$

Нетрудно также убедиться, что в действительности всегда берётся знак плюс, поскольку знак числа $a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \dots + \frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^n}$ совпадает со знаком числа a_1. Теперь, воспользовавшись предположением индукции, получаем требуемое тождество.

З-ча **3**. Окружность радиуса, равного высоте некоторого правильного треугольника, катится по стороне этого треугольника. Доказать, что дуга, высекаемая сторонами треугольника на окружности, всё время равна $60°$.

Реш **3**. Обозначим угловую величину дуги, высекаемой сторонами данного правильного треугольника ABC, через α. Будем предполагать, что окружность касается стороны BC. Рассмотрим дугу, высекаемую продолжениями сторон треугольника ABC на окружности, и обозначим её угловую величину через α'. Тогда $(\alpha + \alpha')/2 = \angle BAC = 60°$. Но $\alpha = \alpha'$, так как эти дуги симметричны относительно прямой, проходящей через центр окружности параллельно стороне BC. Поэтому $\alpha = \alpha' = 60°$.

IX олимпиада (1946)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Какое наибольшее число острых углов может встретиться в выпуклом многоугольнике?

Реш **1**. Сумма всех внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°. Поэтому выпуклый многоугольник не может иметь более трёх тупых внешних углов, т.е. он не может иметь более трёх острых внутренних углов. Три острых угла могут быть, например, в треугольнике.

З-ча **2**. На прямой даны 3 точки A, B, C. На отрезке AB построен равносторонний треугольник ABC_1, на отрезке BC построен равносторонний треугольник BCA_1. Точка M — середина отрезка AA_1, точка N — середина отрезка CC_1. Доказать, что треугольник BMN — равносторонний. (Точка B лежит между точками A и C; точки A_1 и C_1 расположены по одну сторону от прямой AB.)

Реш **2**. При повороте на угол 60° вокруг точки B отрезок CC_1 переходит в отрезок A_1A, поэтому точка N переходит в точку M.

З-ча **3**. Найти четырёхзначное число, которое при делении на 131 даёт в остатке 112, а при делении на 132 дает в остатке 98.

Реш **3**. Ответ: 1946. Пусть N — искомое число. По условию $N = 131k + 112 = 132l + 98$, где k и l — натуральные числа. Кроме того, $N < 10\,000$, поэтому $l = \frac{N-98}{132} < \frac{10\,000-98}{132} \leqslant 75$. Далее, $131k + 112 = 132l + 98$, поэтому $131(k-l) = l - 14$. Следовательно, если $k \neq l$, то $|l - 14| \geqslant 131$. Но $l \leqslant 75$, поэтому $k = l$ и $l - 14 = 0$. Таким образом, $N = 131 \cdot 14 + 112 = 132 \cdot 14 + 98 = 1946$.

З-ча **4**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 9, \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 3, \\ x_4 + x_5 + x_6 &= -3, \\ x_5 + x_6 + x_7 &= -9, \\ x_6 + x_7 + x_8 &= -6, \\ x_7 + x_8 + x_1 &= -2, \\ x_8 + x_1 + x_2 &= 2. \end{cases}$$

Реш **4**. Ответ: $x_1 = -x_8 = 1$, $x_2 = -x_2 = 2$, $x_3 = -x_6 = 3$, $x_4 = -x_5 = 4$.

Сложив все уравнения, получим $3(x_1 + x_2 + \cdots + x_8) = 0$. Затем сложим первое уравнение, четвёртое и седьмое. В результате получим $2x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_8 = 1$, а значит, $x_1 = 1$. Остальные неизвестные находятся аналогично.

З-ча **5**. Доказать, что в произведении

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99} + x^{100})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов не остаётся членов, содержащих x в нечётной степени.

Реш **5**. Рассматриваемое произведение является многочленом $P(x)$, обладающим следующим свойством: $P(-x) = P(x)$.

9 — 10 классы

З-ча **1**. В пространстве даны две пересекающиеся плоскости α и β. На линии их пересечения дана точка A. Доказать, что из всех прямых, лежащих в плоскости α и проходящих через точку A, наибольший угол с плоскостью β образует та, которая перпендикулярна к линии пересечения плоскостей α и β.

Реш **1**. Пусть l — прямая, лежащая в плоскости α и проходящая через точку A. Отложим на прямой l отрезок AB длины 1. Пусть B' — проекция точки B на плоскость β, O — проекция точки B на линию пересечения плоскостей α и β. Тогда $\sin BAB' = BB' = OB \sin BOB' = \sin BAO \sin BOB'$. При этом $\sin BOB'$ — синус угла между плоскостями α и β; этот угол фиксирован. Поэтому $\sin BAB'$ максимален, когда $\angle BAO = 90°$.

З-ча **2**. Через точку A, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от этого угла наименьший по площади треугольник. Доказать, что отрезок этой прямой, заключённый между сторонами угла, делится в точке A пополам.

Реш **2**. Пусть PQ — отрезок, который делится точкой A пополам, $P'Q'$ — другой отрезок, проходящий через точку A. Покажем, что отрезок $P'Q'$ отсекает треугольник большей площади, чем отрезок PQ. Пусть для определённости $P'A \geqslant Q'A$. Отложим на отрезке AP' отрезок $AP'' = AQ'$. Треугольники APP'' и AQQ' равны, а треугольник APP' содержит треугольник APP''. Значит, площадь треугольника APP' больше площади треугольника AQQ'. Разность между площадями треугольников, отсекаемых отрезками $P'Q'$ и PQ, равна разности площадей треугольников APP' и AQQ'.

З-ча **3**. Доказать, что $n^2 + 3n + 5$ ни при каком целом n не делится на 121.

Реш **3**. Заметим, что $n^2 + 3n + 5 = (n + 7)(n - 4) + 33$. Если число $n^2 + 3n + 5$ делится на 121, то число $(n + 7)(n - 4)$ делится на 11. Но $(n + 7) - (n - 4) = 11$, поэтому оба множителя делятся или не делятся на 11 одновременно. Следовательно, если число $(n+7)(n-4)$ делится на 11, то оно делится на 121. Но тогда число $(n + 7)(n - 4) + 33$ не может делиться на 121.

З-ча **4**. Доказать, что для любого натурального n справедливо соотношение:

$$\frac{(2n)!}{n!} = 2^n \cdot (2n-1)!!$$

Реш **4**. Ясно, что $n!2^n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n$. Поэтому $n!2^n(2n-1)!! = (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n)1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) = (2n)!$.

З-ча **5**. Доказать, что если α и β — острые углы и $\alpha < \beta$, то

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}.$$

Реш **5**. Возьмём на окружности радиуса 1 с центром O точки K, A и B так, что $\angle AOK = \alpha$ и $\angle BOK = \beta$ (рис.???). Опустим из точки A перпендикуляр AH на прямую OK. Пусть C — точка пересечения этого перпендикуляра и прямой OB. Сравнение площадей сектора OAB и треугольника OAC показывает, что $(\beta - \alpha) < OH \cdot (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$. Сравнение площадей сектора OAK и треугольника OAH показывает, что $\alpha > OH \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Из двух полученных неравенств следует, что

$$\frac{\beta - \alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}, \text{ т.е. } \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. В шахматном турнире[3] участвовали два ученика VII класса и некоторое число учеников VIII класса. Два семиклассника набрали 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? Найти все решения.

Реш **1**. Пусть x — число восьмиклассников, y — число очков, набранных каждым восьмиклассником. Подсчитывая двумя способами сумму очков, набранных всеми участниками турнира, приходим к уравнению

$$xy + 8 = \frac{(x+2)(x+1)}{2},$$

т.е.

$$2y = \frac{(x+2)(x+1) - 16}{x} = x + 3 - \frac{14}{x}.$$

Поэтому x принимает одно из значений 1, 2, 7, 14. Значения 1 и 2 отпадают, поскольку в этих случаях число y будет отрицательным. Задача имеет два ответа: $x = 7$ и $x = 14$.

З-ча **2**. Докажите, что выражение

$$x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$$

не равно 33 ни при каких целых значениях x и y.

[3] По правилам шахматного турнира каждый из участников турнира играет с каждым по одной партии. Если один из играющих выигрывает партию, то он получает одно очко, а его противник получает нуль очков. В случае ничьей играющие получают по 1/2 очка.

Реш **2**. Представим данное выражение в виде

$$(x+2y)(x-y)(x+y)(x-2y)(x+3y).$$

При $y \neq 0$ все пять сомножителей этого произведения попарно различны, а число 33 нельзя представить в виде произведения пяти целых попарно различных сомножителей (хотя и можно представить в виде произведения четырёх попарно различных сомножителей, два из которых равны ± 1). При $y = 0$ рассматриваемое выражение превращается в x^5. Ни при каком целом x число x^5 не равно 33.

З-ча **3**. На сторонах угла AOB от вершины O отложены отрезки OA и OB, причем $OA > OB$. На отрезке OA взята точка M, на продолжении отрезка OB — точка N так, что $AM = BN = x$. Найти значение x, при котором отрезок MN имеет наименьшую длину.

Реш **3**. Ответ: $x = \frac{OA-OB}{2}$.

Пусть $AM' = BN' = \frac{OA-OB}{2}$ (тогда $OM' = ON'$). Возьмём произвольную из рассматриваемых точек $M \neq M'$ и покажем, что $MN > M'N'$. Пусть P — точка пересечения $M'N'$ и MN. Продолжим отрезок $M'N'$ за точку M' и отложим на продолжении отрезок $M'Q = N'P$. Треугольники $MM'Q$ и $NN'P$ равны, поэтому $MN = MP + MQ > PQ = M'N'$.

З-ча **4**. Из тридцати пунктов A_1, A_2, ... , A_{30}, расположенных на прямой MN на равных расстояниях друг от друга, выходят тридцать прямых дорог. Эти дороги располагаются по одну сторону от прямой MN и образуют с MN следующие углы:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
α	60°	30°	15°	20°	155°	45°	10°	35°	140°	50°	125°	65°	85°	86°	80°
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
α	75°	78°	115°	95°	25°	28°	158°	30°	25°	5°	15°	160°	170°	20°	158°

Из всех тридцати пунктов выезжают одновременно тридцать автомобилей, едущих, никуда не сворачивая, по этим дорогам с одинаковой скоростью. На каждом из перекрёстков установлено по шлагбауму. Как только первая по времени машина проезжает перекрёсток, шлагбаум закрывается и преграждает путь *всем* следующим машинам, попадающим на этот перекрёсток. Какие из машин проедут все перекрёстки на своём пути, а какие застрянут?

Реш **4**. Ответ: нигде не будут задержаны машины с номерами 14, 23 и 24.

Пусть a_n — дорога, выходящая из пункта A_n, α_n — угол, который образует дорога a_n с прямой MN, P_{mn} — перекрёсток дорог a_n и a_m.

(1) Если машина a_m задерживается на перекрёстке P_{nm}, то угол α_n ближе к 90°, чем угол α_m (дорога a_n *круче*, чем дорога a_m).

(2) Пусть $m < n$. Тогда дороги a_m и a_n пересекаются, если $\alpha_m < \alpha_n$, и не пересекаются, если $\alpha_m \geqslant \alpha_n$.

(3) Если все дороги, пересекающие a_n, менее круты, чем дорога a_n, то машина a_n нигде не задержится. Это следует из (1).

(4) Пусть a_m — самая крутая из дорог, пересекающих a_n. Если a_m круче a_n, то a_m не может быть задержана раньше перекрёстка P_{nm}. Действительно, предположим, что машина a_m задерживается на перекрёстке P_{qm}, лежащем на отрезке A_mP_{mn}. Тогда согласно (1) дорога a_q круче дороги a_m, а значит, по условию она не может пересекать a_n. Покажем, что это невозможно. Рассмотрим сначала случай, когда точка A_q лежит вне отрезка A_nA_m. Прямая a_q пересекает сторону A_mP_{nm} треугольника $A_mP_{nm}A_n$ и не пересекает сторону A_mA_n, поэтому она пересекает сторону $P_{nm}A_n$, а этого не может быть. Рассмотрим теперь случай, когда точка A_q лежит внутри отрезка A_nA_m. Пусть сначала $n < q < m$. Дороги a_n и a_m, a_q и a_m пересекаются, а дороги a_q и a_n не пересекаются. Поэтому из (2) следует, что $\alpha_q \leqslant \alpha_n < \alpha_m$. Угол α_m ближе к 90°, чем угол α_n, поэтому неравенство $\alpha_n < \alpha_m$ возможно лишь при $\alpha_n < 90°$. Но тогда из неравенства $\alpha_q \leqslant \alpha_n$ следует, что дорога a_q не более крута, чем дорога a_n, что противоречит условию. Случай $n > q > m$ рассматривается аналогично.

(5) Если машина a_n проходит через все перекрёстки, то все дороги, пересекающие a_n, менее круты, чем дорога a_n; это следует из (4) и (1).

Итак, из (3) и (5) следует, что машина a_n проходит через все перекрёстки тогда и только тогда, когда все дороги, пересекающие a_n, менее круты, чем дорога a_n. Теперь уже легко получить требуемый результат.

З-ча **5**. Автобусная сеть города устроена следующим образом: 1) с любой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

2) для любой пары маршрутов найдется, и притом единственная, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

3) на каждом маршруте ровно три остановки.

Сколько автобусных маршрутов в городе?

Реш **5**. Ответ: 7. Докажем, что если выполняются указанные условия, то число остановок n и число маршрутов N связаны соотношением $N = n(n-1)+1$. Пусть a — один из маршрутов, B — остановка, через которую маршрут a не проходит. Каждый маршрут, проходящий через B, пересекает маршрут a. Поэтому через B проходит ровно n маршрутов. Аналогично доказывается, что через каждую остановку маршрута a проходит $n-1$ маршрутов, отличных от a. Всего получаем $n(n-1)$ разных маршрутов и ещё сам маршрут a.

9 — 10 классы

З-ча **1**. В шахматном турнире участвовали ученики IX и X классов. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, и они набрали вместе в $4,5$ раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники? Найти все решения.

Реш **1**. Пусть в турнире участвовало x девятиклассников. Тогда всего было $11x$ участников и они набрали $\dfrac{11x(11x-1)}{2}$ очков. По условию отношение числа очков, набранных девятиклассниками, к числу очков, набранных десятиклассниками, равно $1:4,5$. Поэтому девятиклассники набрали $x(11x-1)$ очков, а значит, каждый из девятиклассников выиграл все $11x-1$ партий, которые он сыграл. Но если бы среди участников турнира было два девятиклассника, то партию между собой они должны были оба выиграть, что невозможно. Поэтому в турнире участвовал один девятиклассник; он набрал 10 очков.

З-ча **2**. Дан ряд чисел: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., в котором каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Найдется ли среди первых ста миллионов одного (10^8+1) членов этого ряда число, оканчивающееся четырьмя нулями?

Реш **2**. Ответ: Да, найдётся. Заменим каждое из данных чисел его остатком от деления на 1000. Пусть $a_1 = 0$, a_2, ... — полученные в результате числа. Если нам известны числа a_k и a_{k+1}, то нам известно и a_{k-1}, поскольку в исходной последовательности $(k-1)$-й член равен разности $(k+1)$-го и k-го. Следовательно, если для некоторых k и n имеют место равенства $a_k = a_{k+n}$ и $a_{k+1} = a_{k+n+1}$, то тогда $a_{k-1} = a_{k+n-1}$, $a_{k-2} = a_{k+n-2}$, ..., $a_1 = a_{n+1}$. Но $a_1 = 0$, поэтому $a_{n+1} = 0$, т.е. в исходной последовательности чисел на $(n+1)$-м месте стоит число, оканчивающееся четырьмя нулями.

Остаётся доказать, что среди пар (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{10^8}, a_{10^8+1}), (a_{10^8+1}, a_{10^8+2}) найдутся две одинаковые пары. Но из чисел 0, 1, 2, ..., 9999 нельзя составить более 10^8 различных пар, а мы рассматриваем 10^8+1 пар.

З-ча **3**. На сторонах PQ, QR, RP треугольника PQR отложены отрезки AB, CD, EF. Внутри треугольника задана точка S_0. Найти геометрическое место точек S, лежащих внутри треугольника PQR, для которых сумма площадей треугольников SAB, SCD, SEF равна сумме площадей треугольников S_0AB, S_0CD, S_0EF. Рассмотреть особый случай, когда

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{CD}{QR} = \frac{EF}{RP}.$$

Реш **3**. Будем считать, что $\frac{AB}{PQ} \geqslant \frac{CD}{QR} \geqslant \frac{EF}{RP}$. Отложим на сторонах QR и PR отрезки $QD' = CD \cdot \frac{PQ}{AB}$ и $PE' = FE \cdot \frac{PQ}{AB}$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SCD} + S_{\Delta SEF} &= \frac{AB}{PQ}\left(S_{\Delta SPQ} + S_{\Delta SQD'} + S_{\Delta SE'P}\right) = \\ &= \frac{AB}{PQ}\left(S_{PQD'E'} \pm S_{\Delta SD'E'}\right). \end{aligned}$$

В последнем выражении знак плюс берётся, если точка S лежит вне четырёхугольника $PQD'E'$, а знак минус — если внутри. Из полученной формулы следует, что для точек S искомого геометрического места площадь треугольника $SD'E'$ должна быть постоянной. Поэтому искомое ГМТ — отрезок прямой, параллельной $D'E'$ и проходящей через точку S_0. В особом случае искомое ГМТ — весь треугольник PQR.

З-ча **4**. В городе 57 автобусных маршрутов. Известно, что:

1) с любой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

2) для любой пары маршрутов найдется, и притом только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

3) на каждом маршруте не менее трёх остановок.

Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

Реш **4**. О т в е т : 8. Докажем, что если выполняются указанные условия, то число остановок n и число маршрутов N связаны соотношением $N = n(n-1)+1$. Прежде всего покажем, что если на каком-то маршруте n остановок, то на любом другом маршруте тоже n остановок, а кроме того, через каждую остановку проходит n маршрутов. Возьмём остановку B, через которую не проходит рассматриваемый маршрут a. Из B есть маршрут в каждую из n остановок маршрута a, причём такой маршрут ровно один, поскольку два разных маршрута не могут иметь двух общих остановок. Каждый маршрут, проходящий через B, пересекает маршрут a. Поэтому через B проходит ровно n маршрутов. Теперь ясно, что маршрут b, не проходящий через остановку B, имеет ровно n остановок. Действительно, через B проходит ровно n маршрутов, каждый из которых пересекает b в одной точке, два маршрута не могут пересекать b в одной и той же точке, и через каждую остановку маршрута b проходит один из этих маршрутов. Теперь видно, что через каждую остановку проходит n маршрутов. В частности, через каждую остановку маршрута a проходит $n-1$ маршрутов, отличных от самого a. Всего получаем $n(n-1)$ разных маршрутов и ещё сам маршрут a.

З-ча **5**. См. задачу 4 для 7 — 8 классов.

X олимпиада (1947)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Определить коэффициенты, которые будут стоять при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(1+x^5+x^7)^{20}.$$

Реш **1**. Число 18 нельзя представить в виде суммы чисел 5 и 7, поэтому коэффициент при x^{18} будет равен нулю.

Число 17 представляется в виде суммы чисел 5 и 7 следующим образом: $17=7+5+5$; с точностью до перестановки слагаемых это представление единственно. В одном из 20 выражений $1+x^5+x^7$ мы должны выбрать x^7, а в двух из 19 оставшихся таких выражений мы должны выбрать x^5. Поэтому коэффициент при x^{17} равен $20\cdot\frac{19\cdot18}{2}=3420$.

З-ча **2**. Какой остаток даёт $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$ при делении на $(x-1)$?

Реш **2**. Ответ: 6. Пусть $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}=P(x)(x-1)+r$. Положив $x=1$, получим $r=6$.

З-ча **3**. Докажите, что каково бы ни было целое число n, среди чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ есть хотя бы одно число взаимно простое с остальными четырьмя из этих чисел.

Реш **3**. Если $|k-l|\leqslant 4$ и $k\neq l$, то наибольший общий делитель чисел k и l не превосходит 4. Поэтому наибольший общий делитель любой пары выбранных чисел не превосходит 4. Из пяти последовательных чисел можно выбрать пару последовательных нечётных чисел. Из двух последовательных нечётных чисел по крайней мере одно не делится на 3. Это число взаимно просто с остальными четырьмя числами.

З-ча **4**. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Сторонами, противоположными вершинам A, B, C, D, E, мы называем соответственно отрезки CD, DE, EA, AB, BC. Докажите, что если произвольную точку M, лежащую внутри пятиугольника, соединить прямыми со всеми его вершинами, то из этих прямых либо ровно одна, либо ровно три, либо ровно пять пересекают стороны пятиугольника, противоположные вершинам, через которые они проходят.

Реш **4**. Проведём диагонали данного пятиугольника. Они разбивают его на 11 областей: один пятиугольник, 5 внутренних треугольников (сторонами которых служат диагонали) и 5 внешних треугольников (одной из сторон каждого из которых служит сторона пятиугольника). Если точка M принадлежит внешнему треугольнику, то число требуемых прямых равно 1, если M принадлежит внутреннему треугольнику, то число прямых равно 3, а если пятиугольнику, то число прямых равно 5.

З-ча **5**. Точка O является точкой пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Докажите, что 3 окружности, проходящие: первая через точки O, A, B, вторая — через точки O, B, C и третья — через точки O, C, A, равны между собой.

Реш **5**. Легко проверить, что $\angle AOB=90^\circ+\angle C$. Поэтому радиус описанной окружности треугольника AOB равен $\frac{1}{2}AB\sin\angle AOB=\frac{1}{2}AB\sin\angle C=R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Радиусы остальных рассматриваемых окружностей тоже равны R.

9 — 10 классы

З-ча **1**. В каком из выражений:

$$(1-x^2+x^3)^{1000},\quad (1+x^2-x^3)^{1000}$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов больший коэффициент при x^{20}?

Реш **1**. Ответ: в выражении $(1+x^2-x^3)^{1000}$. Пусть $P(x)=(1-x^2+x^3)^{1000}$ и $Q(x)=(1+x^2-x^3)^{1000}$. Коэффициент при x^{20} у многочлена $P(x)$ такой же, как у многочлена $P(-x)=(1-x^2-x^3)^{1000}$, а у многочлена $Q(x)$ такой же, как у многочлена $Q(-x)=(1+x^2+x^3)^{1000}$. Ясно, что у многочлена $(1+x^2+x^3)^{1000}$ коэффициент при x^{20} больше, чем у многочлена $(1-x^2-x^3)^{1000}$.

З-ча **2**. Вычислить с недостатком с пятью десятичными знаками (т.е. с точностью до 0, 00001) произведение:

$$\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10^{99}}\right).$$

Докажите точность полученных знаков.

Реш **2**. Ответ: 0, 89001.

Пусть $a = \left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{10^5}\right)$ и $b = \left(1 - \frac{1}{10^6}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{10^{99}}\right)$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$0,\,89001 + \frac{1}{10^6} < a < 0,\,89001 + \frac{2}{10^6}.$$

Ясно, что $b < 1 - \frac{1}{10^6}$. Кроме того, если $0 < x, y < 1$, то $(1 - x)(1 - y) > 1 - x - y$. Поэтому $b > 1 - \frac{1}{10^6} - \frac{1}{10^7} - \cdots - \frac{1}{10^{99}} > 1 - \frac{2}{10^6}$. Следовательно,

$$\begin{array}{rcl} ab < 0,\,890012 \cdot 0,\,999999 & < & 0,\,890012, \\ ab > 0,\,890011 \cdot 0,\,999998 & > & 0,\,890009. \end{array}$$

З-ча **3**. Докажите, что каково бы ни было целое число n, среди чисел n, $n+1$, $n+2$, ... , $n+9$ есть число, хотя бы одно, взаимно простое с остальными девятью из этих чисел.

Реш **3**. Среди данных чисел есть 5 нечётных чисел. Рассмотрим остатки от деления этих пяти чисел на 3, 5 и 7. Среди остатков от деления на 3 нет трёх одинаковых, а среди остатков от деления на 5 и на 7 нет двух одинаковых. Поэтому среди указанных пяти чисел можно выбрать три числа, не делящихся на 3, а среди них выбрать число, не делящееся на 5 и на 7. Это число взаимно просто с остальными девятью числами.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 7 — 8 классов.

З-ча **5**. Найти все прямые в пространстве, проходящие через данную точку M на данном расстоянии d от данной прямой AB.

Реш **5**. Ответ: прямые, лежащие в двух плоскостях, касающихся цилиндра радиуса d с осью AB и проходящих через точку M, за исключением прямой, параллельной AB (если точка M расположена на расстоянии d от прямой AB, то касательная плоскость будет одна и прямую исключать при этом не нужно). Прямые, удалённые на расстояние d от прямой AB, — это в точности прямые, касающиеся указанного цилиндра. Если из этих прямых выбрать те, которые проходят через точку M, то получим указанное в ответе множество.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Некоторые из 20 металлических кубиков, одинаковых по размерам и внешнему виду, алюминиевые, остальные[4] дюралевые (более тяжёлые). Как при помощи 11 взвешиваний на весах с 2-мя чашечками без гирь определить число дюралевых кубиков?

Реш **1**. Положим на чашечки весов по одному кубику. Возможны два случая.

Случай 1. *При первом взвешивании один из кубиков оказался тяжелее.*

В этом случае один выбранный кубик алюминиевый, а другой дюралевый. Положим выбранные кубики на одну чашечку и будем с ними сравнивать остальные кубики. А именно, оставшиеся 18 кубиков разбиваем на 9 пар и поочерёдно кладём их на другую чашечку. Каждый раз мы узнаём, сколько в паре дюралевых кубиков. Действительно, если эталонная пара легче, то мы положили два дюралевых кубика; если эталонная пара имеет тот же самый вес, то мы положили один алюминиевый и один дюралевый кубик; если эталонная пара тяжелее, то мы положили два алюминиевых кубика. Таким образом, в первом случае достаточно 10 взвешиваний.

Случай 2. *При первом взвешивании кубики оказались равного веса.*

В этом случае либо оба выбранных кубика алюминиевые, либо оба дюралевые. Положим выбранные кубики на одну чашечку и будем последовательно с ними сравнивать остальные кубики. Пусть первые k пар оказались того же самого веса, а $(k+1)$-я пара оказалась другого веса. (Если $k = 9$, то все кубики одного веса, поэтому дюралевых кубиков нет.) Пусть для определённости $(k+1)$-я пара оказалась более тяжёлой. Тогда первые два кубика и кубики первых k пар алюминиевые. Положим на каждую чашу весов

[4]Предполагается, что все кубики могут быть алюминиевыми, но они не могут быть все дюралевыми (если все кубики окажутся одного веса, то нельзя выяснить, алюминиевые они или дюралевые) — прим. ред.

по одному кубику $(k+1)$-й пары. Если эти кубики одного веса, то они оба дюралевые. Если кубики разного веса, то один алюминиевый, а другой дюралевый. В обоих случаях мы можем составить пару кубиков, один из которых алюминиевый, а другой дюралевый. Оставшиеся пары кубиков мы можем сравнивать с этой парой, как и в первом случае. Общее число взвешиваний во втором случае равно 11.

З-ча **2**. Докажите, что выпуклый 13-тиугольник нельзя разрезать на параллелограммы.

Реш **2**. У выпуклого многоугольника с нечётным числом сторон есть сторона, не параллельная ни одной из остальных его сторон, поскольку параллельные стороны выпуклого многоугольника разбиваются на пары. А если многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то для каждой его стороны найдётся сторона, ей параллельная.

З-ча **3**. Из двухсот чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... , 199, 200 произвольно выбрали сто одно число. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

Реш **3**. Рассмотрим наибольшие нечётные делители выбранных чисел. У чисел от 1 до 200 есть ровно 100 различных наибольших нечётных делителей (числа 1, 3, ... , 199). Итак, два из выбранных чисел имеют одинаковые наибольшие нечётные делители. Это означает, что два выбранных числа отличаются только тем, что множитель 2 входит в них в разных степенях. Большее из них делится на меньшее.

З-ча **4**. Расположите[5] 4 точки так, чтобы при измерении всех попарных расстояний между ними получалось только два различных числа. Отыщите все такие расположения.

Реш **4**. Требуемые расположения изображены на рис.???. Всего получаем 6 различных вариантов. Чтобы найти все эти варианты, будем поочерёдно разбирать случаи, когда есть 1 отрезок одной длины и 5 отрезков другой длины, 2 отрезка одной длины и 4 отрезка другой длины, 3 отрезка одной длины и 3 отрезка другой длины. Во втором случае отрезки равной длины могут либо иметь общую вершину (рис. б и в), либо не иметь общих вершин (рис. г). В третьем случае отрезки равной длины могут либо образовывать правильный треугольник (рис. д), либо не образовывать правильный треугольник (рис. е). Для варианта (е) несложные вычисления с углами показывают, что искомые точки — это четыре из пяти вершин правильного пятиугольника.

9 — 10 классы

З-ча **1**. В треугольной пирамиде все 4 грани имеют одинаковую площадь. Докажите, что они равны.

Реш **1**. Проведём через прямую AB плоскость, параллельную прямой CD. Пусть C' и D' — проекции точек C и D на эту плоскость. Покажем, что прямая AB делит отрезок $C'D'$ пополам. Действительно, проекция тетраэдра $ABCD$ на плоскость, перпендикулярную прямой AB, представляет собой равнобедренный треугольник, поскольку две его стороны равны высотам (равновеликих) треугольников ACB и ADC, опущенных из вершин C и D на сторону AB. Аналогично доказывается, что прямая CD делит пополам проекцию ребра AB на плоскость, проходящую через прямую CD параллельно прямой AB. Таким образом, $AC'BD'$ — параллелограмм. Из равенства $BC' = AD'$ следует равенство $BC = AD$. Равенства длин остальных пар противоположных рёбер доказываются аналогично.

З-ча **2**. k проволочных треугольников расположены в пространстве так, что:

1) каждые 2 из них имеют ровно одну общую вершину,

2) в каждой вершине сходится одно и то же число p треугольников.

Найдите все значения k и p, при которых указанное расположение возможно.

Реш **2**. Ответ: $(k,p) = (1,1)$, $(4,2)$ или $(7,3)$.

Сначала докажем, что $p \leqslant 3$. Предположим, что $p \geqslant 4$. Возьмём треугольник Δ_1. К его вершине A примыкает треугольник Δ_2. К вершине $B \neq A$ треугольника Δ_2 примыкают треугольники Δ_3, Δ_4, Δ_5; все они отличны от Δ_1, поскольку иначе треугольники Δ_1 и Δ_2 имели бы две общие вершины. По условию каждый из треугольников Δ_3, Δ_4, Δ_5 имеет общую вершину с треугольником Δ_1, причём эта вершина отлична от A. Но из этого следует, что два из треугольников Δ_3, Δ_4, Δ_5 имеют общую вершину, отличную от B.

Если $p = 1$, то $k = 1$ (если бы было хотя бы 2 треугольника, то они имели бы общую вершину, а тогда $p \geqslant 2$).

Пусть в каждой вершине сходятся $p \geqslant 2$ треугольников. Фиксируем один из треугольников. К каждой его вершине примыкает $p-1$ треугольников, т.е. всего к нему примыкает $3(p-1)$ треугольников. Все эти треугольники различны, и других треугольников нет, поскольку любые два треугольника должны иметь общую вершину. Значит, всего получаем $3(p-1)+1 = 3p-2$ треугольников.

[5] На плоскости — прим. ред.

Чтобы построить конфигурацию, для которой $(k,p)=(4,2)$, можно взять октаэдр и выбросить половину его граней, оставив только треугольники, не имеющие общих сторон. Чтобы построить конфигурацию, для которой $(k,p)=(7,3)$, можно взять тетраэдр, поместить внутрь его треугольник ABC и для каждой вершины треугольника ABC взять треугольник, образованный этой вершиной и одним из двух несмежных рёбер тетраэдра (для каждой вершины треугольника ABC берётся своя пара несмежных рёбер тетраэдра).

З-ча **3**. В числовом треугольнике каждое число равно сумме трёх чисел предыдущей строки:

				1				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1

Докажите, что в каждой строке, начиная с 3-й, найдутся чётные числа.

Реш **3**. Выпишем в каждой строке, начиная с третьей, первые четыре числа, заменив каждое чётное число на 0, а нечётное — на 1:

				1	0	1	0
			1	1	0	1	
		1	0	0	0		
	1	1	1	0			
1	0	1	0				
.	.	.	.				

Пятая выписанная строка совпала с первой, поэтому в дальнейшем первые четыре числа будут периодически повторяться. Остаётся заметить, что в каждой из первых пяти выписанных строк есть чётные числа.

З-ча **4**. Из двухсот чисел: 1, 2, 3, ... , 199, 200 выбрали одно число, меньшее 16, и ещё 99 чисел. Докажите, что среди выбранных чисел найдётся хотя бы 2 таких, что одно из них делится на другое.

Реш **4**. Предположим, что из чисел 1, 2, 3, ... , 199, 200 мы выбрали 100 чисел так, что ни одно из них не делится на другое. Достаточно доказать, что среди выбранных чисел нет чисел, меньших 16. Рассмотрим наибольшие нечётные делители всех выбранных чисел. Если наибольшие нечётные делители двух чисел совпадают, то одно из них делится на другое. Поэтому наибольшие нечётные делители выбранных чисел — это в точности все числа 1, 3, 5, ... , 199. В частности, среди выбранных чисел есть числа с наибольшими нечётными делителями 1, 3, 9, 27 и 81. Ни одно из выбранных чисел не делится на другое, поэтому выбранное число с наибольшим нечётным делителем 27 делится на 2, с наибольшим нечётным делителем 9 делится на 2^2, с наибольшим нечётным делителем 3 делится на 2^3, с наибольшим нечётным делителем 1 делится на 2^4. Следовательно, среди выбранных чисел нет чисел 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 и 12. Далее, рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 5, 15 и 45, убеждаемся, что среди выбранных чисел нет чисел 5, 10 и 15; рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 7, 21 и 63, убеждаемся, что нет чисел 7 и 14; рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 11 и 33, убеждаемся, что нет числа 11; рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 13 и 39, убеждаемся, что нет числа 13.

З-ча **5**. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ лежит выпуклый четырёхугольник $A_5A_6A_7A_8$. Внутри $A_5A_6A_7A_8$ выбрана точка A_9. Докажите, что из этих девяти точек можно выбрать 5 точек, расположенных в вершинах выпуклого пятиугольника.

Реш **5**. Предположим, что требуемого выпуклого пятиугольника нет. Проведём из точки A_9 лучи через точки A_5, A_6, A_7, A_8. Эти лучи разбивают плоскость на 4 угла, каждый из которых меньше 180°. Если внутри одного из этих углов лежат две из точек A_1, A_2, A_3, A_4, то мы немедленно получаем требуемый пятиугольник. Поэтому внутри каждого из этих углов лежит ровно одна из указанных точек. Но тогда внутри каждого из двух углов, образованных лучами A_9A_5 и A_9A_7, лежат две из указанных точек. Рассмотрев тот из углов, который меньше 180°, снова получаем требуемый пятиугольник.

XI олимпиада (1948)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Сумма обратных величин трёх целых положительных чисел равна 1. Каковы эти числа? Найти все решения.

Реш **1**. Ответ: $(2,4,4)$, $(2,3,6)$ или $(3,3,3)$.

Пусть $x \leqslant y \leqslant z$ — натуральные числа, причём $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Тогда $x<4$, поскольку иначе $x,y,z \geqslant 4$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqslant \frac{3}{4}<1$.

Если $x=2$, то $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. Значит, $y \leqslant 4$ и мы находим два решения $(2,4,4)$ и $(2,3,6)$.

Если $x=3$, то $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$. Значит, $y \leqslant 3$ и мы находим решение $(3,3,3)$.

З-ча **2**. Сколько цифр имеет число 2^{100}?

Реш **2**. Ответ: 31 цифру. Ясно, что $2^{100}=(1024)^{10}>1000^{10}$, поэтому число 2^{100} имеет не меньше 31 цифры. С другой стороны,

$$\frac{1024^{10}}{1000^{10}}<\left(\frac{1025}{1000}\right)^{10}=\left(\frac{41}{40}\right)^{10}<\frac{41}{40}\cdot\frac{40}{39}\cdot\frac{39}{38}\cdots\frac{32}{31}=\frac{41}{31}<10;$$

Таким образом, $2^{100}=(1024)^{10}<10\cdot 1000^{10}$, поэтому число 2^{100} имеет меньше 32 цифр.

З-ча **3**. На плоскости проведено n прямых линий. Доказать, что области, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно так закрасить двумя красками (каждая область закрашивается только одной краской), что никакие две соседние области (т.е. области, соприкасающиеся только по отрезку прямой) не будут закрашены одной и той же краской.

Реш **3**. Применим индукцию по n. При $n=1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для любой конфигурации из n прямых. Рассмотрим конфигурацию из $n+1$ прямых, выбросим одну прямую и раскрасим требуемым способом плоскость, разбитую оставшимися n прямыми. По одну сторону от выброшенной прямой эту раскраску мы сохраним, а по другую сторону — заменим на противоположную.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Если число $\frac{2^n-2}{n}$ — целое, то и число $\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}$ — целое. Доказать.

Реш **1**. Пусть $2^n-2=nm$. Тогда

$$\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}=2\frac{2^{2^n-2}-1}{2^n-1}=\frac{2^{nm}-1}{2^n-1}=$$
$$=2(2^{n(m-1)}+2^{n(m-2)}+\cdots+2^n+1).$$

З-ча **2**. Доказать без помощи таблиц, что

$$\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>2.$$

Реш **2**. Пусть $\log_2 \pi=a$ и $\log_5 \pi=b$. Тогда $2^a=\pi$ и $5^b=\pi$, т.е. $\pi^{1/a}=2$ и $\pi^{1/b}=5$. Поэтому $\pi^{1/a+1/b}=2\cdot 5=10$. Учитывая, что $\pi^2<10$, получаем требуемое.

З-ча **3**. Даны две треугольные пирамиды $ABCD$ и $A'BCD$ с общим основанием BCD, причем точка A' лежит внутри пирамиды $ABCD$. Доказать, что сумма плоских углов при вершине A' пирамиды $A'BCD$ больше суммы плоских углов при вершине A пирамиды $ABCD$.

Реш **3**. Докажем сначала требуемое утверждение в случае, когда точка A' лежит на ребре AB. Ясно, что $\angle BA'C=\angle BAC+\angle ACA'$ и $\angle BA'D=\angle BAD+\angle ADA'$. Поэтому требуемое неравенство можно преобразовать к виду $\angle ACA'+\angle CA'D+\angle ADA'>\angle CAD$. Учитывая, что $\angle CA'D=180^\circ-\angle A'CD-\angle A'DC$ и $\angle CAD=180^\circ-\angle ACD-\angle ADC$, переходим к неравенству $\angle ACA'+\angle ACD+\angle ADC+\angle ADA'>\angle A'CD+\angle A'DC$. Это неравенство следует из хорошо известных неравенств для трёхгранных углов: $\angle ACA'+\angle ACD>\angle A'CD$ и $\angle ADC+\angle ADA'>\angle A'DC$.

Теперь требуемое неравенство легко доказывается и в общем случае. Для этого сначала рассмотрим точку A_1, в которой плоскость $A'CD$ пересекает ребро AB. Затем рассмотрим точку A_2, к которой прямая CA' пересекает отрезок A_1D. Применив последовательно доказанное неравенство к точкам A_1, A_2 и A', получим требуемое.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Решить в натуральных числах уравнение $x^y = y^x$ $(x \neq y)$. Найти все решения.

Реш **1**. Ответ: $x = 2$, $y = 4$ или $x = 4$, $y = 2$. Из равенства $x^y = y^x$ следует, что простые делители чисел x и y одни и те же, т.е. $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ и $y = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_n^{n_n}$. То же самое равенство показывает, что $a_1 y = b_1 x$, $\dots$, $a_n y = b_n x$. Пусть для определённости $x < y$. Тогда из записанных равенств следует, что $a_1 < b_1$, $\dots$, $a_n < b_n$, т.е. $y = kx$, где k — целое число. Подставляя равенство $y = kx$ в исходное равенство $x^y = y^x$, получаем $x^{kx} = (kx)^x$. Извлекая корень степени x, получаем $x^k = kx$, т.е. $x^{k-1} = k$. По предположению $y > x$, поэтому $k > 1$, а значит, $x > 1$. Ясно, что $2^{2-1} = 2$. Легко также проверить, что если $x > 2$ или $k > 2$, то $x^{k-1} > k$.

З-ча **2**. Доказать, что в любом треугольнике имеет место неравенство: $R \geqslant 2r$ (R и r — радиусы описанного и вписанного кругов соответственно), причем равенство $R = 2r$ имеет место только для правильного треугольника.

Реш **2**. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. При гомотетии с центром в точке пересечения медиан треугольника и коэффициентом гомотетии $-1/2$ описанная окружность S треугольника ABC переходит в описанную окружность S_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Так как окружность S_1 пересекает все стороны треугольника ABC, то можно построить треугольник $A'B'C'$ со сторонами, параллельными сторонам треугольника ABC, для которого S_1 будет вписанной окружностью. Пусть r и r' — радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$; R и R_1 — радиусы окружностей S и S_1. Ясно, что $r \leqslant r' = R_1 = R/2$. Равенство достигается, если треугольники $A'B'C'$ и ABC совпадают, т.е. S_1 — вписанная окружность треугольника ABC. В этом случае $AB_1 = AC_1$, поэтому $AB = AC$. Аналогично $AB = BC$.

З-ча **3**. Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?

Реш **3**. Ответ: нет, не может. Прежде всего заметим, что если O_1 и O_2 — центры симметрии фигуры, то точка $O_3 = S_{O_2}(O_1)$ (т.е. точка, симметричная точке O_1 относительно точки O_2) тоже является центром симметрии. Это следует из равенства $S_{O_3} = S_{O_2} \circ S_{O_1} \circ S_{O_2}$, которое легко проверяется. Действительно, пусть $A_1 = S_{O_2}(A)$, $A_2 = S_{O_1}(A_1)$, $A_3 = S_{O_2}(A_2)$. Тогда $AA_2A_1A_3$ — параллелограмм с центром O_2. Точка O_1 является серединой стороны A_1A_2, поэтому точка O_3 является серединой отрезка AA_3. Предположим, что фигура имеет более одного, но конечное число центров симметрии. Выберем прямую так, чтобы при проекции на неё не все центры симметрии отображались в одну точку. Пусть O_1 и O_2 — центры симметрии, проекции которых являются крайними точками (все остальные проекции центров симметрии заключены между ними). Тогда точка O_3, симметричная точке O_1 относительно точки O_2, не является центром симметрии. Приходим к противоречию.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Найти все рациональные положительные решения уравнения $x^y = y^x$ $(x \neq y)$.

Реш **1**. Пусть $y = kx$. Тогда $x^{kx} = (kx)^x$. Извлекая корень степени x, а затем деля на x, получаем $x^{k-1} = k$. Таким образом, $x = k^{\frac{1}{k-1}}$ и $y = kk^{\frac{1}{k-1}} = k^{\frac{k}{k-1}}$. Число k рационально; пусть $\frac{1}{k-1} = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Подставляя это выражение в формулы для x и y, получаем $x = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p}{q}}$ и $y = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p+q}{q}}$. Числа p и q взаимно просты, поэтому числа x и y могут быть рациональными лишь в том случае, когда из целых чисел p и $p+q$ можно извлечь корень степени q. Но если $q \geqslant 2$ и $p = n^q$, то

$$n^q < p + q < (n+1)^q = n^q + qn^{q-1} + \frac{q(q-1)}{2} n^{q-2} + \dots$$

Поэтому $q = 1$, а значит, $x = \left(\frac{p+1}{p}\right)^p$ и $y = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}$; здесь p — произвольное целое число, отличное от 0 и -1.

З-ча **2**. Поместить в куб окружность наибольшего возможного радиуса.

Реш **2**. Пусть a — длина ребра куба. Сечение куба плоскостью, проходящей через его центр ортогонально одной из диагоналей, является правильным шестиугольником. Радиус вписанной окружности этого шестиугольника равен $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, поэтому в куб можно поместить окружность радиуса $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Покажем, что окружность большего радиуса в куб поместить нельзя. Прежде всего заметим, что достаточно ограничиться рассмотрением окружностей с центром в центре куба. Действительно, если окружность радиуса R содержится в кубе, то окружность, симметричная ей относительно центра куба, тоже содержится в кубе. Но тогда из выпуклости куба следует, что окружность радиуса R, центр которой совпадает с центром куба, а сама она расположена в плоскости, параллельной плоскости исходной окружности, тоже содержится в кубе.

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в центре куба и шар того же радиуса и с тем же центром. Нас интересует лишь случай, когда $R > a/2$ и рассматриваемая окружность лежит внутри куба. В этом случае вне куба находятся шесть шаровых сегментов. Радиусы окружностей, лежащих в их основаниях, равны $r = \sqrt{R^2 - (a/2)^2}$, поэтому r возрастает при возрастании R. Рассмотрим конусы, вершины которых находятся в центре куба, а основаниями служат окружности оснований шаровых сегментов. Если плоскость Π, содержащая рассматриваемую окружность, пересекает один из этих конусов, то часть окружности проходит по шаровому сегменту, а потому частично лежит вне куба. Таким образом, нужно доказать, что если $R > \frac{a\sqrt{6}}{4}$, то плоскость Π пересекает один из конусов. Плоскость Π разбивает лучи, выходящие из центра куба и направленные в середины граней, на две тройки (каждая тройка лежит по одну сторону от плоскости Π). Рассмотрим плоскость Π', которая проходит через центр куба перпендикулярно одной из диагоналей и разбивает эти лучи на те же самые две тройки. В плоскости Π' есть окружность радиуса $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, целиком лежащая внутри куба. Легко проверить, что плоскость Π' касается трёх конусов (соответствующих тройке лучей, которые являются осями этих конусов) по трём лучам OX, OY, OZ. Лучи OX, OY, OZ лежат строго внутри конусов, соответствующих окружности радиуса $R > \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Значит, эти лучи лежат по одну сторону от плоскости Π, поскольку оси соответствующих конусов лежат по одну сторону от этой плоскости. Плоскости Π и Π' имеют общую точку (центр куба), поэтому они пересекаются по некоторой прямой. Лучи OX, OY и OZ образуют друг с другом углы в 120°, поэтому никакая прямая не может разделить плоскость Π' так, чтобы эти лучи лежали в одной полуплоскости. Таким образом, плоскость Π' пересекает один из конусов, если $R > \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

З-ча **3**. Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство $|x| + |y| < 100$?

Реш **3**. О т в е т : 338 350. Уравнения $|x| + |y| = 0$, $|x| + |y| = 1$, $|x| + |y| = 2$, ... , $|x| + |y| = 99$ имеют, соответственно, 1, 2^2, 3^2, ... , 100^2 целочисленных решений. Поэтому искомое число равно $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6}$.

З-ча **3**. Каково наибольшее возможное число лучей в пространстве, выходящих из одной точки и образующих попарно тупые углы?

Реш **3**. О т в е т : 4. Будем рассматривать вместо лучей векторы. Можно считать, что первый вектор имеет координаты $(1, 0, 0)$. Тогда остальные векторы имеют координаты (x_i, y_i, z_i), где $x_i < 0$. Можно считать, что второй вектор имеет координаты $(x_2, 1, 0)$. Тогда остальные векторы имеют координаты (x_i, y_i, z_i), где $x_2 x_i + y_i < 0$. Числа x_2 и x_i отрицательные, поэтому $x_2 x_i > 0$, а значит, $y_i < 0$. При $i, j > 2$ имеет место неравенство $x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j < 0$. Но $x_i x_j > 0$ и $y_i y_j > 0$, поэтому $z_i z_j < 0$, т.е. числа z_i и z_j разного знака. Таких чисел не может быть больше двух.

XII олимпиада (1949)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Показать, что

$$27195^8 - 10887^8 + 10152^8$$

делится без остатка на 26460.

Реш **1**. Заметим, что $26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Представим число $A = 27195^8 - 10887^8 + 10152^8$ в виде $27195^8 - (10887^8 - 10152^8)$. Это число делится на $5 \cdot 7^2$. Действительно, $27195 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 37$, а разность $10887^8 - 10152^8$ делится на $10887 - 10152 = 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$. С другой стороны, представление $A = (27195^8 - 10887^8) + 10152^8$ показывает, что число A делится на $2^2 \cdot 3^3$. Действительно, $27195^8 - 10887^8$ делится на $27195 - 10887 = 16308 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 151$, а $10152 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 47$. Таким образом, число A делится на $5 \cdot 7^2$ и на $2^2 \cdot 3^3$, поэтому оно делится на $26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

З-ча **2**. Доказать, что если многоугольник имеет несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

Реш **2**. Любая ось симметрии многоугольника проходит через его центр масс (центр масс вершин многоугольника, в которые помещены одинаковые массы). Действительно, при симметрии относительно оси симметрии центр масс переходит сам в себя.

З-ча **3**. Доказать, что равенство:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

для целых x, y и z возможно только при $x = y = z = 0$.

Реш **3**. Предположим, что $x = 2^m x_1,\ y = 2^n y_1,\ z = 2^k z_1$, где числа x_1, y_1, z_1 нечётны. Можно считать, что $m \leqslant n \leqslant k$. Тогда обе части уравнения можно сократить на $(2^m)^2$. В результате получим

$$x_1^2 + 2^{(n-m)} y_1^2 + 2^{(k-m)} z_1^2 = 2^{n+k-m+1} x_1 y_1 z_1,$$

где $n + k - m + 1 \geqslant 1$.

Если $n = m = k$, то при делении на 4 число в правой части этого равенства даёт остаток 3, а число в левой части даёт остаток 0 или 2. Если же $k > n$, то число в правой части даёт остаток 1 или 2, а число в левой части — остаток 0. Получено противоречие.

З-ча **4**. Дана плоская замкнутая ломаная периметра 1. Доказать, что можно начертить круг радиусом $\frac{1}{4}$, покрывающий всю ломаную.

Реш **4**. Возьмём на ломаной две точки A и B, делящие её периметр пополам. Тогда $AB \leqslant 1/2$. Докажем, что все точки ломаной лежат внутри круга радиуса $1/4$ в центром в середине O отрезка AB. Пусть M — произвольная точка ломаной, а точка M_1 симметрична ей относительно точки O. Тогда $MO = M_1M/2 \leqslant (M_1A + AM)/2 = (BM + AM)/2 \leqslant 1/4$, так как $BM + AM$ не превосходит половины длины ломаной.

З-ча **5**. Доказать, что для любого треугольника отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей, делится описанной окружностью пополам.

Реш **5**. Пусть продолжение биссектрисы угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M; O — центр вписанной окружности, O_b — центр вписанной окружности, касающейся стороны AC. Достаточно доказать, что $MO = MO_b$. Так как $\angle AOM = \angle BAO + \angle ABO = (\angle A + \angle B)/2$ и $\angle OAM = \angle OAC + \angle CAM = \angle A/2 + \angle CBM = (\angle A + \angle B)/2$, то $MA = MO$. Так как треугольник OAO_b прямоугольный и $\angle AOM = \angle MAO = \varphi$, то $\angle MAO_b = \angle MO_bA = 90^\circ - \varphi$, а значит, $MA = MO_b$.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Найти целые числа x, y, z и v, такие, что

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 2xyzv.$$

Реш **1**. Ответ: $x = y = z = v = 0$.

Число $x^2 + y^2 + z^2 + v^2$ чётно, поэтому среди чисел x, y, z, v чётное число нечётных чисел.

Если все числа x, y, z, v нечётны, то $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 \equiv 0 \pmod 4$, но при этом $2xyzv$ не делится на 4.

Если ровно два из чисел x, y, z, v нечётны, то $x^2+y^2+z^2+v^2$ не делится на 4, а $2xyzv$ делится на 4.

Поэтому все числа x, y, z, v чётны, т.е. $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $v = 2v_1$. Мы получаем уравнение $x_1^2+y_1^2+z_1^2+v_1^2 = 8x_1y_1z_1v_1$. Теперь заметим, что $(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1 \equiv 1 \pmod 8$. Поэтому если все числа x_1, y_1, z_1, v_1 нечётны, то $x_1^2+y_1^2+z_1^2+v_1^2$ не делится на 8. А если ровно два из этих чисел нечётно, то $x_1^2+y_1^2+z_1^2+v_1^2$ не делится даже на 4. Значит, $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$, $v_1 = 2v_2$, и мы получаем уравнение $x_2^2+y_2^2+z_2^2+v_2^2 = 32x_2y_2z_2v_2$. Снова повторив те же самые рассуждения, получим, что x, y, z, v делятся на 2^n при всех n, чего не может быть.

З-ча **2**. Как расположены плоскости симметрии ограниченного тела, если оно имеет две оси вращения? (Осью вращения тела называется прямая, после поворота вокруг которой на любой угол тело совмещается само с собой.)

Реш **2**. Оси вращения ограниченного тела пересекаются в его центре масс. Если тело имеет две оси вращения, пересекающиеся в точке O, и точка A принадлежит телу, то телу принадлежит вся сфера радиуса OA с центром O. Поэтому плоскостью симметрии является любая плоскость, проходящая через точку O.

З-ча **3**. Найти действительные корни уравнения:

$$x^2+2ax+\frac{1}{16} = -a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}} \quad \left(0<a<\frac{1}{4}\right).$$

Реш **3**. Пусть $f(x)$ — левая часть данного уравнения. График функции $y = f(x)$ представляет собой параболу. Если $0 < a < 1/4$, то $f(x) > 0$. Поэтому исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$x^2+2ax+\frac{1}{16} = -a \pm \sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}. \tag{1}$$

Правая часть уравнения (1) представляет собой обратную функцию $f^{-1}(x)$. В самом деле, если $y^2+2ay+\frac{1}{16} = x$, то $y = -a \pm \sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$. Чтобы найти действительные корни данного уравнения, нужно найти точки пересечения графиков $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, поэтому действительные корни данного уравнения являются в точности действительными корнями уравнения

$$x^2+2ax+\frac{1}{16} = x.$$

Решив это уравнение, находим

$$x_{1,2} = \frac{1-2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2-\frac{1}{16}}.$$

З-ча **4**. Имеется $4n$ положительных чисел, таких, что из любых четырёх попарно различных можно составить геометрическую прогрессию. Доказать, что среди этих чисел найдется n одинаковых.

Реш **4**. Покажем, что среди данных чисел не может быть больше четырёх попарно различных чисел. Объединим равные числа в группы, выберем в каждой группе по одному числу и расположим выбранные числа в порядке убывания: $a > b > c > d > e > \ldots$. Числа a, b, c, d по условию образуют геометрическую прогрессию. Но $ab > cd$ и $ac > bd$, поэтому $ad = bc$, т.е. $d = bc/a$. Те же самые рассуждения показывают, что $e = bc/a$.

З-ча **5**. Доказать, что если у шестиугольника противоположные стороны параллельны и диагонали, соединяющие противоположные вершины, равны, то вокруг него можно описать окружность.

Реш **5**. Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, удовлетворяющий условию задачи. Четырёхугольник $FBCE$ является равнобочной трапецией, поэтому прямая MM_1, соединяющая середины её оснований, перпендикулярна к ним и служит биссектрисой угла между диагоналями BE и FC. Точно так же доказываются аналогичные свойства прямых NN_1 и LL_1, соединяющих середины противоположных сторон шестиугольника. Эти три прямые являются биссектрисами углов треугольника, образованного диагоналями, поэтому они пересекаются в одной точке O. Точка O равноудалена от всех вершин шестиугольника, поскольку она лежит на всех серединных перпендикулярах к сторонам шестиугольника. Значит, вокруг шестиугольника можно описать окружность с центром O.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. 12 полей расположены по кругу: на четырёх соседних полях стоят четыре разноцветных фишки: красная, жёлтая, зелёная и синяя.

Одним ходом можно передвинуть любую фишку с поля, на котором она стоит, через четыре поля на пятое (если оно свободно) в любом из двух возможных направлений. После нескольких ходов фишки стали опять на те же четыре поля. Как они могут при этом переставиться?

Реш **1**. Ответ: КЖЗС, СЗКЖ, ЖКСЗ, ЗСЖК.

Сделаем копии наших 12 полей и расположим их по кругу в следующем порядке: 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 12, 5, 10, 3, 8. На новом круге фишки ходят просто на соседнее поле (справа или слева). Поэтому любое передвижение, при котором фишки поменялись местами, представляет собой перемещение по новому кругу в одном направлении. На круге с четырьмя полями с номерами 1, 4, 2, 3 происходит циклическая перестановка, поэтому из набора КСЖЗ мы поучаем наборы СЖЗК, ЖЗКС, ЗКСЖ. Вернувшись к исходной нумерации 1, 2, 3, 4, получим наборы СЗКЖ, ЖКСЗ, ЗСЖК.

З-ча **2**. Даны два треугольника: ΔABC и ΔDEF и точка O. Берется любая точка X в ΔABC и любая точка Y в ΔDEF; треугольник OXY достаивается до параллелограмма $OXZY$.

а) Докажите, что все полученные таким образом точки образуют многоугольник.

б) Сколько сторон он может иметь?

в) Докажите, что его периметр равен сумме периметров исходных треугольников.

Реш **2**. Решим задачу в более общем виде, когда вместо двух треугольников взяты выпуклые n_1-угольник и n_2-угольник. Сначала докажем, что полученная фигура выпукла. Пусть A_1 и A_2 — точки этой фигуры. Тогда существуют параллелограммы $OB_1A_1C_1$ и $OB_2A_2C_2$ с вершинами B_1 и B_2, принадлежащими n_1-угольнику, и вершинами C_1 и C_2, принадлежащими n_2-угольнику. Если мы построим соответствующие точки для всех пар точек отрезков B_1B_2 и C_1C_2, то в результате получим параллелограмм со сторонами, параллельными B_1B_2 и C_1C_2, и с диагональю A_1A_2. (Для доказательства удобнее рассматривать не вершины параллелограмма, а их центры.) В частности, отрезок A_1A_2 принадлежит полученной фигуре, поэтому она выпукла.

Возьмём на плоскости произвольную ось координат Ox. *Опорным множеством* многоугольника, соответствующим оси Ox, назовём множество точек многоугольника, проекции которых на ось Ox имеют наибольшее значение (опорное множество — это вершина или сторона многоугольника). Выпуклый многоугольник задаётся своими опорными множествами для всех возможных осей Ox. Если опорными множествами исходных n_1-угольника и n_2-угольника являются отрезки длины a_1 и a_2, то опорным множеством полученной фигуры будет отрезок длины $a_1 + a_2$. Тем самым утверждение про периметр доказано. Число сторон полученного многоугольника может быть любым числом, заключённым между $n_1 + n_2$ и наибольшим из чисел n_1 и n_2 (оно равно $n_1 + n_2$ лишь в том случае, когда для любой оси Ox одно из опорных множеств исходных многоугольников имеет нулевую длину).

З-ча **3**. Имеется 13 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 12 из них можно так разложить на 2 чаши весов, по 6 гирь на каждой, что наступит равновесие. Докажите, что все гири имеют один и тот же вес.

Реш **3**. Сначала докажем, что все гири одновременно имеют либо чётный, либо нечётный вес. Пусть 12 гирь разложены на две чаши весов по 6 гирь так, что наступило равновесие. Предположим, что отложена гиря весом a г., а одна из гирь, лежащих на чашах, весит b г., причём числа a и b разной чётности. Заменим гирю a гирей b и снова разложим гири так, чтобы наступило равновесие. Вес гирь на каждой чаше весов изменился на $\frac{1}{2}|a-b|$, поэтому число $|a-b|$ чётно.

Предположим, что не все гири одинаковые. Вычтем из каждой гири вес наименьшей гири. В результате получим набор гирь, которые снова удовлетворяют условию задачи (по крайней мере одна из полученных гирь имеет нулевой вес). Все новые гири имеют чётный вес, строго меньший веса первоначальных гирь. Поделив вес каждой гири пополам (в том числе и гири с нулевым весом), мы снова получим набор гирь, удовлетворяющий условию задачи. Если при этом мы не получим гири нечётного веса, то снова поделим веса всех гирь пополам и т.д. В конце концов получим систему гирь, которая удовлетворяет условию задачи и в которой есть как гири чётного (нулевого) веса, так и гири нечётного веса. Но мы уже доказали, что такого быть не может.

З-ча **4**. В произвольном (*выпуклом — прим. ред.*) шестиугольнике соединены через одну середины сторон. Докажите, что точки пересечения медиан двух образовавшихся треугольников совпадают.

Реш **4**. Точкой пересечения медиан каждого из рассматриваемых треугольников служит центр масс

шестиугольника (т.е. центр масс шести вершин шестиугольника, в которые помещены одинаковые массы).

З-ча **5**. Если имеется 100 любых (*целых — прим. ред.*) чисел, то среди них всегда можно взять несколько (или может быть одно) так, что в сумме они дадут число, делящееся на 100. Доказать.

Реш **5**. Пусть $a_1, \ldots, a_{100}$ — данные числа. Рассмотрим суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $S_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$. Если ни одна из этих сумм не делится на 100, то числа $S_1, \ldots, S_{100}$ дают не более 99 различных остатков при делении на 100. Поэтому найдутся числа S_n и S_m $(n > m)$, дающие одинаковые остатки при делении на 100. Но тогда число $S_n - S_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$ делится на 100.

З-ча **6**. Дана окружность и точка вне её; из этой точки мы совершаем путь по замкнутой ломаной, состоящей из отрезков прямых, касательных к окружности, и заканчиваем путь в начальной точке. Участки пути, по которым мы приближались к центру окружности, берём со знаком «плюс», а участки пути, по которым мы удалялись от центра, — со знаком «минус». Докажите, что для любого такого пути алгебраическая сумма длин участков пути, взятых с указанными знаками, равна нулю.

(*Эту задачу не решил никто из участников олимпиады.*)

Реш **6**. Пусть $ABCD\ldots YZ$ — указанная замкнутая ломаная, t_A, t_B, $\ldots$, t_Z — длины касательных к окружности, проведённых из вершин ломаной. В соответствии с соглашением о знаках алгебраическая длина участка пути от A к B равна $t_A - t_B$. Поэтому алгебраическая сумма длин участков пути с указанными знаками равна

$$(t_A - t_B) + (t_B - t_C) + \cdots + (t_Y - t_Z) + (t_Z - t_A) = 0.$$

9 — 10 классы

З-ча **1**. См. задачу 1 для 7 — 8 классов.

З-ча **2**. Сложить из одинаковых кирпичиков (рис.???) выпуклый многогранник.

Реш **2**. Разрежем куб на 8 кубиков. Возьмём один из этих кубиков и приложим к нему три соседних кубика. Куб можно составить из двух таких (невыпуклых) фигур, каждая из которых составлена из четырёх кубиков. Возьмём одну из этих фигур и отрежем от неё три ребра исходного куба, проведя три плоскости, проходящие через диагонали граней маленьких кубиков параллельно рёбрам исходного куба. (Вместе с рёбрами мы отрезаем три треугольные призмы; эти призмы пересекаются.) В результате получим невыпуклую фигуру, которую легко можно разрезать на три кирпичика. Из двух таких фигур составляется выпуклая фигура, которая получается при отрезании от исходного куба шести рёбер (точнее говоря, шести пересекающихся призм).

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 — 8 классов.

З-ча **4**. В данный треугольник поместить центрально–симметричный многоугольник наибольшей площади.

Реш **4**. Пусть O — центр симметрии многоугольника M, расположенного внутри треугольника T, $S(T)$ — образ треугольника T при симметрии относительно точки O. Тогда M лежит и в T, и в $S(T)$. Поэтому среди всех центрально симметричных многоугольников с данным центром симметрии, лежащих в T, наибольшую площадь имеет пересечение T и $S(T)$. Точка O лежит внутри треугольника T, так как пересечением T и $S(T)$ является выпуклый многоугольник, а выпуклый многоугольник всегда содержит свой центр симметрии.

Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника $T = ABC$. Предположим сначала, что точка O лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда пересечением T и $S(T)$ является шестиугольник. Пусть сторона AB делится сторонами треугольника $S(T)$ в отношении $x : y : z$, где $x + y + z = 1$. Тогда отношение суммы площадей треугольников, прилегающих к вершинам A, B, C, к площади треугольника ABC равно $x^2 + y^2 + z^2$; нужно минимизировать это выражение. Так как $1 = (x+y+z)^2 = 3(x^2+y^2+z^2) - (x-y)^2 - (y-z)^2 - (z-x)^2$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1/3$, причем равенство достигается только при $x = y = z$; последнее равенство означает, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Рассмотрим теперь другой случай: точка O лежит внутри одного из треугольников AB_1C_1, ABC_1, A_1B_1C, например внутри AB_1C_1. В этом случае пересечением T и $S(T)$ является параллелограмм, причем если мы заменим точку O точкой пересечения прямых AO и B_1C_1, то площадь этого параллелограмма может только увеличиться. Если же точка O лежит на стороне B_1C_1, то этот случай уже фактически был нами рассмотрен (нужно положить $x = 0$).

Искомым многоугольником является шестиугольник с вершинами в точках, делящих стороны треугольника на три равные части. Его площадь равна $2/3$ площади треугольника.

З-ча **5**. Докажите, что числа вида 2^n при различных целых положительных n могут начинаться на любую наперёд заданную комбинацию цифр.

Реш **5**. Пусть A — данное натуральное число. Покажем, что натуральное число n можно выбрать так, что $10^m A < 2^n < 10^m(A+1)$, т.е. $m + \lg A < n \lg 2 < m + \lg(A+1)$. Эквивалентное условие таково: существуют натуральные числа m и n, для которых $\lg A < n \lg 2 - m < \lg(A+1)$. Число $\lg 2$ иррационально. (Действительно, предположим, что $\lg 2 = p/q$, где p и q — натуральные числа. Тогда $10^{p/q} = 2$, т.е. $10^p = 2^q$. Этого не может быть.) Поэтому остаётся доказать следующее утверждение: «Пусть α — иррациональное число. Тогда для любых чисел $a < b$ можно выбрать целые числа m и n, для которых $a < m\alpha - n < b$.»

Пусть $\Delta = b - a$. Для каждого целого числа m можно выбрать целое число n так, что $0 \leqslant m\alpha - n \leqslant 1$. Разделим отрезок $[0, 1]$ на равные отрезки, длина каждого из которых меньше Δ. Пусть количество этих отрезков равно k. Тогда среди чисел $\alpha - n_1$, $2\alpha - n_2$, ... , $(k+1)\alpha - n_{k+1}$ есть два числа, принадлежащих одному и тому же отрезку. Вычтем из большего числа меньшее: $p\alpha - n_p - (q\alpha - n_q) = t$. Ясно, что $0 \leqslant t < \Delta$. Более того, $t \neq 0$, поскольку иначе $\alpha = \frac{n_p - n_q}{p-q}$ — рациональное число. Рассмотрим числа вида Nt, где N — целое число. Каждое из этих чисел имеет вид $m\alpha - n$. А из того, что $0 < t < \Delta$, следует, что хотя бы одно из этих чисел расположено строго между a и b.

З-ча **6**. Докажите, что к квадрату нельзя приложить более 8 не налегающих друг на друга квадратов.

Реш **6**. Пусть $ABCD$ — исходный квадрат, $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат с тем же центром, стороны которого параллельны сторонам исходного квадрата и имеют вдвое большую длину. Для определённости будем считать, что сторона исходного квадрата равна 2. Тогда периметр квадрата $A_1B_1C_1D_1$ равен 16. Поэтому достаточно доказать, что длина части периметра квадрата $A_1B_1C_1D_1$, высекаемой приложенным квадратом, не может быть меньше 2. Рассмотрим два возможных варианта расположения квадрата $A_1B_1C_1D_1$ и приложенного квадрата.

1) Ни одна вершина квадрата $A_1B_1C_1D_1$ не попадает внутрь приложенного квадрата. В этом случае рассматриваемая часть периметра является отрезком PQ. Если внутри квадрата $A_1B_1C_1D_1$ лежит только одна вершина приложенного квадрата (та, которая примыкает к исходному квадрату), то длина отрезка PQ равна $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \geqslant 2$; здесь α — угол между стороной исходного квадрата и стороной приложенного квадрата. Если внутри квадрата $A_1B_1C_1D_1$ лежат две вершины приложенного квадрата, то отрезок PQ является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетом 2.

2) Одна вершина квадрата $A_1B_1C_1D_1$ попадает внутрь приложенного квадрата. Тогда длина рассматриваемой части периметра равна $a + \operatorname{tg}\alpha + 1 - a\operatorname{tg}\alpha$ (рис.???). Требуется доказать, что $a + \operatorname{tg}\alpha + 1 - a\operatorname{tg}\alpha \geqslant 2$, т.е. $(a-1)\operatorname{tg}\alpha \leqslant (a-1)$. Но $a \geqslant 1$ и $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 1$.

XIII олимпиада (1950)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Имеется шахматная доска с обычной раскраской (границы квадратов считаются окрашенными в чёрный цвет). Начертить на ней окружность наибольшего радиуса, целиком лежащую на чёрном и доказать, что большей начертить нельзя.

Реш **1**. Окружность S, целиком лежащая на чёрном, может пересекать сторону клетки только в вершине (иначе она частично лежала бы на белом). Пусть окружность S проходит через две вершины A и B чёрной клетки. Рассмотрим сначала случай, когда вершины A и B соседние. Возьмём вершину A и рассмотрим другую чёрную клетку вершиной A. Окружность S проходит либо через соседнюю (а именно, ту, которая не лежит на прямой AB), либо через противоположную вершину этой клетки. В первом случае радиус окружности S равен $\sqrt{2}/2$, а во втором — $\sqrt{10}/2$. Рассмотрим теперь случай, когда вершины A и B противоположные. Снова возьмём вершину A и рассмотрим другую чёрную клетку вершиной A. Теперь окружность S обязательно проходит через соседнюю с A вершину другой клетки (если бы она проходила через противоположную вершину, то мы получили бы прямую, а не окружность). Радиус такой окружности равен $\sqrt{10}/2$. В итоге получаем, что наибольший радиус имеет следующая окружность S. Возьмём чёрную клетку и рассмотрим прилегающие к ней белые клетки. Окружность S проходит через 8 вершин этих белых клеток, отличных от вершин исходной чёрной клетки.

З-ча **2**. Имеется 555 гирь весом: 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, ... 555 г. Разложить их на 3 равные по весу кучи.

Реш **2**. Девять гирь весом n, $n+1$, ... , $n+8$ можно разложить на три равные по весу кучи: 1) n, $n+4$, $n+8$; 2) $n+1$, $n+5$, $n+6$; 3) $n+2$, $n+3$, $n+7$. Это позволяет разложить на три равные по весу кучи гири весом 1, 2, ... , $549 = 61 \cdot 9$. Оставшиеся шесть гирь весом 550, 551, ... , 555 можно разложить на три равные по весу кучи следующим образом: 1) 550 и 555; 2) 551 и 554; 3) 552 и 553.

З-ча **3**. Даны 3 окружности O_1, O_2, O_3, проходящие через одну точку O. Вторые точки пересечения O_1 с O_2, O_2 с O_3 и O_3 с O_1 обозначим соответственно через A_1, A_2 и A_3. На O_1 берем произвольную точку B_1. Если B_1 не совпадает с A_1, то проводим через B_1 и A_1 прямую до второго пересечения с O_2 в точке B_2. Если B_2 не совпадет с A_2, то проводим через B_2 и A_2 прямую до второго пересечения с O_3 в точке B_3. Если B_3 не совпадет с A_3, то проводим через B_3 и A_3 прямую до второго пересечения с O_1 в точке B_4. Докажите, что B_4 совпадает с B_1.

Реш **3**. Пусть $\angle(AB, CD)$ — ориентированный угол между прямыми AB и CD. Тогда $\angle(A_3O, A_3B_1) + \angle(A_3B_3, A_3O) = \angle(A_1O, A_1B_1) + \angle(A_2B_3, A_2O) = \angle(A_1O, A_1B_2) + \angle(A_2B_2, A_2O) = 0^\circ$, поэтому точки A_3, B_1 и B_3 лежат на одной прямой. Значит, $B_4 = B_1$.

З-ча **4**. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника; A, B, C — величины противоположных углов. Докажите, что

$$Aa + Bb + Cc \geqslant \frac{1}{2}\left(Ab + Ba + Ac + Ca + Bc + Cb\right).$$

Реш **4**. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, поэтому $(A-B)(a-b) \geqslant 0$, $(B-C)(b-c) \geqslant 0$, $(C-A)(c-a) \geqslant 0$. Сложив эти неравенства, получаем требуемое.

З-ча **5**. Из пункта A в другие можно попасть двумя способами:

1. Выйти сразу и идти пешком.

2. Вызвав машину и, подождав ее определённое время, ехать на ней.

В каждом случае используется способ передвижения, требующий меньшего времени. При этом оказывается, что

если конечный пункт отстоит на	то понадобится на дорогу
1 км	10 мин
2 км	15 мин
3 км	$17\frac{1}{2}$ мин

Скорости пешехода и машины, а также время ожидания машины, принимаются неизменными.

Сколько понадобится времени для достижения пункта, отстоящего от A на 6 км?

Реш **5**. Ответ: 25 мин.

Пусть v — скорость пешехода, V — скорость машины, T — время ожидания машины. (Скорость будем измерять в км/час, а время — в часах.) Если идти пешком, то на дорогу в 1, 2 и 3 км понадобится, соответственно, $1/v$, $2/v$ и $3/v$ часов, а если ехать на машине, то $T+\frac{1}{V}$, $T+\frac{2}{V}$ и $T+\frac{3}{V}$ часов. Предположим,

что 2 км не медленнее пройти пешком, чем ехать на машине, т.е. $T + \frac{2}{V} \geqslant \frac{2}{v}$. Тогда $T + \frac{1}{V} \geqslant \frac{T}{2} + \frac{1}{V} \geqslant \frac{1}{v}$, т.е. 1 км тем более можно идти пешком. Но если можно идти пешком 1 км и 2 км, то тогда затраченное на 2 км время было бы ровно в 2 раза больше, чем на 1 км, а по условию это не так. Поэтому $T + \frac{2}{V} \leqslant \frac{2}{v}$, а значит, $T + \frac{3}{V} \leqslant \frac{3}{2}\left(T + \frac{2}{V}\right) \leqslant \frac{3}{v}$. Следовательно, $1/v = 1/6,\ T + 2/V = 1/4$ и $T + 3/V = 7/24$. Решая эту систему уравнений, находим: $v = 6,\ T = 1/6,\ V = 24$. Если идти 6 км пешком, то на это понадобится 1 час, а если ехать на машине, то понадобится $\frac{1}{6} + \frac{6}{24} = \frac{5}{12}$, т.е. 25 мин.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Пусть A — произвольный угол, B и C — острые углы. Всегда ли существует такой угол X, что

$$\sin X = \frac{\sin B \sin C}{1 - \cos A \cos B \cos C}?$$

(Из «Воображаемой геометрии» Н. И. Лобачевского).

Реш **1**. Ответ: да, всегда. По условию $\cos B \cos C > 0$. Кроме того, $\sin B \sin C + \cos B \cos C = \cos(B - C) \leqslant 1$ и $\cos A \leqslant 1$. Поэтому $\sin B \sin C \leqslant 1 - \cos B \cos C \leqslant 1 - \cos A \cos B \cos C$ и

$$0 < \frac{\sin B \sin C}{1 - \cos A \cos B \cos C} \leqslant 1.$$

З-ча **2**. Из двух треугольных пирамид с общим основанием одна лежит внутри другой. Может ли быть сумма ребер внутренней пирамиды больше суммы ребер внешней?

Реш **2**. Ответ: да, может. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду с основанием BCD и вершиной A. Пусть длина стороны основания равна ε, а длина бокового ребра равна 1. Возьмём на стороне AD точку D' так, что $AD' = \varepsilon$. Если ε мало, то сумма длин рёбер пирамиды $ABCD$ близка к 3, а сумма длин рёбер пирамиды $ABCD'$ близка к 4.

З-ча **3**. Имеется 81 гиря весом 1^2 г, 2^2 г, 3^2 г, ... , 81^2 г. Разложить их на 3 равные по весу кучи.

Реш **3**. Разложим девять гирь весом n^2, $(n+1)^2$, ... , $(n+8)^2$ на три кучи следующим образом: 1) n^2, $(n+5)^2$, $(n+7)^2$; 2) $(n+1)^2$, $(n+3)^2$, $(n+8)^2$; 3) $(n+2)^2$, $(n+4)^2$, $(n+6)^2$. Первые две кучи весят одинаково, а вес третьей кучи на 18 г меньше. Поэтому 27 гирь весом n^2, $(n+1)^2$, ... , $(n+26)^2$ можно разложить на 9 куч так, что 6 куч будут одного веса, а ещё 3 кучи будут весить каждая на 18 меньше, чем первые 6. Из этих девяти куч можно сложить 3 равные по весу кучи. Таким образом, $27k$ гирь весом 1^2, 2^2, 3^2, ... , $(27k)^2$ можно разложить на 3 равные по весу кучи. При $k = 3$ получаем требуемое утверждение.

З-ча **4**. Решить уравнение:

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Реш **4**. Ответ: $5 \leqslant x \leqslant 10$. Заметим, что

$$x + 3 - 4\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 2)^2,$$
$$x + 8 - 6\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 3)^2.$$

Поэтому исходное уравнение можно записать в виде

$$|\sqrt{x-1} - 2| + |\sqrt{x-1} - 3| = 1$$

(все корни мы считаем положительными). Рассмотрим по очереди все возможные случаи.

1. $\sqrt{x-1} - 2 \geqslant 0$ и $\sqrt{x-1} - 3 \geqslant 0$, т.е. $x \geqslant 10$. В этом случае уравнение имеет единственное решение $x = 10$.

2. $\sqrt{x-1} - 2 \geqslant 0$ и $\sqrt{x-1} - 3 \leqslant 0$, т.е. $5 \leqslant x \leqslant 10$. Этом случае получаем тождество, т.е. если $5 \leqslant x \leqslant 10$, то x является корнем данного уравнения.

3. $\sqrt{x-1} - 2 \leqslant 0$ и $\sqrt{x-1} - 3 \leqslant 0$, т.е. $x \leqslant 5$. Уравнение имеет единственное решение $x = 5$.

Случай, когда $\sqrt{x-1} - 2 \leqslant 0$ и $\sqrt{x-1} - 3 \geqslant 0$, очевидно, невозможен.

З-ча **5**. Дано n окружностей: $O_1, O_2, \ldots O_n$, проходящих через одну точку O. Вторые точки пересечения O_1 с O_2, O_2 с $O_3, \ldots, O_3$ с O_1 обозначим соответственно через $A_1, A_2, \ldots, A_n$. На O_1 берем произвольную точку B_1. Если B_1 не совпадает с A_1, то проводим через B_1 и A_1 прямую до второго пересечения с

O_2 в точке B_2. Если B_2 не совпадает с A_2, то проводим через B_2 и A_2 прямую до второго пересечения с O_3 в точке B_3. Продолжая таким образом, мы получим точку B_n на окружности O_n. Если O_n не совпадает с A_n, то проводим через B_n и A_n прямую до второго пересечения с O_1 в точке B_{n+1}. Докажите, что B_{n+1} совпадает с B_1.

Реш **5**. Пусть $\angle(AB,CD)$ — ориентированный угол между прямыми AB и CD (он измеряется с точностью до 180°). Тогда $\angle(B_nA_n, A_nO) = \angle(B_nA_{n-1}, A_{n-1}O) = \angle B_{n-1}A_{n-1}, A_{n-1}O)$. Аналогично получаем $\angle(B_{n-1}A_{n-1}, A_{n-1}O) = \angle(B_{n-2}A_{n-2}, A_{n-2}O) = \cdots = \angle(B_1A_1, A_1O)$. Наконец, $\angle(B_1A_1, A_1O) = \angle(B_1A_n, A_nO)$. В итоге получаем $\angle(B_nA_n, A_nO) = \angle(B_1A_n, A_nO)$. Это означает,что точки A_n, B_1 и B_n лежат на одной прямой. Следовательно, $B_{n+1} = B_n$.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. В выпуклом 13-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на многоугольники. Возьмём среди них многоугольник с наибольшим числом сторон. Какое самое большее число сторон может он иметь?

Реш **1**. О т в е т : 13. Из каждой вершины исходного 13-угольника выходит не более двух диагоналей, которые являются сторонами рассматриваемого многоугольника. Каждой диагонали соответствуют две вершины, поэтому число сторон рассматриваемого многоугольника не превосходит 13. Пример правильного 13-угольника показывает, что число сторон полученного при разрезании многоугольника может быть равно 13.

З-ча **2**. Докажите, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Реш **2**. Пусть $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{99}{100}$ и $B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots\frac{98}{99}$. Ясно, что $B > A$ и $AB = \frac{1}{100}$. Поэтому $A^2 < AB = \frac{1}{100}$.

З-ча **3**. В треугольник вписана окружность. Около неё описан квадрат. Докажите, что вне треугольника лежит меньше половины периметра квадрата.

Реш **3**. Треугольник касается вписанной окружности в трёх точках, а квадрат касается её в четырёх точках. Поэтому между некоторыми двумя точками касания треугольника с окружностью лежат две точки касания квадрата с окружностью. Следовательно, внутри треугольника лежит по крайней мере один «уголок» квадрата (т.е. вершина квадрата вместе с половинами выходящих из неё сторон квадрата). Если таких уголков будет два, то мы сразу получаем, что внутри треугольника лежит по крайней мере половина периметра квадрата. Предположим, что такой уголок только один, т.е. три остальных уголка хотя бы частично лежат вне треугольника (тогда соответствующие вершины квадрата тоже лежат вне треугольника). Покажем, что не менее трети периметра каждого из этих трёх уголков лежит внутри треугольника. Вне треугольника лежит часть уголка, представляющая собой прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Внутри треугольника лежат отрезки $1-a$ и $1-b$ (мы предполагаем, что длина стороны квадрата равна 2). Ясно, что $(1-a)+(1-b) = c$, $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$. Поэтому $a+b \leqslant 2c = 4-2(a+b)$, т.е. $a+b \leqslant 4/3$. Это означает, что вне треугольника лежит не более $2/3$ периметра уголка. Итак, внутри треугольника лежит фигура, имеющая по крайней мере следующий периметр: $2+3\cdot\frac{2}{3} = 4$, а периметр всего квадрата равен 8.

З-ча **4**. На окружности расположены 20 точек. Эти 20 точек попарно соединяются 10 (*непересекающимися — прим. ред.*) хордами. Сколькими способами это можно сделать?

Реш **4**. О т в е т : 16796. Пусть a_n — количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами. Ясно, что $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. Покажем, что

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}a_1 + a_{n-3}a_2 + \cdots + a_1a_{n-2} + a_{n-1}.$$

Фиксируем одну из данных $2n$ точек. Хорда, выходящая из неё, делит окружность на две дуги, причём на каждой дуге расположено чётное число данных точек: от 0 до $2n-2$. Если на одной дуге расположено $2k$ точек, то на другой дуге расположено $2(n-k-1)$ точек; эти точки можно соединить непересекающимися хордами (не пересекающими хорду, выходящую из фиксированной точки) $a_{n-k-1}a_k$ способами.

Таким образом, $a_3 = a_2 + a_1^2 + a_2 = 5$, $a_4 = 14$, $a_5 = 42$, $a_6 = 132$, $a_7 = 429$, $a_8 = 1430$, $a_9 = 4862$ и $a_{10} = 16796$.

Замечание. *Можно доказать, что* $a_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$.

9 — 10 классы

З-ча **1**. В выпуклом 1950-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на многоугольники. Возьмём среди них многоугольник с самым большим числом сторон. Какое наибольшее число сторон он может иметь?

Реш **1**. О т в е т : 1949. Те же самые рассуждения, что и при решении задачи 1 для 7–8 классов, показывают, что полученный многоугольник имеет не более 1950 сторон, причём если число его сторон равно 1950, то из каждой вершины исходного многоугольника выходят ровно две диагонали, ограничивающих полученный многоугольник. Пусть из вершины A_1 выходят две диагонали A_1A_p и A_1A_q, ограничивающие полученный многоугольник. Тогда A_p и A_q — соседние вершины, поскольку иначе внутри угла $A_pA_1A_q$ была бы диагональ, разрезающая полученный многоугольник. Действительно, вершину, лежащую между A_p и A_q, нужно было бы соединить с вершиной, лежащей между A_1 и A_p или между A_1 и A_q. Изменив при необходимости направление нумерации вершин, можно считать, что $q = p + 1$ и $p \leqslant 1950/2 = 975$. Если исключить диагональ A_1A_{p+1}, то любая другая диагональ, ограничивающая полученный многоугольник, соединяет одну из вершин с номером от 2 до p с некоторой вершиной. Поэтому всего у полученного многоугольника может быть не более $1 + 974 \cdot 2 = 1949$ сторон. Чтобы получить пример 1950-угольника, при разрезании которого получается 1949-угольник, можно взять правильный 1949-угольник и отрезать от него маленький треугольник, т.е. вместо вершины A_1 взять две вершины A_1' и A_{1950}, расположенные на сторонах A_1A_2 и A_1A_{1949} вблизи вершины A_1.

З-ча **2**. Числа $1, 2, 3, \ldots 101$ написаны в ряд в каком-то порядке. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся 11 будут расположены по их величине (либо возрастая, либо убывая).

(*Эта задача не была решена никем из участников олимпиады.*)

Реш **2**. Докажем, что любая последовательность из $mn + 1$ попарно различных чисел содержит либо возрастающую последовательность из $m + 1$ чисел, либо убывающую последовательность из $n + 1$ чисел. Сопоставим члену a_k данной последовательности два числа x_k и y_k, где x_k — наибольшая длина возрастающей последовательности, начинающейся с a_k, y_k — наибольшая длина убывающей последовательности, начинающейся с a_k. Предположим, что $x_k \leqslant m$ и $y_k \leqslant n$ для всех k. Тогда количество всех различных пар (x_k, y_k) не превосходит mn. Поэтому $x_k = x_l$ и $y_k = y_l$ для некоторых номеров $k \neq l$. Но этого не может быть. Действительно, пусть для определённости $k < l$. Тогда если $a_k < a_l$, то $x_k > x_l$, а если $a_k > a_l$, то $y_k > y_l$.

З-ча **3**. Около сферы описан пространственный четырёхугольник. Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

Реш **3**. Пусть сфера касается сторон AB, BC, CA и AD в точках K, L, M и N соответственно. Тогда $AN = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ и $DM = DN$. Поэтому

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN}{AN} = 1. \tag{1}$$

Рассмотрим точку N', в которой плоскость KLM пересекает прямую DA. Покажем, что

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN'}{AN'} = 1. \tag{2}$$

Для этого рассмотрим проекцию на прямую, перпендикулярную плоскости KLM. Точки K, L, M и N' при этом проецируются в одну и ту же точку X. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — проекции точек A, B, C, D. Отношения отрезков, лежащих на одной прямой, при проекции сохраняются, поэтому

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN'}{AN'} = \frac{A_1X}{B_1X} \cdot \frac{B_1X}{C_1X} \cdot \frac{C_1X}{D_1X} \cdot \frac{D_1X}{A_1X} = 1.$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $DN : AN = DN' : AN'$, поэтому $N = N'$ (обе точки N и N' лежат на отрезке AD).

З-ча **4**. Можно ли провести в городе 10 автобусных маршрутов и установить на них остановки так, что какие бы 8 маршрутов ни были взяты, найдётся остановка, не лежащая ни на одном из них, а любые 9 маршрутов проходят через все остановки.

Реш **4**. О т в е т : да, можно. Проведём 10 попарно пересекающихся прямых. Пусть маршруты проходят по этим прямым, а остановками служат точки пересечения прямых. Любые 9 маршрутов проходят через все остановки, поскольку через каждую остановку, лежащую на оставшейся прямой, проходит одна из 9 прямых, соответствующих этим маршрутам. Любые 8 маршрутов не проходят через остановку, которая является точкой пересечения двух остальных маршрутов.

XIV олимпиада (1951)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Докажите, что многочлен

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$$

при всех значениях x положителен.

Реш **1**. Если $x \leqslant 0$, то $x^{12},\ -x^9,\ x^4,\ -x \geqslant 0$. Если $0 < x < 1$, то $x^{12} + x^4(1 - x^5) + (1 - x) > 0$. Если $x \geqslant 1$, то $x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1 > 0$.

З-ча **2**. У выпуклых четырёхугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственные стороны равны.

Доказать, что если $\angle A > \angle A'$, то $\angle B < \angle B'$, $\angle C > \angle C'$ и $\angle D < \angle D'$.

Реш **2**. Рассмотрим треугольники BAD и $B'A'D'$. По условию $BA = B'A'$, $AD = A'D'$ и $\angle A > \angle A'$. Из этого следует, что $BD > B'D'$. Рассмотрев теперь треугольники BCD и $B'C'D'$ и воспользовавшись неравенством $BD > B'D'$, получим $\angle C > \angle C'$.

Рассмотрим теперь другие две пары треугольников: ABC и $A'B'C'$, ADC и $A'D'C'$. Если бы имело место неравенство $AC \geqslant A'C'$, то мы получили бы неравенства $\angle B \geqslant \angle B'$ и $\angle D \geqslant \angle D'$. А тогда оказалось бы, что сумма углов четырёхугольника $ABCD$ больше суммы углов четырёхугольника $A'B'C'D'$; такого быть не может. Следовательно, $AC < A'C'$, а поэтому $\angle B < \angle B'$ и $\angle D < \angle D'$.

З-ча **3**. Что больше

$$\frac{2,00000000004}{(1,00000000004)^2 + 2,00000000004}$$

или

$$\frac{2,00000000002}{(1,00000000002)^2 + 2,00000000002}?$$

Реш **3**. Ответ: второе выражение больше. Пусть $a = 1,00000000004$ и $b = 1,00000000002$. Тогда рассматриваемые выражения равны $\frac{1+a}{1+a+a^2}$ и $\frac{1+b}{1+b+b^2}$, причём $a > b$. Остаётся заметить, что

$$\frac{1+b}{1+b+b^2} - \frac{1+a}{1+a+a^2} = \frac{(a-b)(a+b+ab)}{(1+a+a^2)(1+b+b^2)} > 0.$$

З-ча **4**. Точка внутри равнобочной трапеции соединяется со всеми вершинами. Доказать, что из четырёх полученных отрезков можно сложить четырёхугольник, вписанный[6] в эту трапецию.

Реш **4**. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (AB и CD — её основания), P — данная точка. Приложим к трапеции $ABCD$ равную ей трапецию $A'B'C'D'$ так, чтобы вершина C' совместилась с вершиной A, а вершина B' — с вершиной D. Пусть P' — точка трапеции $A'B'C'D'$, соответствующая точке P. Тогда четырёхугольник $PAP'D$ искомый: он вписан в трапецию, одна боковая сторона которой проходит через точку P параллельно BC, а другая — через точку P' параллельно AD.

З-ча **5**. Имеется кусок цепи из 60 звеньев, каждое из которых весит 1 г. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса в 1 г, 2 г, 3 г, ... , 60 г (раскованное звено весит тоже 1 г)?

Реш **5**. Ответ: 3 звена. Выясним, при каком наибольшем n достаточно расковать k звеньев n-звенной цепи, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса от 1 до n. Если расковано k звеньев, то любое число звеньев от 1 до k можно набрать из них. Но $k+1$ звеньев мы не сможем набрать, если не будет части из $k+1$ или менее звеньев (мы здесь не учитываем раскованные звенья). Наиболее выгодно иметь часть из ровно $k+1$ звеньев. Тогда мы сможем получить любое число звеньев от 1 до $2k+1$. (Иначе мы сможем получить лишь число звеньев от 1 до $l_1 + k$, где $l_1 \leqslant k$.) Затем наиболее выгодно иметь часть из $2(k+1)$ звеньев, затем из $4(k+1)$ звеньев и т.д. Итак, если мы расковали k звеньев, то наиболее выгодна ситуация, когда полученные при этом $k+1$ частей состоят из $k+1$, $2(k+1)$, $4(k+1)$, $8(k+1)$, ... , $2^k(k+1)$ звеньев (раскованные звенья мы здесь не учитываем). В таком случае можно составить любое число звеньев от 1 до $n = 2^{k+1}(k+1) - 1$. Итак, если $2^k k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}(k+1) - 1$, то можно обойтись k разрывами и нельзя обойтись $k-1$ разрывами. В частности, если $24 \leqslant n \leqslant 63$, то наименьшее число раскованных звеньев равно 3. Полученные при расковке четыре части цепи должны состоять при этом из 4, 8, 16, 29 звеньев.

[6] Разрешается, чтобы вершины четырёхугольника лежали не только на сторонах трапеции, но и на их продолжениях — прим. ред.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Из всех выпуклых многоугольников, у которых одна сторона равна a и сумма внешних углов при вершинах, не прилегающих к этой стороне, равна 120°, выбрать многоугольник наибольшей площади.

Реш **1**. Ответ: равносторонний треугольник со стороной a. Рассмотрим выпуклый n-угольник $A_1 \dots A_n$ со стороной $A_1A_n = a$, обладающий указанным свойством. Если $n \geqslant 4$, то этот n-угольник можно заменить на $(n-1)$-угольник $A_1 \dots A_{n-3}A'_{n-2}A'_{n-1}$, где $A'_{n-1} = A_n$ и A'_{n-2} — точка пересечения лучей $A_{n-3}A_{n-2}$ и A_nA_{n-1} (эти лучи пересекаются, потому что сумма внешних углов при вершинах A_{n-2} и A_{n-1} меньше 180°). Новый многоугольник имеет строго бóльшую площадь. Поэтому достаточно рассмотреть случай треугольника. У рассматриваемых треугольников фиксирована сторона $BC = a$ и противолежащий угол $\angle A$ (он равен 60°). Точка A расположена на дуге окружности, из которой отрезок BC виден под углом 60°. Поэтому высота, опущенная из точки A, максимальна в случае равнобедренного треугольника.

З-ча **2**. Докажите, что первые три цифры частного

$$\frac{0,1234567891011\dots4748495051}{0,51504948\dots4321}$$

суть $0,239$.

Реш **2**. Пусть $a = 0,1234\dots5051$ и $b = 0,5150\dots321$. Требуется доказать, что $0,239b \leqslant a < 0,24b$. Но $0,515 < b < 0,516$, поэтому $0,239b < 0,239 \cdot 0,516 = 0,123324 < a$ и $0,24b > 0,24 \cdot 0,515 = 0,1236 > a$.

З-ча **3**. Имеются две концентрические окружности. Вокруг меньшей из них описан многоугольник, целиком находящийся внутри большей окружности. Из общего центра на стороны многоугольника опущены перпендикуляры, которые продолжены до пересечения с большей окружностью; каждая из полученных точек пересечения соединена с концами соответствующей стороны многоугольника. При каком условии построенный так звёздчатый многоугольник будет развёрткой пирамиды?

Реш **3**. Ответ: при условии, что $R > 2r$, где R — радиус большей окружности, r радиус меньшей окружности.

Чтобы получилась развёртка пирамиды, нужно, чтобы выполнялись два условия: 1) длины двух сторон звёздчатого многоугольника, выходящих из одной вершины описанного многоугольника, равны; 2) сумма углов звёздчатого многоугольника при вершинах, лежащих на большей окружности, меньше 360°. Первое условие выполняется всегда. Посмотрим, когда выполняется второе условие. Сравним угол при вершине, лежащей на большей окружности, с углом, под которым видна соответствующая сторона описанного многоугольника из центра окружности. Эти углы равны, если $r = R - r$. Если $r < R - r$, то первый угол меньше второго, а если $r > R - r$, то первый угол больше второго. Остаётся заметить, что сумма углов, под которыми видны стороны описанного многоугольника из центра окружности, равна 360°.

З-ча **4**. Имеется кусок цепи из 150 звеньев, каждое из которых весит 1 г. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса в 1 г, 2 г, 3 г, ... , 150 г (раскованное звено весит тоже 1 г)?

Реш **4**. Ответ: 4 звена. Согласно решению задачи 5 для 7–8 классов для цепи, состоящей из n звеньев, где $64 \leqslant n \leqslant 159$, достаточно расковать 4 звена.

З-ча **5**. Даны три параллельные прямые на равных расстояниях друг от друга. Как надо изображать точками соответствующих прямых величины сопротивления, напряжения и силы тока в проводнике, чтобы, прикладывая линейку к точкам, изображающим значения сопротивления R и значения силы тока I, получить на шкале напряжения точку, изображающую величину напряжения $V = I \cdot R$ (точка каждой шкалы изображает одно и только одно число).

Реш **5**. Пусть некоторая прямая пересекает данные прямые в точках O_1, O_2, O_3. Введём на данных прямых координаты x, y, z с началами координат в точках O_1, O_2, O_3 (единица длины одна и та же и направления осей одни и те же). Положим $I = 10^x$ (т.е. точке с координатой x мы сопоставляем силу тока $I = 10^x$), $R = 10^{-2y}$ и $U = 10^{-z}$. Точки с координатами x, y, z лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $x + z = 2y$, т.е. $10^{-z} = 10^x \cdot 10^{-2y}$. Это означает, что $V = I \cdot R$.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Докажите, что число

$$1\underbrace{00\dots0}_{49}\underbrace{500\dots0}_{99}1$$

не является кубом никакого целого числа.

Реш **1**. Рассматриваемое число равно $10^{150}+5\cdot 10^{100}+1$. Оно больше $(10^{50}+1)^3=10^{150}+3\cdot 10^{100}+3\cdot 10^{50}+1$, но меньше $(10^{50}+2)^3=10^{150}+6\cdot 10^{100}+12\cdot 10^{50}+8$.

З-ча **2**. На плоскости даны три точки A, B, C и три угла $\angle D$, $\angle E$, $\angle F$, меньшие 180° и в сумме равные 360°. Построить с помощью линейки и транспортира точку O плоскости такую, что $\angle AOB=\angle D$, $\angle BOC=\angle E$, $\angle COA=\angle F$ (с помощью транспортира можно измерять и откладывать углы).

Реш **2**. Если требуемая точка O существует, то она должны лежать внутри треугольника ABC. В таком случае должны выполняться неравенства $\angle D<\angle C$, $\angle E<\angle A$, $\angle F<\angle B$. Мы будем предполагать, что эти неравенства выполняются.

Построим внешним образом на стороне AB треугольника ABC треугольник ABC_1 так, что $\angle C_1AB=180^\circ-\angle E$ и $\angle C_1BA=180^\circ-\angle F$. Аналогично построим точки A_1 и B_1 так, что $\angle A_1BC=180^\circ-\angle F$, $\angle A_1CB=180^\circ-\angle D$, $\angle B_1CA=180^\circ-\angle D$ и $\angle B_1AC=180^\circ-\angle E$. Покажем, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, причём эта точка — искомая точка O.

Пусть O_1 — точка пересечения описанных окружностей треугольников AB_1C и A_1BC. Тогда $\angle AO_1C=\angle F$ и $\angle BO_1C=\angle E$. Из этого легко выводится, что описанная окружность треугольника ABC_1 тоже проходит через точку O_1 и $\angle AO_1B=D$. Значит, $\angle AO_1B_1=\angle ACB_1=180^\circ-\angle D=\angle BCA_1=\angle BO_1A_1$. Поэтому прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O_1. Аналогично доказывается, что прямая CC_1 проходит через точку O_1. Уже проведённые вычисления углов показывают, что O_1 — это искомая точка O.

З-ча **3**. На консультации было 20 школьников и разбиралось 20 задач. Оказалось, что каждый из школьников решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решённых им задач и все задачи были разобраны.

Реш **3**. Начнём разбор задач с того, что произвольный школьник расскажет одну из решённых им задач. Пусть этот школьник решил задачи a_1 и a_2, а рассказал он задачу a_1. Тогда есть ровно один школьник, который тоже решил задачу a_2 (и ещё задачу a_3). Этот школьник расскажет задачу a_2. Затем школьник, который решил задачи a_3 и a_4, расскажет задачу a_3 и т.д. Так мы дойдём до n-го школьника, который решил задачи a_n и a_k, где $1\leqslant k\leqslant n-1$. Нужно понять, что делать, если $n<20$. Ясно, что $k=1$. Действительно, задачу a_k, где $2\leqslant k\leqslant n-1$, решили два школьника с номерами $k-1$ и k. Пусть n-й школьник расскажет задачу a_n. Для оставшихся школьников и оставшихся задач выполняется то же самое условие: каждый из школьников решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Поэтому можно повторить то же самое и т.д.

З-ча **4**. Проекцией точки A из точки O на плоскость P называется точка A', в которой прямая OA пересекает плоскость P. Проекцией треугольника называется фигура, состоящая из всех проекций его точек. Какими фигурами может быть проекция треугольника, если точка O не лежит в его плоскости?

Реш **4**. Пусть ABC — данный треугольник. Рассмотрим полный трёхгранный угол $OABC$ с вершиной O, состоящий из двух трёхгранных углов (рёбрами одного угла являются лучи OA, OB, OC, а рёбрами другого — их продолжения). Проекция треугольника ABC на плоскость P совпадает с пересечением плоскости P и полного трёхгранного угла $OABC$. В зависимости от взаимного расположения плоскости и трёхгранного угла возникают следующие варианты.

1) Плоскость P параллельна двум рёбрам и пересекает третье. В проекции получается угол.

2) Плоскость P параллельна одному ребру и пересекает два других, причём оба — с одной стороны от вершины O. В проекции получается полоса, ограниченная двумя параллельными прямыми и пересекающими их третьей прямой.

3) Плоскость P параллельна одному ребру и пересекает два других, причём по разные стороны от вершины O. В проекции получаются два угла, у которых сторона одного служит продолжением стороны другого, а две другие стороны параллельны и противоположно направлены.

4) Плоскость P пересекает все три ребра, причём все три — с одной стороны от вершины O. В проекции получается треугольник.

5) Плоскость P пересекает все три ребра, причём два — с одной стороны от вершины O, а одно — с другой. В проекции получается фигура, состоящая из угла и бесконечной фигуры, которая ограничена продолжениями сторон этого угла и прямой, их пересекающей.

З-ча **5**. При делении многочлена $x^{1951}-1$ на $x^4+x^3+2x^2+x+1$ получается частное и остаток. Найти в частном коэффициент при x^{14}.

Реш **5**. О т в е т : -1. Равенства $x^4+x^3+2x^2+x+1=(x^2+1)(x^2+x+1)$ и $x^{12}-1=(x-1)(x^2+x+$

$1)(x^3+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$ показывают, что

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=\frac{x^{12}-1}{(x-1)(x^3+1)(x^4-x^2+1)}=$$
$$=\frac{x^{12}-1}{x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1}.$$

Поэтому поделить многочлен $x^{1951}-1$ на $x^4+x^3+2x^2+x+1$ — это то же самое, что сначала поделить его на $x^{12}-1$, а потом умножить на $x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1$. Но

$$\frac{x^{1951}-1}{x^{12}-1}=x^{1939}+x^{1927}+x^{1915}+\cdots+x^{19}+x^7+\frac{x^7-1}{x^{12}-1},$$

поэтому искомый коэффициент равен коэффициенту при x^{14} в произведении

$$\left(x^{1939}+\cdots+x^{19}+x^7+\frac{x^7-1}{x^{12}-1}\right)(x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1).$$

9 — 10 классы

З-ча **1**. Все рёбра треугольной пирамиды равны a. Найти наибольшую площадь, которую может иметь ортогональная проекция этой пирамиды на плоскость.

Реш **1**. Ответ: $a^2/2$. Проекция тетраэдра может быть треугольником или четырехугольником. В первом случае она является проекцией одной из граней, поэтому ее площадь не превосходит $\sqrt{3}a^2/4$. Во втором случае диагонали четырехугольника являются проекциями рёбер тетраэдра, поэтому площадь ортогональной проекции, равная половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними, не превосходит $a^2/2$; равенство достигается, когда пара противоположных рёбер тетраэдра параллельна данной плоскости. Остаётся заметить, что $\sqrt{3}a^2/4<a^2/2$.

З-ча **2**. Имеется несколько чисел, каждое из которых меньше чем 1951. Общее наименьшее кратное любых двух из них больше чем 1951. Доказать, что сумма обратных величин этих чисел меньше 2.

Реш **2**. Пусть a_1, … , a_n — данные числа. Количество членов ряда 1, 2, 3, … , 1951, делящихся на a_k, равно $\left[\frac{1951}{a_k}\right]$. По условию наименьшее общее кратное любых двух из чисел a_1, … , a_n больше 1951, поэтому среди чисел 1, 2, … , 1951 нет ни одного числа, делящегося одновременно на два из чисел a_1, … , a_n. Поэтому число членов последовательности 1, 2, … , 1951, делящихся хотя бы на одно из чисел a_1, … , a_n, равно

$$\left[\frac{1951}{a_1}\right]+\left[\frac{1951}{a_2}\right]+\cdots+\left[\frac{1951}{a_n}\right].$$

Но в последовательности 1, 2, … , 1951 всего 1951 членов, поэтому

$$\left[\frac{1951}{a_1}\right]+\left[\frac{1951}{a_2}\right]+\cdots+\left[\frac{1951}{a_n}\right]\leqslant 1951.$$

Учитывая, что $\left[\frac{1951}{a_k}\right]>\frac{1951}{a_k}-1$, получаем

$$\left(\frac{1951}{a_1}-1\right)+\left(\frac{1951}{a_2}-1\right)+\cdots+\left(\frac{1951}{a_n}-1\right)<1951,$$

т.е.

$$\frac{1951}{a_1}+\frac{1951}{a_2}+\frac{1951}{a_3}+\cdots+\frac{1951}{a_n}<1951+n<2\cdot 1951.$$

Сокращая обе части на 1951, получаем требуемое.

Замечание. *Число 1951 можно заменить на любое другое натуральное число $N\geqslant 4$.*

З-ча **3**. Автобусный маршрут содержит 14 остановок (считая две конечные). В автобусе одновременно могут ехать не более 25 пассажиров. Доказать, что во время поездки автобуса из одного конца в другой

а) найдутся восемь различных остановок A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, таких, что ни один пассажир не едет от A_1 до B_1, ни один пассажир не едет от A_2 до B_2, ни один пассажир не едет от A_3 до B_3 и ни один пассажир не едет от A_4 до B_4;

б) может оказаться, что пассажиры едут таким образом, что не существует 10 различных остановок A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5, B_5, которые обладали бы аналогичными свойствами.

Реш **3**. а) Будем учитывать только тех пассажиров, которые находятся в автобусе, когда он едет от 7-й остановки до 8-й. Это будут в точности те пассажиры, которые едут от остановки с номером $i \leqslant 7$ до остановки с номером $j \geqslant 8$. Возьмём квадрат 7×7, строки которого занумерованы числами $1, \ldots, 7$, а столбцы — числами $8, \ldots, 14$. Если в автобусе есть пассажир, едущий от остановки с номером $i \leqslant 7$ до остановки с номером $j \geqslant 8$, то отметим в квадрате клетку, стоящую на пересечении i-й строки и j-го столбца. Количество отмеченных клеток по условию не больше 25, поэтому есть по крайней мере $24 = 4 \cdot 6$ непомеченные клетки.

Докажем, что в указанном квадрате 7×7 можно выделить строки $A_1, \ldots, A_4$ и столбцы $B_1, \ldots, B_4$ так, что на пересечении строки A_i и столбца B_j стоит неотмеченная клетка. Сначала докажем, что можно выделить одну строку и один столбец так, что на их пересечении стоит неотмеченная клетка, а после их вычёркивания остаётся не менее $15 = 3 \cdot 5$ неотмеченных клеток. Если в каждом столбце и в каждой строке не более 5 неотмеченных клеток, то можно взять любую неотмеченную клетку и выделить содержащие её строку и столбец. Действительно, в этом случае выделенные строка и столбец содержат не более 9 неотмеченных клеток. Если в какой-то строке (столбце) стоит 6 неотмеченных клеток, то среди столбцов (строк), проходящих через неотмеченные клетки этой строки (столбца) найдётся столбец (строка), в котором стоит не более 4 отмеченных точек. Можно выделить эти строку и столбец. Если в какой-то строке (столбце) все клетки неотмеченные, то найдётся столбец (строка), в котором стоит не более 3 неотмеченных точек. Можно выделить эти строку и столбец.

Аналогично можно доказать, что в полученном квадрате 6×6 можно выделить строку и столбец, на пересечении которых стоит неотмеченная клетка, так, чтобы после их вычёркивания осталось не менее $8 = 2 \cdot 4$ неотмеченных клеток. Затем в полученном квадрате 6×6 можно выделить строку и столбец, на пересечении которых стоит неотмеченная клетка, так, чтобы после их вычёркивания осталось не менее $3 = 1 \cdot 3$ неотмеченных клеток (нам достаточно, чтобы осталась одна неотмеченная клетка).

б) Пусть от каждой остановки с номерами $1, 2, \ldots, 10$ до каждой другой остановки с этими номерами едет ровно один пассажир, а дальше автобус едет пустым. Посчитаем, сколько пассажиров находится в автобусе, когда он едет от остановки с номером k до остановки с номером $k+1$, где $1 \leqslant k \leqslant 9$. Это будут в точности те пассажиры, которые вошли на остановках с номерами $1, 2, \ldots, k$ и выйдут на остановках с номерами $k+1, k+2, \ldots, 10 = k + (10 - k)$. Всего таких пассажиров будет $k(10 - k)$. Ясно, что $k(10 - k) \leqslant 25$ (больше всего пассажиров в автобусе будет, когда он едет от остановки 5 до остановки 6). Если нам задано 10 различных остановок, то остановки с номерами 11, 12, 13, 14 могут входить не более чем в 4 пары этих остановок; в пятую пару входят остановки с номерами $1, 2, \ldots, 10$, а для любой такой пары остановок найдётся пассажир, который едет от одной остановки до другой.

З-ча **4**. Окружность обладает тем свойством, что внутри неё можно двигать правильный треугольник так, чтобы каждая вершина треугольника описывала эту окружность. Найти замкнутую непересекающуюся кривую, отличную от окружности, внутри которой также можно двигать правильный треугольник так, чтобы каждая его вершина описывала эту кривую.

Реш **4**. Возьмём окружность, радиус которой равен стороне правильного треугольника, отрежем от неё два сегмента, хорды которых стягивают угол 120°. Сложим их этих двух сегментов фигуру, приложив друг к другу их хорды. Граница этой фигуры обладает требуемым свойством. Действительно, поместим правильный треугольник в эту фигуру так, как показано на рис.??? Затем будем поворачивать треугольник по часовой стрелке вокруг точки O_1. После поворота на 60° будем поворачивать треугольник по часовой стрелке вокруг точки O_2 и т.д. После шести таких поворотов (трёх пар поворотов вокруг O_1 и O_2) треугольник вернётся в исходное положение, причём каждая его вершина опишет всю кривую.

XV олимпиада (1952)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. В ΔABC вписана окружность, которая касается его сторон в точках L, M и N. Докажите, что ΔLMN всегда остроугольный (независимо от вида ΔABC).

Реш **1**. Пусть L, M и N лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно. Треугольники BNL и CLM равнобедренные; углы при их основаниях равны $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle B)$ и $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle C)$. Поэтому $\angle NLM = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) < 90^\circ$. Аналогично доказывается, что остальные углы треугольника NLM острые.

З-ча **2**. Докажите тождество

$$(ax+by+cz)^2 + (bx+cy+az)^2 + (cx+ay+bz)^2 = \\ = (cx+by+az)^2 + (bx+ay+cz)^2 + (ax+cy+bz)^2.$$

Реш **2**. Легко проверить, что оба выражения равны

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2) + 2(xy+yz+zx)(ab+bc+ca).$$

З-ча **3**. Если все 6 граней параллелепипеда — равные между собой параллелограммы, то они суть ромбы. Докажите.

Реш **3**. Пусть из вершины параллелепипеда выходят рёбра длиной a, b, c. Тогда одна грань является параллелограммом со сторонами a и b, а другая грань — параллелограммом со сторонами b и c. Эти параллелограммы равны, поэтому $a = c$. Аналогично доказывается, что $a = b = c$.

З-ча **4**. Два человека A и B должны попасть из пункта M в пункт N, расположенный в 15 км от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/час. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/час. A отправляется в путь пешком, а B едет на велосипеде до встречи с пешеходом C, идущим из N и M. Дальше B идёт пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A и передаёт ему велосипед, на котором тот и приезжает в N.

Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы A и B прибыли в пункт N одновременно (если он идёт пешком с той же скоростью, что A и B)?

Реш **4**. Чтобы A и B прибыли в пункт N, они должны пройти пешком одно и то же расстояние x и проехать на велосипеде одно и то же расстояние $15 - x$. Тогда C до встречи с B тоже должен пройти пешком расстояние x. Поэтому C до встречи с A проедет на велосипеде $15 - 2x$, а после этого A проедет на велосипеде $15 - x$. Всего A и B вместе проедут на велосипеде $30 - 3x$. За это же время B пройдёт пешком x, поэтому $\frac{30-3x}{15} = \frac{x}{6}$, т.е. $x = 60/11$. B до встречи с C едет $\frac{15-x}{15} = \frac{1}{15} \cdot \frac{105}{11} = \frac{7}{11}$ час, а C до встречи с B идёт $\frac{x}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{60}{11} = \frac{10}{11}$ час, поэтому C должен выйти из M за $\frac{3}{11}$ час до того, как A и B отправятся в путь из M.

8 класс

З-ча **1**. Докажите, что если ортоцентр делит высоты треугольника в одном и том же отношении, то этот треугольник — правильный.

Реш **1**. Пусть H — точка пересечения высот AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC. По условию $A_1H \cdot BH = B_1H \cdot AH$. С другой стороны, так как точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB, то $A_1H \cdot AH = B_1H \cdot BH$. Следовательно, $AH = BH$ и $A_1H = B_1H$, а значит, $AC = BC$. Аналогично $BC = AC$.

З-ча **2**. Докажите тождество

$$(ax+by+cz+du)^2 + (bx+cy+dz+au)^2 + (cx+dy+az+bu)^2 + \\ + (dx+ay+bz+cu)^2 = \\ = (dx+cy+bz+au)^2 + (cx+by+az+du)^2 + (bx+ay+dz+cu)^2 + \\ + (ax+dy+cz+bu)^2.$$

Реш **2**. Легко проверить, что оба выражения равны

$$(x^2+y^2+z^2+u^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)+2(xy+yz+zu+ux)(ab+bc+cd+da)+4(xz+yu)(ac+bd).$$

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **4**. Два человека A и B должны попасть как можно скорее из пункта M в пункт N, расположенный в 15 км от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/час. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/час. A отправляется в путь пешком, а B едет на велосипеде до встречи с пешеходом C, идущим из N и M. Дальше B идёт пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A и передаёт ему велосипед, на котором тот и приезжает в N.

Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы время, затраченное A и B на дорогу в N, было наименьшим (C идёт пешком с той же скоростью, что A и B; время, затраченное на дорогу, считается от момента выхода A и B из M до момента прибытия последнего из них в N).

Реш **4**. Чтобы A и B затратили на дорогу наименьшее время, они должны прибыть в N одновременно, т.е. они должны пройти пешком одинаковые расстояния. Действительно, пусть A проходит пешком расстояние x и проезжает на велосипеде $15-x$, а B проходит y и проезжает $15-y$. Тогда время, затраченное A, равно $\frac{x}{6}+\frac{15-x}{15}=1+\frac{x}{10}$, а время, затраченное B, равно $1+\frac{y}{10}$. Нас интересует меньшее из этих чисел; оно должно быть наименьшим. За то же самое время, за которое A проходит пешком расстояние x, B и C успевают проехать на велосипеде расстояние $(15-y)+(15-y-x)$. Поэтому $\frac{30-x-2y}{15}=\frac{x}{6}$, т.е. $7x+4y=60$. Прямая $x=y$ пересекает прямую $7x+4y=60$ в точке $(11/10, 11/10)$. Для любой другой точки прямой $7x+4y=60$ координата x или координата y будет больше.

Задача о том, когда должен выйти C, чтобы A и B прибыли одновременно, — это в точности задача 4 для 7 класса.

9 класс

З-ча **1**. Дана геометрическая прогрессия, знаменатель которой — целое число (не равное 0 и -1). Докажите, что сумма любого числа произвольно выбранных её членов не может равняться никакому члену этой прогрессии.

Реш **1**. Каждый член геометрической прогрессии представляется в виде aq^n, $n\geqslant 0$. Случай, когда $q=1$, очевиден, поэтому будем считать, что $q\neq 1$. Предположим, что существуют различные целые неотрицательные числа $k_1, k_2, \ldots, k_{m+1}$ ($m\geqslant 2$), для которых

$$aq^{k_1}+aq^{k_2}+\cdots+aq^{k_m}=aq^{k_{m+1}}. \tag{1}$$

Пусть $l_1<l_2<\cdots<l_{m+1}$ — это числа $k_1, k_2, \ldots, k_{m+1}$, записанные в порядке возрастания. Перепишем равенство (1) в виде

$$aq^{l_1}=\pm aq^{l_2}\pm\cdots\pm aq^{l_{m+1}}.$$

После сокращения на aq^{l_1} получим

$$1=q^{l_2-l_1}(1+q^{l_3-l_2}+\cdots+q^{l_{m+1}-l_2}).$$

Левая часть равенства равна 1, а правая часть делится на целое число $q^{l_2-l_1}$, абсолютная величина которого строго больше 1. Получено противоречие.

З-ча **2**. Даны 3 скрещивающиеся прямые. Докажите, что они будут общими перпендикулярами к своим общим перпендикулярам.

Реш **2**. Пусть $a'\perp b$ и $a'\perp c$, $b'\perp c$ и $b'\perp a$, $c'\perp a$ и $c'\perp b$. Тогда $a\perp b'$ и $a\perp c'$, $b\perp c'$ и $b\perp a'$, $c\perp a'$ и $c\perp b'$.

З-ча **3**. Докажите, что

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right|<1,$$

если $|x|<1$ и $|y|<1$.

Реш **3**. По условию $1-x>0$, $1+x>0$, $1-y>0$ и $1+y>0$. Поэтому $(1-x)(1+y)>0$ и $(1+x)(1-y)>0$, т.е. $1-x+y-xy>0$ и $1+x-y-xy>0$. Следовательно, $1-xy>x-y$ и $1-xy>y-x$. Кроме того, $1-xy=|1-xy|$.

З-ча **4**. ΔABC разбит прямой BD на два треугольника. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в ΔABD и ΔDBC, больше радиуса окружности, вписанной в ΔABC.

Реш **4**. Пусть r, r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей треугольников ABC, ABD и BCD, p, p_1 и p_2 — их полупериметры, S, S_1 и S_2 — их площади. Тогда $S = S_1 + S_2$, $S = pr$, $S_1 = p_1 r_1$ и $S_2 = p_2 r_2$. Поэтому $r = \frac{p_1}{p} r_1 + \frac{p_2}{p} r_2$. Но $BD < BC + CD$, поэтому $p_1 < p$; аналогично $p_2 < p$. Следовательно, $r < r_1 + r_2$.

З-ча **5**. Дана последовательность целых чисел, построенная следующим образом:

a_1 — произвольное трёхзначное число,

a_2 — сумма квадратов его цифр,

a_3 — сумма квадратов цифр числа a_2 и т.д. Докажите, что в последовательности a_1, a_2, a_3, ... обязательно встретится либо 1, либо 4.

Реш **5**. Прежде всего заметим, что $a_2 \leqslant 9^2 \cdot 3 = 243$, а значит, $a_3 \leqslant 2^2 + 9^2 \cdot 2 = 166$. Если $100 \leqslant a_3 \leqslant 166$, то $a_4 \leqslant 1 + 6^2 + 9^2 = 118$, а если $100 \leqslant a_4 \leqslant 166$, то $a_5 \leqslant 2 + 64 < 100$. Поэтому достаточно проверить требуемое утверждение лишь для чисел, не превосходящих 99. Это делается непосредственной проверкой. Мы будем выписывать последовательность до тех пор пока не встретится 1, 4 или число, уже встречавшееся ранее. При этом мы будем учитывать, что перестановка цифр и добавление (удаление) нуля не влияет на дальнейшие члены последовательности. В результате получим следующие последовательности: 2, 4; 3, 9, 81, 65, 61, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4; 5, 25, 29, 85; 6, 36, 45, 41, 17, 50; 7, 49, 97, 130, 10; 8, 64, 42; 11, 2; 12, 5; 15, 26, 40; 19, 82, 68, 100; 27, 53, 34, 25; 33, 36; 35, 34; 38, 73; 39, 90; 44, 32; 47, 65; 48, 80; 55, 50; 57, 74; 59, 106; 66, 72; 67, 85; 69, 117, 51; 77, 98; 78, 113, 11; 88, 128, 69; 99, 162, 41.

10 класс

З-ча **1**. Найдите соотношение между

$$\arcsin\cos\arcsin x \text{ и } \arccos\sin\arccos x.$$

Реш **1**. Ответ: $\arcsin\cos\arcsin x + \arccos\sin\arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Пусть $\arcsin\cos\arcsin x = \alpha$ и $\arccos\sin\arccos x = \beta$. Тогда $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \pi/2$. Действительно, $0 \leqslant \cos\arcsin x \leqslant 1$, поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и $0 \leqslant \sin\arccos x \leqslant 1$, поскольку $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Далее, $\sin\alpha = \cos\arcsin x$, поэтому $\arcsin x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и $\sin\left[\pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \pm\cos\alpha$; $\cos\beta = \sin\arccos x$, поэтому $\arccos x = \frac{\pi}{2} \mp \beta$ и $x = \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \beta\right) = \pm\sin\beta$. Из того, что $\cos\alpha = \sin\beta (= \pm x)$, следует, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

З-ча **2**. Докажите, что при целом $n \geqslant 2$ и $|x| < 1$

$$2^n > (1-x)^n + (1+x)^n.$$

Реш **2**. Применим индукцию по n. При $n = 2$ получаем $(1-x)^2 + (1+x)^2 = 2(1+x^2) < 4$. Предположим теперь, что $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$. Тогда

$$(1-x)^{n+1} + (1+x)^{n+1} < ((1-x)^n + (1+x)^n)((1-x) + (1+x)) < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

З-ча **3**. В трёхгранный угол с вершиной S вписана сфера с центром в точке O. Докажите, что плоскость, проходящая через три точки касания, перпендикулярна к прямой SO.

Реш **3**. Пусть A, B и C — точки касания сферы с гранями. Радиус OA перпендикулярен касательной SA, поэтому $\angle SAO = 90°$. Аналогично $\angle SBO = \angle SCO = 90°$. В прямоугольных треугольниках SAO, SBO и SCO катеты AO, BO и CO равны (они равны радиусу сферы), поэтому равны и сами треугольники. Следовательно, проекции вершин A, B и C на гипотенузу SO совпадают. Но это как раз и означает, что прямая SO перпендикулярна плоскости ABC.

З-ча **4**. Если при любом положительном p все корни уравнения

$$ax^2 + bx + c + p = 0$$

действительны и положительны, то коэффициент a равен нулю. Докажите.

Реш **4**. Предположим, что $a > 0$. Тогда при больших положительных p дискриминант $D = b^2 - 4ac - 4ap$ отрицателен, поэтому данное уравнение вообще не имеет действительных корней. Предположим, что $a < 0$. Тогда при больших положительных p произведение корней, равное $\frac{c+p}{a}$, отрицательно.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Решить систему пятнадцати уравнений с пятнадцатью неизвестными:

$$\begin{cases} 1 - x_1x_2 &= 0, \\ 1 - x_2x_3 &= 0, \\ 1 - x_3x_4 &= 0, \\ \dots & \dots \\ 1 - x_{14}x_{15} &= 0, \\ 1 - x_{15}x_1 &= 0. \end{cases}$$

Реш **1**. О т в е т : $x_1 = x_2 = \dots = x_{15} = \pm 1$. Ясно, что $x_2 \neq 0$, поэтому из первого и второго уравнений получаем $x_1 = x_3$. Из второго и третьего уравнений получаем $x_2 = x_4$ и т.д. Кроме того, из первого и последнего уравнений получаем $x_{15} = x_2$. В итоге получаем $x_1 = x_3 = \dots = x_{15} = x_2 = x_4 = \dots = x_{14}$. Поэтому из первого уравнения получаем $x_1^2 = 1$, т.е. $x_1 = \pm 1$. Очевидно, что оба указанных в ответе набора неизвестных действительно являются решениями системы.

З-ча **2**. Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соблюдено условие: $AB+CD = BC+DA$. Докажите, что окружность, вписанная в ΔABC, касается окружности, вписанной в ΔACD.

Реш **2**. Пусть K и L — точки касания со стороной AC окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC. Тогда $2AK = AB+AC-BC$ и $2AL = AD+AC-DC$. Поэтому из равенства $AB+CD = BC+AD$ следует, что $AK = AL$, т.е. точки K и L совпадают.

З-ча **3**. Докажите, что если квадрат числа начинается с $0,999\dots9$ (100 девяток), то и само число начинается с $0,999\dots9$ (100 девяток).

Реш **3**. Если $0 < a < 1$, то $0 < a^2 < a < 1$. По условию $1 > a^2 \geqslant 0,\underbrace{9\dots9}_{100}$. Поэтому $1 > a > 0,\underbrace{9\dots9}_{100}$ (предполагается, что число a положительно).

З-ча **4**. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место вершин C остроугольных треугольников ABC.

Реш **4**. Возьмём окружность S с диаметром AB и проведём в точках A и B касательные l_A и l_B к этой окружности. Искомые точки лежат строго внутри полосы, ограниченной прямыми l_A и l_B, и строго вне окружности S.

8 класс

З-ча **1**. Вычислить с шестьюдесятью десятичными знаками

$$\sqrt{0,\underbrace{999\dots9}_{60}}.$$

Реш **1**. Если $0 < a < 1$, то $0 < a < \sqrt{a} < 1$. По условию $a = 0,\underbrace{9\dots9}_{60}$. Поэтому $1 > \sqrt{a} > 0,\underbrace{9\dots9}_{60}$. Значит, $\sqrt{a} = 0,\underbrace{9\dots9}_{60}\dots$

З-ча **2**. Из точки C проведены касательные CA и CB к окружности O. Из произвольной точки N окружности опущены перпендикуляры ND, NE, NF соответственно на прямые AB, CA и CB. Докажите, что ND есть среднее пропорциональное между NE и NF.

Реш **2**. Прямоугольные треугольники NBD и NAE, NBF и NAD подобны, поскольку $\angle NBD = \angle NAE$ и $\angle NBF = \angle NAD$. Следовательно, $NB : NA = ND : NE$ и $NB : NA = NF : ND$, а значит, $ND : NE = NF : ND$, т.е. $ND^2 = NE \cdot NF$.

З-ча **3**. Имеются семь жетонов с цифрами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Докажите, что ни одно семизначное число, составленное посредством этих жетонов, не делится на другое.

Реш **3**. Пусть a и b — семизначные числа, составленные посредством этих жетонов. Предположим, что a делится на b и $a \neq b$. Тогда $a - b$ тоже делится на b. Ясно, что $\frac{a-b}{b} \leqslant 7$. С другой стороны, $a - b$ делится на 9, а b не делится на 9. Поэтому $\frac{a-b}{b}$ делится на 9.

З-ча **4**. 99 прямых разбивают плоскость на n частей. Найдите все возможные значения n, меньшие 199.

Реш **4**. Индукцией по m легко доказать, что m прямых разбивают плоскость на $1+m+x$ частей, где x — количество точек пересечения этих прямых с учётом их кратностей (это означает, что точка пересечения k прямых считается за $k-1$ точек пересечения).

Используя эту формулу и индукцию по m, можно доказать, что если среди данных m прямых есть три прямые, пересекающиеся в трёх различных точках, то эти m прямых разбивают плоскость по крайней мере на $2m+1$ частей. База индукции: $m=3$; далее мы пользуемся тем, что проведение каждой новой прямой добавляет по крайней мере две новые части.

Обращаясь к условию задачи, мы видим, что нас интересуют только конфигурации прямых, среди которых нет троек прямых, пересекающихся в трёх разных точках. Таким образом, либо все 99 прямых параллельны, либо все 99 прямых пересекаются в одной точке, либо 98 прямых параллельны и одна прямая их пересекает. Первая конфигурация разбивает плоскость на 100 частей, а обе остальные — на 198 частей.

9 класс

З-ча **1**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 1-x_1x_2 &= 0,\\ 1-x_2x_3 &= 0,\\ 1-x_3x_4 &= 0,\\ \cdots & \cdots\\ 1-x_{n-1}x_n &= 0,\\ 1-x_nx_1 &= 0. \end{cases}$$

Реш **1**. Ответ: $x_1=x_2=\cdots=x_n=\pm1$ при нечётном n, $x_1=x_3=\cdots=x_{n-1}=a$ и $x_2=x_4=\cdots=x_n=\frac{1}{a}$ $(a\neq0)$ при чётном n. Для нечётного n решение фактически приведено в решении задачи 1 для 7 класса. При чётном n точно так же получаем $x_1=x_3=\cdots=x_{n-1}$, $x_2=x_4=\cdots=x_{n-2}$ и $x_2=x_n$. Очевидно, что указанные в ответе наборы неизвестных являются решениями данной системы уравнений.

З-ча **2**. Поместить в полый куб с ребром a три цилиндра диаметра $\frac{a}{2}$ и высоты a так, чтобы они не могли менять своего положения внутри куба.

Реш **2**. Если основания цилиндра лежат на гранях куба, то направление оси цилиндра будет неизменным при всех его перемещениях внутри куба. Поместим теперь в куб два цилиндра так, чтобы их оси были параллельны двум перпендикулярным рёбрам куба. Радиусы цилиндров равны $a/4$, поэтому расстояние между их осями не может быть меньше $a/2$. С другой стороны, они расположены внутри полосы толщиной a между двумя параллельными плоскостями. Поэтому расстояние между осями не может быть больше $a/2$. Следовательно, ось каждого цилиндра может перемещаться лишь в направлении оси другого цилиндра. Переместим эти два цилиндра так, чтобы они касались куба боковыми поверхностями, и в образовавшийся зазор вставим третий цилиндр, ось которого перпендикулярна осям двух первых цилиндров. Новый цилиндр не сможет перемещаться, поскольку первый цилиндр позволяет двигаться его оси только в одном направлении, а второй цилиндр — только в перпендикулярном направлении. Аналогично доказывается, что первые два цилиндра теперь тоже не смогут перемещаться.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 8 класса.

З-ча **4**. В равнобедренном ΔABC $\angle ABC=20^\circ$. На равных сторонах CB и AB взяты соответственно точки P и Q такие, что $\angle PAC=50^\circ$ и $\angle QCA=60^\circ$. Докажите, что $\angle PQC=30^\circ$.

Реш **4**. Выберем на стороне BC точку R так, что $\angle CAR=60^\circ$. Пусть S — точка пересечения прямых CQ и AR (рис.???). Достаточно доказать, что QP — биссектриса угла SQR, равного 60°. Простые вычисления углов показывают, что $\angle APC=50^\circ$. Поэтому треугольник ACP равнобедренный, а значит, $PC=AC=SC$. Угол при вершине C равнобедренного треугольника PCS нам известен: он равен 20°, поэтому $\angle SPC=80^\circ$. Из этого следует, что $\angle RSP=40^\circ$. Остаётся заметить, что $\angle SRP=40^\circ$.

З-ча **5**. 200 учеников выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом продольном ряду выбран самый высокий ученик, а затем из отобранных 10 человек выбран самый низкий. С другой стороны, в каждом поперечном ряду выбран самый низкий ученик, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий. Кто из двоих окажется выше?

Реш **5**. Пусть A — самый низкий среди высоких, а B — самый высокий среди низких. Пусть C стоит на пересечении продольного ряда, в котором стоит A, и поперечного ряда, в котором стоит B. Тогда A не ниже C и C не ниже B, поэтому A не ниже B. (Если A и B разного роста, то A выше B.)

10 класс

З-ча **1**. Докажите, что сумма

$$\cos 32x + a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x + \cdots + a_1 \cos x$$

принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Реш **1**. Предположим, что сумма

$$\cos 32x + a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x + \cdots + a_1 \cos x$$

принимает только положительные значения при всех x. Заменив x на $x+\pi$, получим, что выражение

$$\cos 32x - a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x - \cdots + a_2 \cos 2x - a_1 \cos x$$

принимает положительные значения при всех x. Сложив эти выражения, получим, что сумма

$$\cos 32x + a_{30}\cos 30x + \cdots + a_4 \cos 4x + a_2 \cos 2x$$

принимает положительные значения при всех x. Затем повторим те же самые рассуждения, последовательно заменяя x на $x+\frac{\pi}{2}$, $x+\frac{\pi}{4}$, $x+\frac{\pi}{8}$, $x+\frac{\pi}{16}$. В результате получим, что $\cos 32x$ принимает положительные значения при всех x. Но при $x=\pi/32$ выражение $\cos 32x$ принимает значение -1. Получено противоречие.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 9 класса

З-ча **3**. Докажите, что ни при каком целом A многочлен $3x^{2n} + Ax^n + 2$ не делится на многочлен $2x^{2m} + Ax^m + 3$.

Реш **3**. Предположим, что многочлен $3x^{2n} + Ax^n + 2$ делится на многочлен $2x^{2m} + Ax^m + 3$. Тогда любой корень многочлена $2x^{2m} + Ax^m + 3$ является также корнем многочлена $3x^{2n} + Ax^n + 2$. Если x_i — корень многочлена $2x^{2m} + Ax^m + 3$, то $x_i^m = \frac{-A\pm\sqrt{A^2-24}}{4} = \alpha_{1,2}$. Можно считать, что $x_1^m = \alpha_1$ и $x_2^m = \alpha_2$. Пусть $\beta_{1,2} = \frac{-A\pm\sqrt{A^2-24}}{6}$ — корни квадратного трёхчлена $3x^2 + Ax + 2$.

Случай 1. $A^2 - 24 > 0$.

В этом случае $|\alpha_1| \neq |\alpha_2|$, поэтому $x_1^n = \beta_1$ и $x_2^n = \beta_2$. С одной стороны, $|x_1 x_2| = \sqrt[n]{|\beta_1\beta_2|} = \sqrt[n]{2/3} < 1$, а с другой стороны $|x_1 x_2| = \sqrt[m]{|\alpha_1\alpha_2|} = \sqrt[m]{3/2} > 1$. Приходим к противоречию.

Случай 2. $A^2 - 24 \leqslant 0$.

В этом случае $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \sqrt{3/2}$ и $|\beta_1| = |\beta_2| = \sqrt{2/3}$. Поэтому, с одной стороны, $|x_1| = \sqrt[m]{|\alpha_1|} = \sqrt[2m]{3/2} > 1$, а с другой стороны, $|x_1| = \sqrt[n]{|\beta_1|} = \sqrt[2n]{2/3} < 1$. Снова приходим к противоречию.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 9 класса.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 9 класса.

XVI олимпиада (1953)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Доказать, что в трапеции сумма углов при меньшем основании больше, чем при большем.

Реш **1**. Разрежем трапецию на параллелограмм, одной из сторон которого служит меньшее основание трапеции, и треугольник. Сумма углов при большем основании трапеции равна сумме двух углов этого треугольника, поэтому она меньше 180°. Значит, сумма углов при меньшем основании больше 180°.

З-ча **2**. Найти наименьшее число, записываемое одними единицами, которое бы делилось на число, составленное из ста троек (333...33).

Реш **2**. Ответ: $\underbrace{11\ldots1}_{300}$. Число $a_n = \underbrace{11\ldots1}_{n}$ делится на $\underbrace{33\ldots3}_{100}$ тогда и только тогда, когда n делится на 3 и a_n делится a_{100}. Покажем, что a_n делится на a_m тогда и только тогда, когда n делится на m. Ясно, что $9a_n = 10^n - 1$. Поэтому a_n делится на a_m тогда и только тогда, когда $10^n - 1$ делится на $10^m - 1$. Пусть $n = dm + r$, где $0 \leqslant r < m$. Тогда

$$10^n - 1 = (10^{n-m} + 10^{n-2m} + \cdots + 10^{n-dm})(10^m - 1) + 10^r - 1.$$

Значит, $10^n - 1$ делится на $10^m - 1$ тогда и только тогда, когда n делится на m.

З-ча **3**. Разделить отрезок пополам с помощью угольника. (С помощью угольника можно проводить прямые и восстанавливать перпендикуляры, опускать перпендикуляры нельзя.)

Реш **3**. Восставим перпендикуляр l к AB в точке A; отметим на нем точки C и D. Восставим далее перпендикуляр l' к AB в точке B, а затем проведём перпендикуляры к прямой l в точках C и D до их пересечения с l' соответственно в точках C' и D'. Обозначим через X точку пересечения прямых AD' и BD и через Y — точку пересечения прямых AC' и BC. Тогда прямая XY пересекает отрезок AB в его середине.

З-ча **4**. Докажите, что при любом целом положительном n число $n^2 + 8n + 15$ не делится на $n + 4$.

Реш **4**. Достаточно заметить, что $n^2 + 8n + 15 = (n + 4)^2 - 1$.

8 класс

З-ча **1**. Три окружности попарно касаются друг друга. Через три точки касания проводим окружность. Доказать, что эта окружность перпендикулярна к каждой из трёх исходных. (Углом между двумя окружностями в точке их пересечения называется угол, образованный их касательными в этой точке.)

Реш **1**. Пусть A, B, C — точки касания, A_1, B_1 и C_1 — центры данных окружностей, причём точки A, B и C лежат на отрезках B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 соответственно. Тогда $A_1B = A_1C$, $B_1A = B_1C$ и $C_1A = C_1B$. Из этого следует, что A, B и C — точки касания вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ с его сторонами. Действительно, пусть $A_1B = A_1C = x$, $B_1A = B_1C = y$ и $C_1A = C_1B = z$. Тогда, например, $x = \frac{A_1B_1 + A_1C_1 - B_1C_1}{2}$ и для точек касания вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ со сторонами A_1B_1 и A_1C_1 такое соотношение тоже выполняется. В результате получаем, что радиусы A_1B, B_1C и C_1A данных окружностей касаются описанной окружности треугольника ABC.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 7 класса.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **4**. Доказать неравенство

$$\frac{2 - \overbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}^{n \text{ раз}}}{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ раз}}} > \frac{1}{4}.$$

Реш **4**. Пусть $a = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n-1}$. Тогда $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n} = \sqrt{2 + a}$.

Таким образом, требуется доказать, что

$$\frac{2-\sqrt{2+a}}{2-a} > \frac{1}{4}.$$

Индукцией по n легко доказать, что $a < 2$. Поэтому следующие неравенства эквивалентны требуемому:

$$\begin{array}{lcl} 8-4\sqrt{2+a} & > & 2-a, \\ 6+a & > & 4\sqrt{2+a}. \end{array}$$

После возведения в квадрат получаем неравенство $36+12a+a^2 > 32+16a$, т.е. $(a-2)^2 > 0$.

9 класс

З-ча **1**. Найти геометрическое место точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют соотношению $\sin(x+y) = 0$.

Реш **1**. О т в е т : семейство прямых, заданных уравнениями вида $x+y = k\pi$, где k — произвольное целое число.

З-ча **2**. AB и A_1B_1 — два скрещивающихся отрезка. O и O_1 — соответственно их середины. Докажите, что отрезок OO_1 меньше полусуммы отрезков AA_1 и BB_1.

Реш **2**. Сложим равенства $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A_1}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1B_1}$. Учитывая, что $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0}$ и $\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{O_1B_1} = \overrightarrow{0}$, получим $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1})$. Из этого требуемое неравенство следует очевидным образом, поскольку прямые AA_1 и BB_1 не могут быть параллельны.

З-ча **3**. Докажите, что многочлен вида $x^{200}y^{200}+1$ нельзя представить в виде произведения многочленов от одного только x и одного только y.

Реш **3**. Предположим, что существуют многочлены $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ и $g(y) = b_0y^m + b_1y^{m-1} + \cdots + b_m$, для которых $f(x)g(y) = x^{200}y^{200}+1$. Положив $x = 0$, получим $a_ng(y) = 1$, т.е. $g(y) = 1/a_n$ при всех y. Положив $y = 0$, аналогично получим, что $f(x) = 1/b_m$ при всех x. Таким образом, $f(x)g(y) = \frac{1}{a_nb_m}$ — константа, а функция $x^{200}y^{200}+1$, очевидно, не является константой.

З-ча **4**. A — вершина правильного звёздчатого пятиугольника. Ломаная $AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1$ является его внешним контуром. Прямые AB и DE продолжены до пересечения в точке F. Докажите, что многоугольник $ABB_1CC_1DED_1$ равновелик четырёхугольнику AD_1EF.

Реш **4**. Ясно, что $AB \| EC$ и $AC \| EF$. Поэтому четырёхугольник $ACEF$ — параллелограмм. В частности, $S_{EFA} = S_{ACE}$. Далее, $S_{AA_1BB_1CC_1DED_1} = S_{ACE} - S_{AED_1} + S_{ABB_1} + S_{EDC_1}$ и $S_{AD_1EF} = S_{EFA} + S_{AED_1}$ (рис.???). Но $S_{AED_1} = S_{ABB_1} = S_{EDC_1}$, поскольку треугольники AED_1, ABB_1 и EDC_1 равны.

З-ча **5**. См. задачу 4 для 8 класса.

10 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 9 класса.

З-ча **2**. Дан прямой круговой конус и точка O. Найти геометрическое место вершин конусов, равных данному, с осями, параллельными оси данного конуса, и содержащих внутри данную точку O.

Реш **2**. О т в е т : конус (с вершиной O), симметричный данному конусу относительно середины отрезка OS, где S — вершина данного конуса.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 9 класса.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 9 класса.

З-ча **5**. См. задачу 4 для 8 класса.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Доказать, что наибольший общий делитель суммы двух чисел и их наименьшего общего кратного равен наибольшему общему делителю самих чисел.

Реш **1**. В наименьшее общее кратное чисел a и b входят только те простые делители, которые входят в a и b. Только они и могут входить в наибольший общий делитель суммы и наименьшего общего кратного. Поэтому достаточно проследить за степенью каждого простого множителя отдельно. Пусть $a = p^\alpha \ldots$ и $b = p^\beta \ldots$, причём $\alpha \leqslant \beta$. Тогда сумма чисел a и b имеет вид $p^\alpha \ldots$, а их наименьшее общее кратное

имеет вид $p^\beta \ldots$. Поэтому рассматриваемый наибольший общий делитель имеет вид $p^\alpha \ldots$. Наибольший общий делитель самих чисел a и b имеет такой же вид.

З-ча **2**. Около окружности описан четырёхугольник. Его диагонали пересекаются в центре этой окружности. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.

Реш **2**. Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром O. Если диагональ AC проходит через точку O, то прямая AC является осью симметрии четырёхугольника, поэтому $AB = AD$ и $CB = CD$. А если диагональ BD проходит через точку O, то $BA = BC$ и $DA = DC$.

З-ча **3**. В плоскости расположено 11 зубчатых колёс таким образом, что первое колесо сцеплено своими зубцами со вторым, второе — с третьим и т.д. Наконец, последнее, одиннадцатое, колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колёса такой системы?

Реш **3**. О т в е т : нет. Соседние колёса должны вращаться в противоположных направлениях. Поэтому колёса с номерами 1 и 11 должны вращаться в одном направлении (все колёса с нечётными номерами вращаются в одном направлении, а с чётными — в противоположном). С другой стороны, колёса с номерами 1 и 11 соседние, поэтому они должны вращаться в противоположных направлениях.

З-ча **4**. Тысяча точек является вершинами выпуклого тысячеугольника, внутри которого расположено ещё пятьсот точек так, что никакие три из пятисот не лежат на одной прямой. Данный тысячеугольник разрезан на треугольники таким образом, что все указанные 1500 точек являются вершинами треугольников и эти треугольники не имеют никаких других вершин. Сколько получится треугольников при таком разрезании?

Реш **4**. О т в е т : 1998. Сумма всех углов полученных треугольников равна сумме углов 1000-угольника и ещё 500 углов 360°, соответствующих 500 внутренним точкам. Значит, сумма углов треугольников равна $998 \cdot 180^\circ + 500 \cdot 360^\circ = (998 + 2 \cdot 500)180^\circ$. Поэтому количество полученных треугольников равно $998 + 2 \cdot 500 = 1998$.

З-ча **5**. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 &= 3, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 &= 4, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 5. \end{cases}$$

Реш **5**. О т в е т : $x_1 = x_3 = x_5 = 1,\ x_2 = x_4 = -1$.

Запишем сначала первое уравнение, потом второе, из которого вычтено первое, потом третье, из которого вычтено второе, и т.д.:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_5 &= 1. \end{cases}$$

Теперь можно последовательно найти x_5, x_4, x_3, x_2, x_1.

8 класс

З-ча **1**. a, b, c и d — длины последовательных сторон четырёхугольника. Обозначим через S его площадь. Доказать, что

$$S \leqslant \frac{1}{4}(a+b)(c+d).$$

Реш **1**. Разрежем четырёхугольник на два треугольника со сторонами a и d, b и c. В результате получим $2S \leqslant ad + bc$. Остаётся доказать неравенство $2S \leqslant ac + bd$. Для этого поступим следующим образом. Отрежем треугольник со сторонами c и d, перевернём его и приложим к треугольнику со сторонами a и b так, чтобы получился четырёхугольник с последовательными сторонами a, b, c и d. Полученный четырёхугольник можно разрезать на два треугольника со сторонами a и c, b и d. Поэтому $2S \leqslant ac + bd$.

З-ча **2**. 1953 цифры выписаны по кругу. Известно, что если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого определённого места, то полученное 1953-значное число делится на 27. Докажите, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное число также будет делиться на 27.

Реш **2**. Мы докажем требуемое утверждение, заменив 1953 на произвольное натуральное число n, делящееся на 3. Пусть число $a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^{n-1} = a_0 + 10a$ делится на 27. Достаточно доказать, что тогда число $a_1 + a_2 \cdot 10 + \cdots + a_n \cdot 10^{n-2} + a_0 \cdot 10^{n-1} = a + 10^{n-1} a_0$ тоже делится на 27. Для этого достаточно проверить, что их разность $9a + (1 - 10^{n-1})a_0$ делится на 27. Пусть $x = 9a + (1 - 10^{n-1})a_0$ и $y = a_0 + 10a$. Число x делится на 27 тогда и только тогда, когда число $10x = 90a + (10 - 10^n)a_0 = 9y + (1 - 10^n)a_0$ делится на 27. Но если n делится на 3, то число $10^n - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n}$ делится на 27.

З-ча **3**. На окружности даны точки $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$. Построим все возможные выпуклые многоугольники, вершины которых находятся среди точек $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$. Разобьём эти многоугольники на две группы. В первую группу будут входить все многоугольники, у которых A_1 является вершиной. Во вторую группу входят все многоугольники, у которых A_1 в число вершин не входит. В какой группе больше многоугольников?

Реш **3**. Ответ: во второй. Каждому многоугольнику, не содержащему точку A_1, можно сопоставить многоугольник, содержащий точку A_1, просто добавив A_1 к его вершинам. Обратная операция (отбрасывание вершины A_1) возможна лишь для многоугольников, число вершин которых не меньше 4.

З-ча **4**. В плоскости расположено n зубчатых колёс таким образом, что первое колесо сцеплено своими зубцами со вторым, второе — с третьим и т.д. Наконец, последнее колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колёса такой системы?

Реш **4**. Ответ: при n чётном могут, при n нечётном не могут. См. решение задачи 3 для 7 класса.

З-ча **5**. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_{100} = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \cdots + 4x_{100} = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \cdots + 6x_{100} = 3, \\ \cdots \quad \cdots \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \cdots + 199x_{100} = 100. \end{cases}$$

Реш **5**. Ответ: $x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} = -1$, $x_2 = x_4 = \cdots = x_{100} = 1$. Решение аналогично решению задачи 5 для 7 класса.

9 класс

З-ча **1**. См. задачу 2 для 8 класса.

З-ча **2**. В плоскости дан $\Delta A_1 A_2 A_3$ и прямая l вне его, образующая с продолжением сторон треугольника A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 соответственно углы α_3, α_1, α_2. Через точки A_1, A_2, A_3 проводятся прямые, образующие с l соответственно углы $2d - \alpha_1$, $2d - \alpha_2$, $2d - \alpha_3$. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке. Все углы отсчитываются от прямой l в одном направлении. (*d обозначает угол 90° — прим. ред.*)

Реш **2**. Введём на плоскости систему координат, выбрав прямую l в качестве оси x. Пусть (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) — координаты вершин A_1, A_1, A_3. Прямая A_2A_3 задаётся уравнением

$$\frac{x - a_2}{a_3 - a_2} = \frac{y - b_2}{b_3 - b_2}.$$

Прямая, проведённая через вершину A_1, задаётся уравнением, в котором отношение коэффициентов при x и y то же самое по абсолютной величине, но имеет противоположный знак. Таким образом, эта прямая задаётся уравнением

$$\frac{x - a_1}{a_3 - a_2} + \frac{y - b_1}{b_3 - b_2} = 0.$$

Напишем аналогично уравнения прямых, проведённых через вершины A_2 и A_3. Умножим левые части этих уравнений на $(a_3 - a_2)(b_3 - b_2)$, $(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)$, $(a_2 - a_3)(b_2 - b_3)$ соответственно и сложим их. Легко проверить, что указанная сумма тождественно равна нулю. Из этого следует, что прямые, заданные этими уравнениями, пересекаются в одной точке.

З-ча **3**. Даны уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (1) и $-ax^2 + bx + c$ (2). Доказать, что если x_1 и x_2 — соответственно какие-либо корни уравнений (1) и (2), то найдётся такой корень x_3 уравнения $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$, что либо $x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_2$, либо $x_1 \geqslant x_3 \geqslant x_2$.

Реш **3**. При $x = x_1$ и при $x = x_2$ трёхчлен $\frac{a}{2}x^2 + bx + c$ принимает значения $-ax_1^2/2$ и $3ax_2^2/2$. Эти значения имеют разные знаки, поэтому один из корней трёхчлена расположен между x_1 и x_2.

З-ча **4**. Дан лист клетчатой бумаги размером 101×200 клеток. Начиная от какой-либо угловой клетки, идём по диагонали и каждый раз, доходя до границы, меняем направление движения по правилу, указанному на чертеже (???). Попадём ли мы когда-нибудь в одну из угловых клеток?

Реш **4**. Ответ: да, попадём.

Рассмотрим лист клетчатой бумаги размером 100×199 клеток, вершинами клеток которого служат центры клеток исходного листа. На новом листе бумаги отражение происходит по правилу отражения луча света. Каждый раз, когда луч доходит до края листа, будем спрямлять его, отражая лист симметрично относительно соответствующего края. В квадрате со стороной 19900 луч идёт по диагонали; концы диагонали соответствуют угловым клеткам.

З-ча **5**. Разрезать куб на три равные пирамиды.

Реш **5**. В качестве вершины пирамид можно взять одну из вершин куба, а в качестве их оснований — три грани куба, не содержащие эту вершину.

10 класс

З-ча **1**. Найти корни уравнения

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = 0.$$

Реш **1**. Ответ: $1, 2, \dots, n$. Равенство

$$1 - \frac{k}{1} + \frac{k(k-1)}{2!} - \cdots + (-1)^k \frac{k(k-1)\dots 2\cdot 1}{k!} = (1-1)^k = 0$$

показывает, что числа $k = 1, 2, \dots, n$ являются корнями данного уравнения. Больше n корней это уравнение иметь не может, поскольку его степень равна n.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 9 класса.

З-ча **3**. Пусть $x_0 = 10^9$, $x^n = \frac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}}$. Доказать, что $0 < x_{36} - \sqrt{2} < 10^{-9}$.

Реш **3**. Из тождества

$$x_n - \sqrt{2} = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}} - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_{n-1}}(x_{n-1} - \sqrt{2})^2$$

сразу получаем, что $x_n - \sqrt{2} > 0$. Кроме того, учитывая, что $\frac{x_{n-1}-\sqrt{2}}{x_{n-1}} < 1$, получаем

$$x_n - \sqrt{2} < \frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{2}, \tag{1}$$

а, учитывая, что $x_{n-1} > 1$, получаем

$$x_n - \sqrt{2} < \frac{(x_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2}. \tag{2}$$

Из неравенства (1) следует, что $x_n - \sqrt{2} < \frac{x_0}{2^n}$. В частности, $x_{30} - \sqrt{2} < \frac{10^9}{2^{30}} = \left(\frac{10^3}{2^{10}}\right)^3 = \left(\frac{1000}{1024}\right)^3 < 1$. Теперь, воспользовавшись неравенством (2), получим $x_{31} - \sqrt{2} < 1/2$, $x_{32} - \sqrt{2} < 1/2^3$, $x_{33} - \sqrt{2} < 1/2^7$, $x_{34} - \sqrt{2} < 1/2^{15}$, $x_{35} - \sqrt{2} < 1/2^{31}$, $x_{36} - \sqrt{2} < 1/2^{63}$. Поэтому $x_{36} - \sqrt{2} < 1/2^{63} < 1/2^{30} < 1/10^9$.

З-ча **4**. См. задачу 5 для 9 класса.

З-ча **5**. На бесконечной шахматной доске стоит конь. Найти все клетки, куда он может попасть за $2n$ ходов.

Реш **5**. Пусть для определённости конь стоит на чёрной клетке. Все клетки, куда он может попасть за 2 хода, изображены на рис.??? Случай $n = 1$ исключительный. При $n > 1$ множество клеток, куда может попасть конь за $2n$ ходов, устроено следующим образом. Возьмём квадрат со стороной $8n + 1$ (конь стоит в центре этого квадрата). Отрежем от этого квадрата четыре уголка со стороной $2n$ (на рис.??? соответствующая фигура изображена для $n = 2$). За $2n$ ходов конь может попасть в точности во все чёрные клетки полученной фигуры.

Докажем это. Прежде всего заметим, что после нечётного числа ходов конь попадает на белую клетку, а после чётного — на чёрную. Индукцией по m несложно доказать, что если $m \geqslant 3$, то за m ходов конь попадает в любую клетку соответствующего цвета (чёрного при чётном m и белого при нечётном m) фигуры, которая получается при отрезании от квадрата со стороной $4m+1$ четырёх уголков со стороной m. При $m = 3$ это легко проверяется, а шаг индукции очевиден.

XVII олимпиада (1954)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Правильную шестиконечную звезду разрезать на 4 части так, чтобы из них можно было сложить выпуклый многоугольник.

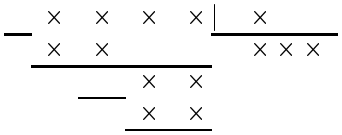
Реш **1**. См. рис.???

З-ча

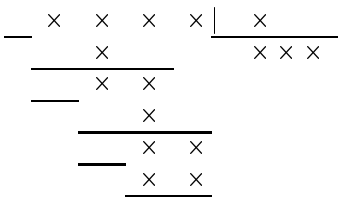
2. Даны два выпуклых многоугольника $A_1A_2A_3A_4\ldots A_n$ и $B_1B_2B_3B_4\ldots B_n$. Известно, что $A_1A_2 = B_1B_2, A_2A_3 = B_2B_3, \ldots, A_nA_1 = B_nB_1$ и $n-3$ угла одного многоугольника равны соответственным углам другого. Будут ли многоугольники равны?

Реш **2**. Ответ: да, будут. Применим индукцию по n. При $n = 3$ имеем два треугольника, у которых соответственные стороны равны. Рассмотрим теперь два n-угольника, где $n \geqslant 4$. По условию у них есть пара равных соответственных углов. Отрежем от каждого многоугольника треугольник, две стороны которого заключают данный угол. Эти треугольники равны, поэтому к оставшимся $(n-1)$-угольникам можно применить предположение индукции. Действительно, отрезая от равных углов равные углы, мы получаем равные углы.

З-ча **3**. Определить четырёхзначное число, если деление этого числа на однозначное производится по следующей схеме:

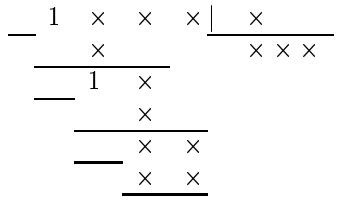


а деление этого же числа на другое однозначное производится по такой схеме:



Реш **3**. Ответ: 1014 (при делении на 2 и на 3), 1035 (при делении на 5 и на 9) или 1512 (при делении на 3 и на 7).

Вторая схема деления может быть только такой:



Если данное число равно $\overline{1abc}$, то согласно второй схеме деления $10 + a - x = 1$. Число x не превосходит 9 и является произведением двух натуральных чисел, меньших 10. Кроме того, согласно первой схеме деления число $10 + a$ является произведением двух натуральных чисел, отличных от 1. Для a остаются три возможности: $a = 0$, 5 или 6. В первой схеме производится деление, соответственно, на 2 или 5, на 3 или 5, на 4. Во второй — на 3 или 9, 2 или 7, 3 или 5. Далее, $10b + c$ делится на число, на которое производится деление в первой схеме. Перебирая возникающие в результате варианты, находим подходящие четырёхзначные числа.

З-ча **4**. Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2 + 1954 = n^2$?

Реш **4**. Ответ: нет, не существуют. Предположим, что $n^2 - m^2 = 1954$. Если одно из чисел m и n чётно, а другое нечётно, то число $n^2 - m^2$ нечётно. Поэтому оба числа m и n либо чётны, либо нечётны. Легко проверить, что тогда число $n^2 - m^2$ делится на 4. А число 1954 на 4 не делится.

З-ча **5**. Определить наибольшее значение отношения трёхзначного числа к числу, равному сумме цифр этого числа.

Реш **5**. Ответ: 100. Сумма цифр трёхзначного числа $100a + 10b + c$ равна $a + b + c$. Ясно, что $\frac{100a+10b+c}{a+b+c} \leqslant 100$. Кроме того, для числа 100 указанное отношение равно 100.

8 класс

З-ча **1**. Из квадрата размером 3 на 3 вырезать одну фигуру, которая представляет развёртку полной поверхности куба, длина ребра которого равна 1.

Реш **1**. Если мы возьмём квадрат со стороной 1, приложим к нему 4 квадрата со стороной 1 и к каждой из противоположных сторон этих четырёх квадратов приложим равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 1, то в результате получим фигуру, которая представляет собой требуемую развёртку. Эту фигуру можно вырезать из квадрата со стороной $2\sqrt{2} < 3$.

З-ча **2**. Из произвольной внутренней точки O выпуклого n-угольника опущены перпендикуляры на стороны (или их продолжения). На каждом перпендикуляре от точки O по направлению к стороне построен вектор, длина которого равна половине длины той стороны, на которую опущен перпендикуляр. Определить сумму построенных векторов.

Реш **2**. Если мы повернём указанные векторы на 90° и умножим их на 2, то они превратятся в векторы сторон многоугольника. Сумма векторов сторон многоугольника равна $\overrightarrow{0}$, поэтому сумма исходных векторов тоже равна $\overrightarrow{0}$.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 7 класса.

З-ча **5**. Найти все решения системы уравнений

$$x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+y\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+z\left(1-\frac{1}{2^{n+2}}\right)=0,$$

где $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Реш **5**. Ответ: $y = -3x$, $z = 2x$ (x — произвольное число).

Докажем, что указанная бесконечная система уравнений эквивалентна системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ 4x+2y+z&=0. \end{aligned}$$

Во-первых, если мы вычтем из первого уравнения второе уравнение, умноженное на $\frac{1}{2^{n+2}}$, то получим n-е уравнение исходной системы. Во-вторых, уже из первых двух уравнений исходной системы

$$\begin{aligned} x\left(1-\frac{1}{2}\right)+y\left(1-\frac{1}{4}\right)+z\left(1-\frac{1}{8}\right)&=0,\\ x\left(1-\frac{1}{4}\right)+y\left(1-\frac{1}{8}\right)+z\left(1-\frac{1}{16}\right)&=0 \end{aligned}$$

следуют указанные два уравнения. Действительно, вычтя из первого уравнения второе, получим $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}+\frac{z}{16}=0$. Прибавив это уравнение ко второму уравнению, получим $x + y + z = 0$.

9 класс

З-ча **1**. Доказать, что если

$$\begin{aligned} x_0^4+a_1x_0^3+a_2x_0^2+a_3x_0+a_4 &= 0,\\ 4x_0^3+3a_1x_0^2+2a_2x_0+a_3 &= 0, \end{aligned}$$

то $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ делится на $(x - x_0)^2$.

Реш **1**. Пусть $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. По условию $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Следовательно, x_0 — двукратный корень многочлена $f(x)$, т.е. многочлен $f(x)$ делится на $(x - x_0)^2$.

З-ча **2**. Дано число $12345678910111213141 5 \ldots 99100$. Вычеркнуть 100 цифр так, чтобы оставшееся число было наибольшим.

Реш **2**. Ответ: $9999978596061 \ldots 99100$. При вычёркивании из данного числа 100 цифр мы всегда будем получать числа с одним и тем же числом знаков, поэтому нужно, чтобы первые цифры были наибольшими возможными. Сначала вычеркнем 84 цифры (последняя из них — цифра 4 в числе 49) так,

чтобы получить число 999995051...5758596061...99100. Мы можем вычеркнуть ещё 16 цифр. Чтобы следующей за 99999 цифрой была цифра 9, нужно вычеркнуть 19 цифр; мы этого сделать не можем. Оставить цифру 8 мы тоже не можем: для этого нужно вычеркнуть 17 цифр. Но мы можем оставить цифру 7, вычёркивая 15 цифр 505152535455565. После этого мы имеем право вычеркнуть лишь одну цифру; это должна быть цифра 5 числа 58.

З-ча **3**. Дано 100 чисел a_1, a_2, a_3, ... , a_{100}, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} a_1 - 3a_2 + 2a_3 &\geqslant 0, \\ a_2 - 3a_3 + 2a_4 &\geqslant 0, \\ a_3 - 3a_4 + 2a_5 &\geqslant 0, \\ \dots &\quad \dots \\ \dots &\quad \dots \\ a_{99} - 3a_{100} + 2a_1 &\geqslant 0, \\ a_{100} - 3a_1 + 2a_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Доказать, что все числа a_i равны между собой.

Реш **3**. Сложим все эти неравенства. Коэффициент при a_k окажется равным $1 - 3 + 2 = 0$. Таким образом, у нас есть набор неотрицательных чисел $a_1 - 3a_2 + 2a_3$, ... , сумма которых равна 0. Значит, каждое из чисел равно 0, т.е. у нас есть система не неравенств, а уравнений. Эти уравнения удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2) + 2(a_3 - a_2) &\geqslant 0, \\ (a_2 - a_3) + 2(a_4 - a_3) &\geqslant 0, \\ \dots &\quad \dots \\ (a_{100} - a_1) + 2(a_2 - a_1) &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений последовательно получаем $a_2 - a_3 = (a_1 - a_2)/2$, $a_3 - a_4 = (a_2 - a_3)/2 = (a_1 - a_2)/2^2$, ... , $a_1 - a_2 = (a_{100} - a_1)/2 = (a_1 - a_2)/2^{100}$. Последнее равенство возможно лишь при $a_1 = a_2$. Но тогда $a_2 = a_3$, $a_3 = a_4$, ... , $a_{100} = a_1$.

З-ча **4**. Дан треугольник ABC. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямых AS, BS, CS соответственно со сторонами BC, CA, AB треугольника, где S — произвольная внутренняя точка треугольника ABC. Доказать, что, по крайней мере, в одном из полученных четырёхугольников AB_1SC_1, C_1SA_1B, A_1SB_1C углы при вершинах C_1, B_1, или C_1, A_1, или A_1, B_1 — одновременно оба неострые.

Реш **4**. Предположим, что в каждом из полученных четырёхугольников AB_1SC_1, C_1SA_1B, A_1SB_1C по крайней мере один из углов при каждой паре вершин C_1 и B_1, C_1 и A_1, A_1 и B_1 острый. Пусть, например, в четырёхугольнике AB_1SC_1 угол при вершине C_1 острый. Тогда в четырёхугольнике C_1SA_1B угол при вершине C_1 тупой, поэтому угол при вершине A_1 должен быть острым. Тогда в четырёхугольнике A_1SB_1C угол при вершине A_1 тупой, поэтому угол при вершине B_1 должен быть острым.

Пусть A_2, B_2, C_2 — основания высот опущенных из вершин A, B, C на стороны треугольника. Тогда точка C_1 должна лежать на отрезке BC_2, точка A_1 — на отрезке CA_2, точка B_1 — на отрезке AB_2. Но в таком случае отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 не могут пересекаться в одной точке, поскольку отрезки AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке (точке пересечения высот). Приходим к противоречию.

З-ча **5**. Существуют ли в пространстве четыре точки A, B, C, D такие, что $AB = CD = 8$ см, $AC = BD = 10$ см, $AD = BC = 13$ см?

Реш **5**. О т в е т : нет, не существуют. Неравенство $8^2 + 10^2 < 13^2$ показывает, что треугольник ABC тупоугольный. Покажем, что если все грани тетраэдра $ABCD$ равны, то треугольник ABC должен быть остроугольным. Любому тетраэдру можно сопоставить параллелепипед, проведя через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Если исходный тетраэдр равногранный, то грани полученного параллелепипеда являются параллелограммами с равными диагоналями, т.е. прямоугольниками. Таким образом, равногранному тетраэдру соответствует прямоугольный параллелепипед. Если длины рёбер этого параллелепипеда равны a, b, c, то квадраты длин рёбер исходного тетраэдра равны $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$, $c^2 + a^2$. Неравенства $(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) > c^2 + a^2$ и т.п. показывают, что грани исходного тетраэдра являются остроугольными треугольниками.

10 класс

З-ча **1**. Найти все действительные решения уравнения

$$x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0.$$

Реш **1**. О т в е т : $x = \pm 1,\ \ y = -\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Если мы рассмотрим данное уравнение как квадратное уравнение относительно x, то его дискриминант будет равен $4\big(\sin^2(xy) - 1\big)$. Дискриминант должен быть неотрицательным, поэтому $\sin^2(xy) \geqslant 1$, т.е. $\sin(xy) = \pm 1$. Решения уравнения $x^2 \pm 2x + 1 = 0$ имеют вид $x = \mp 1$. Далее, если $\sin(\mp y) = \pm 1$, то $\sin y = -1$.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 9 класса.

З-ча **3**. Дано 100 чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{array}{rcl} a_1 - 4a_2 + 3a_3 & \geqslant & 0, \\ a_2 - 4a_3 + 3a_4 & \geqslant & 0, \\ a_3 - 4a_4 + 3a_5 & \geqslant & 0, \\ \ldots & & \ldots \\ \ldots & & \ldots \\ a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 & \geqslant & 0, \\ a_{100} - 4a_1 + 3a_2 & \geqslant & 0. \end{array}$$

Известно, что $a_1 = 1$, определить a_2, a_3, ... , a_{100}.

Реш **3**. О т в е т : $a_1 = a_2 = \cdots = a_{100} = 1$. См. решение задачи 3 для 9 класса.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 9 класса.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 9 класса.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Дан лист клетчатой бумаги. Каждый узел сетки обозначается некоторой буквой. Каким наименьшим числом различных букв нужно обозначить эти узлы, чтобы на отрезке, соединяющем два узла, обозначенных одинаковыми буквами, находился, по крайней мере, один узел, обозначенный одной из других букв?

Реш **1**. О т в е т : двумя буквами. Эти буквы нужно расставить в шахматном порядке.

З-ча **2**. Город устроен по плану, изображенному на рис.???. Из точек A и B одновременно выезжают в одном направлении две машины, которые двигаются с одинаковой скоростью. Доехав до перекрёстка, каждая машина или продолжает движение в том же направлении, или поворачивает на 120° вправо или влево от направления движения (см. рис. ???).

Могут ли машины встретиться?

Реш **2**. О т в е т : нет, не могут. Машины проезжают перекрёстки в разные моменты времени, поэтому они могли бы встретиться только на некоторой улице, двигаясь навстречу друг другу. Но на каждой улице направление движения этих машин определено однозначно (рис.???); двигаться по одной улице в разных направлениях они не могут.

З-ча **3**. Решить систему:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} 10x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & & & = & 0, \\ & & 11x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & + & x_6 & & & = & 0, \\ & & & + & 15x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & + & 4x_6 & + & x_7 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & - & 3x_5 & + & x_6 & + & x_7 & = & 0, \\ 6x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 17x_5 & + & x_6 & & & = & 0, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & - & 16x_6 & + & 2x_7 & = & 0, \\ 4x_1 & - & 8x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & & & + & 19x_7 & = & 0. \end{array}$$

Реш **3**. О т в е т : $x_1 = x_2 = \cdots = x_7 = 0$.

Запишем уравнения рассматриваемой системы в виде $\sum_{i=1}^{7} a_{ij}x_i = 0$. Коэффициенты a_{ij} обладают следующим свойством: $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ для каждого j. Пусть x_1, ... , x_7 — решение рассматриваемой системы. Предположим, что хотя бы одно из чисел x_1, ... , x_7 отлично от нуля. Пусть x_k — наибольшее по абсолютной величине из этих чисел. Тогда $|a_{kk}x_k| > |\sum_{i \neq k} a_{ik}x_i|$, поэтому равенство $\sum_{i=1}^{7} a_{ik}x_i = 0$ не может выполняться. Приходим к противоречию.

8 класс

З-ча **1**. Из клетчатой бумаги вырезан квадрат 17×17. В клетках квадрата произвольным образом написаны числа 1, 2, 3, ... , 70 по одному и только одному числу в каждой клетке.

Доказать, что существуют четыре различные клетки с центрами в точках A, B, C, D такие, что $AB = CD$, $AD = BC$ и сумма чисел, стоящих в клетках с центрами в A и C, равна сумме чисел в клетках с центрами B и D.

Реш **1**. Рассмотрим всевозможные пары клеток, симметричных относительно центра квадрата. Количество таких пар равно $(17^2 - 1)/2 = 144$. Сумма чисел, написанных в двух клетках может быть равна 2, 3, ... , 140. Поэтому найдутся две пары клеток, симметричных относительно центра квадрата, с равными суммами написанных чисел. В качестве точек A и C возьмём центры одной пары клеток, а в качестве точек B и D — центры другой пары.

З-ча **2**. Даны четыре прямые m_1, m_2, m_3, m_4, пересекающиеся в одной точке O. Через произвольную точку A_1 прямой m_1 проводим прямую, параллельную m_4, до пересечения с прямой m_2 в точке A_2, через точку A_2 проводим прямую, параллельную m_1, до пересечения с m_3 в точке A_3, через A_3 проводим прямую, параллельную m_2, до пересечения с прямой m_4 в точке A_4, и через точку A_4 проводим прямую, параллельную m_3, до пересечения с m_1 в точке B.

Доказать, что $OB < \frac{OA_1}{2}$ (см. рис. ???).

Реш **2**. См. решение задачи 2 для 9 класса.

З-ча **3**. Дано число

$$H = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$$

(произведение простых чисел). Пусть 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, ... , H - все его делители, выписанные в порядке возрастания. Под рядом делителей выпишем ряд из $+1$ и -1 по следующему правилу: под единицей $+1$, под числом, которое разлагается на чётное число простых сомножителей, $+1$, и под числом, которое разлагается на нечётное число простых сомножителей, -1.

Доказать, что сумма чисел полученного ряда равна 0.

Реш **3**. Будем называть «чётным» делитель, который разлагается на чётное число простых сомножителей (1 относится к «чётным» делителям), а «нечётным» — делитель, который разлагается на нечётное число простых сомножителей. Докажем индукцией по k, что число $N_k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot p_k$ (произведение первых k простых чисел) имеет 2^{k-1} «чётных» делителей и 2^{k-1} «нечётных» делителей. (Тогда для числа N_k рассматриваемая сумма равна $2^{k-1} - 2^{k-1} = 0$.)

Для числа $N_1 = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для N_k. Число N_{k+1} имеет 2^{k-1} «чётных» делителей и 2^{k-1} «нечётных» делителей, не делящихся на p_{k+1} (все эти делители являются делителями числа N_k). Помимо этих делителей оно имеет делители, делящиеся на на p_{k+1}. А именно, 2^{k-1} «чётных» делителей, соответствующих «нечётным» делителям числа N_k, и 2^{k-1} «нечётных» делителей, соответствующих «чётным» делителям числа N_k. В итоге получаем $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$ «чётных» делителей и 2^k «нечётных» делителей.

З-ча **4**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **5**. Сколько осей симметрии может иметь семиугольник?

Реш **5**. Ответ: 0, 1 или 7.

Ось симметрии семиугольника обязательно проходит через одну из его вершин (остальные вершины разбиваются на пары симметричных вершин). Пусть у семиугольника есть ось симметрии. Тогда у него есть три пары равных углов и три пары равных сторон. Вторая ось симметрии может быть расположена тремя существенно различными (не симметричными) способами. Легко видеть, что в каждом из этих трёх случаев все стороны семиугольника оказываются равными и все углы тоже.

9 класс

З-ча **1**. На двух лучах l_1 и l_2, исходящих из точки O, отложены отрезки OA_1 и OB_1 на луче l_1 и OA_2 и OB_2 на луче l_2; при этом $\frac{OA_1}{OA_2} \neq \frac{OB_1}{OB_2}$.

Определить геометрическое место точек S пересечения прямых A_1A_2 и B_1B_2 при вращении луча l_2 около точки O (луч l_1 неподвижен).

Реш **1**. Применив теорему Менелая к треугольнику SA_2B_2 и прямой l_1, получим

$$\frac{SA_1}{A_2A_1} \cdot \frac{A_2O}{B_2O} \cdot \frac{B_2B_1}{SB_1} = 1.$$

При вращении луча l_2 отношения $A_2O : B_2O$ и $B_2B_1 : A_2A_1$ остаются постоянными, поэтому отношение $SA_1 : SB_1$ тоже остаётся постоянным. Точки A_1 и B_1 при этом фиксированы. Геометрическое место точек S, для которых отношение $SA_1 : SB_1$ постоянно, — это окружность (*окружность Аполлония*).

З-ча **2**. Даны четыре прямые m_1, m_2, m_3, m_4, пересекающиеся в одной точке O. Через произвольную точку A_1 прямой m_1 проводим прямую, параллельную прямой m_4, до пересечения с прямой m_2 в точке A_2, через A_2 проводим прямую, параллельную m_1, до пересечения с m_3 в точке A_3, через A_3 проводим прямую, параллельную m_2, до пересечения с m_4 в точке A_4 и через точку A_4 проводим прямую, параллельную m_3, до пересечения с m_1 в точке B.

Доказать, что $OB \leqslant \frac{OA_1}{4}$ (см. рис. ???).

Реш **2**. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OA_3}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OA_4}$. Выразим эти векторы через $e_1 = \vec{a}$ и $e_2 = \vec{d}$. В результате получим

$$\begin{aligned}\vec{b} &= e_1 + \lambda_1 e_2,\\ \vec{c} &= \vec{b} - \lambda_2 e_1 = (1-\lambda_2)e_1 + \lambda_1 e_2,\\ e_2 &= \vec{c} - \lambda_3 \vec{b} = (1-\lambda_2-\lambda_3)e_1 + (\lambda_1 - \lambda_1\lambda_3)e_2.\end{aligned}$$

Из последнего равенства вытекают соотношения $1-\lambda_2 = \lambda_3$ и $\lambda_1 - \lambda_1\lambda_3 = 1$. Наконец, пусть $-\mu e_1 = \overrightarrow{OB}$. Тогда $-\mu e_1 = e_2 - \lambda_4\vec{c} = -\lambda_4(1-\lambda_1) - \lambda_4\lambda_1 e_2$, поэтому $\mu = \lambda_4(1-\lambda_1)$ и $\lambda_4\lambda_1 = 1$. Учитывая все эти соотношения, получаем $\mu = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \lambda_3(1-\lambda_3) \leqslant \frac{1}{4}$.

З-ча **3**. Сто положительных чисел C_1, C_2, ... , C_{100} удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}C_1^2 + C_2^2 + \ldots C_{100}^2 &> 10000,\\ C_1 + C_2 + \ldots C_{100} &< 300.\end{aligned}$$

Доказать, что среди них можно найти три числа, сумма которых больше 100.

Реш **3**. Можно считать, что $C_1 \geqslant C_2 \geqslant \ldots \geqslant C_{100} > 0$. Если $C_1 \geqslant 100$, то $C_1 + C_2 + C_3 > 100$. Поэтому будем считать, что $C_1 < 100$. Тогда $100 - C_1 > 0$, $100 - C_2 > 0$, $C_1 - C_2 \geqslant 0$ и $C_1 - C_3 \geqslant 0$, поэтому

$$\begin{aligned}100(C_1+C_2+C_3) &\geqslant 100(C_1+C_2+C_3) - (100-C_1)(C_1-C_3) - (100-C_2)(C_2-C_3) =\\ &= C_1^2 + C_2^2 + C_3(300 - C_1 - C_2) >\\ &> C_1^2 + C_2^2 + C_3(C_3 + C_4 + \cdots + C_{100}) \geqslant\\ &\geqslant C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{100}^2 > 10000.\end{aligned}$$

Следовательно, $C_1 + C_2 + C_3 > 100$.

З-ча **4**. Если дан ряд из 15 чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_{15}, \tag{1}$$

то можно написать второй ряд

$$b_1, b_2, \ldots, b_{15}, \tag{2}$$

где $b_i (i = 1, 2, 3, \ldots, 15)$ равно числу чисел ряда (1), меньших a_i. Существует ли ряд чисел a_i, если дан ряд чисел b_i:

$$1, 0, 3, 6, 9, 4, 7, 2, 5, 8, 8, 5, 10, 13, 13?$$

Реш **4**. О т в е т : нет, не существует.

Предположим, что требуемый ряд чисел a_i существует. При перестановке чисел a_i числа b_i переставляются точно так же. Кроме того, если числа a_i расположены в порядке возрастания, то числа b_i тоже расположены в порядке возрастания. Пусть α_1, ... , α_{15} — это числа a_1, ... , a_{15}, расположенные в порядке возрастания, а β_1, ... , β_{15} — числа b_1, ... , b_{15}, расположенные в порядке возрастания, т.е. β_1, ... , β_{15} — это последовательность

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 13, 13.$$

Из того, что $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 2$, $\beta_4 = 3$, $\beta_5 = 4$, $\beta_6 = 5$ и $\beta_7 = 5$, следует, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 < \alpha_6 = \alpha_7$. В таком случае если $\alpha_7 = \alpha_8$, то $\beta_8 = 5$, а если $\alpha_7 < \alpha_8$, то $\beta_8 = 7$. А у нас $\beta_8 = 6$. Приходим к противоречию.

З-ча **5**. Дан отрезок OA. Из конца отрезка A выходит 5 отрезков AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5. Из каждой точки B_i могут выходить ещё пять новых отрезков, или ни одного нового отрезка и т.д.

Может ли число свободных концов построенных отрезков равняться 1001?

Под свободным концом отрезка понимаем точку, принадлежащую только одному отрезку (кроме точки O).

Реш **5**. Ответ: да, может. При проведении пяти отрезков из конца отрезка появляются 5 новых свободных концов и пропадает один старый. В результате число свободных концов увеличивается на 4. Поэтому если пятёрки отрезков проведены k раз, то число свободных концов равно $4k+1$. При $k=250$ получаем нужное число свободных концов.

10 класс

З-ча **1**. Сколько плоскостей симметрии может иметь треугольная пирамида?

Реш **1**. Ответ: 0, 1, 2, 3 или 6.

Плоскость симметрии треугольной пирамиды $ABCD$ обязательно содержит две её вершины. Действительно, если бы были две пары вершин, симметричных относительно одной плоскости, то все четыре вершины пирамиды лежали бы в одной плоскости. Поэтому плоскость симметрии однозначно задаётся парой вершин A и B, лежащих в ней. При этом $AC=BC$ и $AD=BD$.

Предположим, что есть две плоскости симметрии. Задающие их пары вершин могут либо иметь общую вершину (рис.???а), либо не иметь (рис.???б). В первом случае мы получаем правильную пирамиду, которая имеет либо 3 плоскость симметрии, либо 6 (когда длина бокового ребра равны длине ребра основания, т.е. в случае правильного тетраэдра). Во втором случае пирамида имеет либо 2 плоскости симметрии, либо 6 (если $c=d\neq a$, то новых плоскостей симметрии не возникает).

З-ча **2**. См. задачу 2 для 9 класса.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 9 класса.

З-ча **4**. Известно, что модули всех корней уравнений

$$\begin{aligned} x^2+Ax+B &= 0,\\ x^2+Cx+D &= 0 \end{aligned}$$

меньше единицы.

Доказать, что модули корней уравнения $x^2+\frac{A+C}{2}x+\frac{B+D}{2}=0$ также меньше единицы. A, B, C, D — действительные числа.

Реш **4**. Пусть $|x|>1$. Тогда $x^2+Ax+B>0$ и $x^2+Cx+D>0$. Поэтому $x^2+\frac{A+C}{2}x+\frac{B+D}{2}>0$.

З-ча **5**. Рассматриваются всевозможные десятизначные числа, записываемые при помощи 2 и 1. Разбить их на два класса так, чтобы при сложении любых двух чисел каждого класса получилось число, в написании которого содержится не менее двух троек.

Реш **5**. Отнесём к первому классу все числа, в записи которых встречается чётное число двоек, а ко второму классу — все числа, в записи которых встречается нечётное число двоек. Два числа одного класса либо содержат одинаковое число двоек, либо в одном числе двоек по крайней мере на две больше, чем в другом. Если два числа различны, то на каком-то месте в одном числе стоит 1, а в другом числе стоит 2; если же двоек у этих чисел одинаковое количество, то таких мест по крайней мере два. Если в одном числе двоек по крайней мере на две больше, чем в другом, то по крайней мере двум двойкам в записи первого числа соответствуют единицы в записи второго числа.

XIX олимпиада (1956)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Докажите, что не существует на плоскости четырех точек A, B, C и D таких, что все треугольники ABC, BCD, CDA, DAB остроугольные.

Реш **1**. Мы предполагаем, что никакие три из четырёх данных точек не лежат на одной прямой. Возможны два различных расположения четырёх точек на плоскости.

1) Точки A, B, C и D являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Сумма углов четырёхугольника равна 360°, поэтому не все его углы острые. Возьмём не острый угол четырёхугольника; ему соответствует не остроугольный треугольник.

2) Точки A, B, C и D не являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Тогда одна из них лежит внутри треугольника с вершинами в остальных точках. Пусть для определённости точки D лежит внутри треугольника ABC. Сумма трёх углов с вершиной D равна 360°, поэтому один из них не меньше 120°. Значит, угол при вершине D в одном из треугольников BCD, CDA, DAB не острый.

З-ча **2**. Найти все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении числа на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

Реш **2**. Ответ: 18, 45, 90 и 99.

По условию сумма цифр числа a и числа $9a$ одна и та же. Поэтому согласно признаку делимости на 9 число a делится на 9. Двузначные числа, делящиеся на 9, следующие: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 и 99. Из них числа 27, 36, 54, 63, 72 и 81 не обладают требуемым свойством; в этом можно убедиться, умножая их, соответственно, на 7, 8, 7, 3, 4 и 9. Оставшиеся числа требуемым свойством обладают.

З-ча **3**. Имеется замкнутая самопересекающаяся ломаная. Известно, что она пересекает каждое свое звено ровно один раз. Докажите, что число звеньев чётно.

Реш **3**. Через точку самопересечения проходят ровно два звена ломаной (если бы проходили три звена, то каждое из них ломаная пересекала бы по крайней мере два раза). Кроме того, на каждом звене лежит ровно одна точка самопересечения. Поэтому, сопоставив точке самопересечения пару пересекающихся в ней звеньев, мы получим разбиение звеньев на пары.

З-ча **4**. Найти все числа, на которые может быть сократима при целом значении l дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$.

Реш **4**. Вычислим НОД$(5l+6, 8l+7)$, пользуясь тем, что НОД(a, b) = НОД$(a-b, b)$. В результате получим НОД$(5l+6, 8l+7)$ = НОД$(5l+6, 3l+1)$ = НОД$(2l+5, 3l+1)$ = НОД$(2l+5, l-4)$ = НОД$(l+9, l-4)$ = НОД$(13, l-4)$. Число 13 простое, поэтому данная дробь может быть сократима только на 13. При $l = 4$ мы получаем дробь $\frac{26}{39}$, которая действительно сократима на 13.

З-ча **5**. Какое наименьшее число точек можно выбрать на окружности длины 1956 так, чтобы для каждой из этих точек нашлась ровно одна выбранная точка на расстоянии 1 и ровно одна на расстоянии 2 (расстояния измеряются по окружности)?

Реш **5**. Ответ: 1304.

Пусть A — одна из выбранных точек, B и C — выбранные точки, удалённые от неё на расстояния 1 и 2 соответственно. Расположение в порядке ABC невозможно, поскольку в таком случае для точки B есть две выбранные точки на расстоянии 1. Поэтому точки расположены в таком порядке: $C\quad AB$ (или $BA\quad C$). Пусть D — точка, удалённая от C на расстояние 1. Расположение $CDAB$, очевидно, невозможно. Поэтому расположение такое: $DC\quad AB$. Пусть, далее, E — точка, удалённая от B на расстояние 1. Она расположена следующим образом: $DC\quad AB\quad E$. Продолжая эти рассуждения, мы увидим, что окружность длины 1956 окажется разбитой на $1956/3 = 652$ дуги длины 3 (концами этих дуг служат точки A, C, E, ...). На каждой дуге лежит одна точка. Всего получаем $2 \cdot 652 = 1304$ точки. Все эти точки обязательно должны присутствовать.

8 класс

З-ча **1**. На сторонах AB и CB треугольника ABC откладываются равные отрезки произвольной длины AD и CE. Найти геометрическое место середин отрезков DE.

Реш **1**. Пусть X — середина отрезка DE, M — середина отрезка AC. Достроим треугольники ADX и CEX до параллелограммов $ADXA'$ и $CEXC'$. Точка X является серединой отрезка DE, поэтому отрезки AA' и $C'C$ равны. Ясно также, что эти отрезки параллельны, а значит, $AA'CC'$ — параллелограмм.

Поэтому точка M — середина отрезка $A'C'$. Из равенства отрезков AD и CE следует, что треугольник $A'XC'$ равнобедренный. Поэтому его медиана XM является также и биссектрисой. Следовательно, прямая XM параллельна биссектрисе угла B треугольника ABC. Таким образом, точка X лежит на фиксированной прямой, проходящей через точку M. Искомое ГМТ — отрезок этой прямой, лежащий внутри треугольника ABC.

З-ча **2**. В десятичной записи положительного числа α отброшены все десятичные знаки, начиная с третьего знака после запятой (т.е. взято приближение α с недостатком с точностью до $0,01$). Полученное число делится на α и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться (указать все значения)?

Реш **2**. Ответ: 0, $\frac{50}{100}$, $\frac{51}{100}$, ... , $\frac{99}{100}$, 1.

Пусть $\alpha = \frac{n}{100} + \alpha_1$, где n — целое число и $0 \leqslant \alpha_1 < \frac{1}{100}$. Пусть, далее, $\frac{1}{\alpha}\frac{n}{100} = \frac{m}{100} + \alpha_2$, где m — целое число и $0 \leqslant \alpha_2 < \frac{1}{100}$. Нас интересует число $\frac{m}{100}$. Ясно, что $100\alpha = n + 100\alpha_1$, поэтому $\frac{n}{100\alpha} = \frac{n}{n+100\alpha_1} \leqslant 1$. Если $n = 0$, то $\frac{m}{100} = 0$. Если же $n > 0$, то $\frac{n}{n+100\alpha_1} > \frac{1}{2}$, поскольку $100\alpha_1 < 1$. Дробь $\frac{n}{n+100\alpha_1}$ может принимать все значение от $1/2$ до 1. Действительно, положим $n = 1$. При изменении α_1 от 0 до $\frac{1}{100}$ число $\frac{1}{1+100\alpha_1}$ изменяется от 1 до $1/2$.

З-ча **3**. На окружности длины 15 выбрано n точек, так что для каждой имеется ровно одна выбранная точка на расстоянии 1 и ровно одна на расстоянии 2 (расстояние измеряется по окружности). Докажите, что n делится на 10.

Реш **3**. Из решения задачи 5 для 7 класса следует, что минимальное число выбранных точек равно 10. Кроме того, система выбранных точек состоит из нескольких наборов таких десяток точек.

З-ча **4**. Пусть a, b, c, d, l — целые числа. Докажите, что если дробь $\frac{al+b}{cl+d}$ сократима на число k, то $ad - bc$ делится на k.

Реш **4**. Предположим, что $al + b = km$ и $cl + d = kn$. Умножим первое уравнение на $-c$, а второе на a. Сложив эти уравнения, получим $ad - bc = k(na - mc)$. Следовательно, $ad - bc$ делится на k.

З-ча **5**. На клетчатой бумаге написана таблица, причем в каждой клетке стоит число, равное среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в соседних клетках. Все числа в таблице различны. Докажите, что наибольшее число стоит с края (т.е. по крайней мере одна из соседних клеток отсутствует).

Реш **5**. Предположим, что наибольшее число a стоит не с края. Тогда у него в таблице есть все четыре соседних числа a_1, a_2, a_3, a_4 и при этом $a = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4$. Но $a > a_1$, $a > a_2$, $a > a_3$, $a > a_4$. Поэтому $a = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4$. Приходим к противоречию.

9 класс

З-ча **1**. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ взят четырехугольник $KLMN$, образованный центрами тяжести треугольников ABC, BCD, DBA и CDA. Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, пересекаются в той же точке, что и прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $KLMN$.

Реш **1**. Указанные прямые пересекаются в центре масс четырёхугольника $ABCD$, т.е. в центре масс системы точек A, B, C, D с одинаковыми массами.

З-ча **2**. В десятичной записи положительного числа α отброшены все десятичные знаки, начиная с четвертого знака после запятой (т.е. взято приближение α с недостатком с точностью до $0,001$). Полученное число делится на α и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться (указать все значения)?

Реш **2**. Ответ: 0, $\frac{500}{1000}$, $\frac{501}{1000}$, ... , $\frac{999}{1000}$, 1. См. решение задачи 2 для 8 класса.

З-ча **3**. На клетчатой бумаге написана таблица, причем в каждой клетке стоит число, равное среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в соседних клетках. Из таблицы выбран кусок. Докажите, что если некоторое число больше всех остальных на этом куске, то оно стоит с края (т.е. по крайней мере одна из соседних клеток отсутствует).

Реш **3**. См. решение задачи 5 для 8 класса.

З-ча **4**. Даны положительные числа h, s_1, s_2 и расположенный в пространстве треугольник ABC. Сколькими способами можно выбрать точку D так, чтобы в тетраэдре $ABCD$ высота, опущенная из вершины D, была равна h, а площади граней ACD и BCD соответственно s_1 и s_2 (исследовать все возможные случаи)?

Реш **4**. Ответ: 0, 2, 4 или 8.

Чтобы высота, опущенная из вершины D, была равна h, точка D должна лежать в одной из двух плоскостей Π_1 и Π_2, параллельных плоскости ABC. Чтобы площадь грани ACD была равна s_1, точка D

должна лежать на цилиндре с осью AC, а чтобы площадь грани BCD была равна s_2, точка D должна лежать на цилиндре с осью BC. Пересечение плоскости Π_1 с первым цилиндром — это либо пара прямых, либо одна прямая, либо пустое множество, причём прямые должны быть параллельны AC. Для второго цилиндра получаются прямые, параллельные прямой BC, которая пересекает прямую AC. Поэтому при пересечении цилиндров плоскостью Π_1 получается либо пустое множество, либо пара пересекающихся прямых, либо прямая, пересекающая пару параллельных прямых, либо пара параллельных прямых, пересекающая другую пару параллельных прямых. Количество точек, принадлежащих обоим цилиндрам и плоскости, равно соответственно 0, 1, 2 и 4. Столько же точек пересечения получаем и для плоскости Π_2.

З-ча **5**. Пусть a, b, c, d, l — целые числа. Докажите, что если дробь $\frac{al+b}{cl+d}$ сократима на число k, то $ad-bc$ делится на k.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. В треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие вершины — на боковых сторонах треугольника. Доказать, что сторона квадрата меньше $2r$, но больше $\sqrt{2}r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

Реш **1**. Пусть две вершины рассматриваемого квадрата лежат на стороне AB. Окружность S_1, вписанная в этот квадрат, касается стороны AB и расположена строго внутри данного треугольника ABC (она заведомо не касается сторон AC и BC). Поэтому существует треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны сторонам треугольника ABC и касаются окружности S_1, а сам он расположен внутри треугольника ABC, причём не совпадает с ним. Следовательно, радиус окружности S_1 меньше r. Но сторона квадрата равна удвоенному радиусу окружности S_1.

Рассмотрим теперь окружность S_2, описанную вокруг квадрата. Она имеет общую точку с каждой стороной треугольника ABC, причём по крайней мере стороны AB она не касается. Поэтому существует треугольник $A_2B_2C_2$, стороны которого параллельны сторонам треугольника ABC и касаются окружности S_2, а сам он содержит треугольник ABC, причём не совпадает с ним. Следовательно, радиус окружности S_2 больше r. Но сторона квадрата равна радиусу окружности S_2, умноженному на $\sqrt{2}$.

З-ча **2**. В десятичной записи положительного числа α отброшены все десятичные знаки, начиная с пятого знака после запятой (т.е. взято приближение α с недостатком с точностью до $0,0001$). Полученное число делится на α и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться (указать все значения)?

Реш **2**. Ответ: 0, $\frac{5000}{10000}$, $\frac{5001}{10000}$, $\dots$, $\frac{9999}{10000}$, 1. См. решение задачи 2 для 8 класса.

З-ча **3**. См. задачу 4 для 8 класса.

З-ча **4**. Дана замкнутая пространственная ломаная. Некоторая плоскость пересекает все её звенья: A_1A_2 в точке B_1, A_2A_3 — в точке B_2, $\dots$, A_nA_1 — в точке B_n. Докажите, что

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdots\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=1.$$

Реш **4**. Рассмотрим проекцию на прямую, ортогональную плоскости сечения. Все точки B_1, $\dots$, B_n проецируются в одну и ту же точку B. Пусть A_1', $\dots$, A_n' — проекции точек A_1, $\dots$, A_n. Тогда

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdots\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=\frac{A_1'B}{BA_2'}\frac{A_2'B}{BA_3'}\cdots\frac{A_n'B}{BA_1'}=1.$$

З-ча **5**. Докажите, что система уравнений

$$\begin{aligned} x_1-x_2 &= a,\\ x_3-x_4 &= b,\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1 \end{aligned}$$

имеет хотя бы одно положительное решение

$$x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0,\ x_4>0$$

тогда и только тогда, когда $|a|+|b|<1$.

Реш **5**. Если $a \geqslant 0$, то запишем первое уравнение в виде $x_1 = x_2 + a$, а если $a < 0$, то запишем его в виде $x_2 = x_1 - a$. Во втором случае сделаем замену $x_1' = x_2$, $x_2' = x_1$. Таким образом, можно считать, что $x_1 = x_2 + a$ и $a \geqslant 0$. Аналогично можно считать, что $x_3 = x_4 + b$ и $b \geqslant 0$. Поэтому если данная система имеет положительное решение, то $1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_2 + 2x_4 + a + b > a + b$ (если хотя бы одно их чисел a, b отрицательное, то мы получаем неравенство $1 > |a| + |b|$).

Предположим теперь, что $a + b < 1$, причём числа a и b неотрицательные. Тогда можно положить $x_2 = x_4 = (1 - a - b)/4$, $x_1 = x_2 + a$, $x_3 = x_4 + b$. В результате получим положительное решение данной системы.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Точка O — центр круга, описанного около треугольника ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны точке O относительно сторон треугольника ABC. Докажите, что все высоты треугольника $A_1B_1C_1$ проходят через точку O, а все высоты треугольника ABC проходят через центр круга, описанного около треугольника $A_1B_1C_1$.

Реш **1**. Пусть A_2, B_2, C_2 — середины сторон CB, BA, AC. Ясно, что $OA_2 \perp BC$ и $BC \| B_2C_2 \| B_1C_1$. Поэтому $OA_1 \perp B_1C_1$, т.е. OA_1 — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что OB_1 и OC_1 тоже являются высотами.

Ясно также, что $B_1C_1 = 2B_2C_2 = BC$, поэтому BCB_1C_1 — параллелограмм. Это означает, что отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P, которая является их серединой. Аналогично доказывается, что точка P является серединой отрезка AA_1. Таким образом, при симметрии относительно точки P треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. При этой симметрии точка O, которая является центром описанной окружности треугольника ABC и точкой пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$, переходит в точку, которая является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и точкой пересечения высот треугольника ABC.

З-ча **2**. Точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 делят окружность радиуса 1 на шесть равных частей. Из A_1 проведен луч l_1 в направлении A_2, из A_2 — луч l_2 в направлении A_3, ..., из A_6 — луч l_6 в направлении A_1. Из точки B_1, взятой на луче l_1, опускается перпендикуляр на луч l_6, из основания этого перпендикуляра опускается перпендикуляр на l_5 и т.д. Основание шестого перпендикуляра совпало с B_1. Найти отрезок B_1A_1.

Реш **2**. Ответ: $B_1A_1 = 2$.

Пусть B_2, B_3, ..., B_7 — основания перпендикуляров, опущенных на l_6, l_5, ..., l_1; $x_1 = A_2B_1$, $x_2 = A_1B_2$, $x_3 = A_6B_3$, ..., $x_7 = A_2B_7$. Тогда $x_{k+1} = \frac{1}{2}(1 + x_k)$. По условию $x_1 = x_7$. Но

$$x_7 = \frac{1}{2}(1 + x_6) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}(1 + x_5)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}(1 + x_5)\right)\right) = \ldots,$$

поэтому

$$x_7 = \frac{1}{2} + \frac{x_6}{2} = \frac{3}{4} + \frac{x_5}{4} = \frac{7}{8} + \frac{x_4}{8} = \cdots = \frac{63}{64} + \frac{x_1}{64}.$$

Таким образом, получаем уравнение $\frac{63}{64} + \frac{x_1}{64} = x_1$, откуда $x_1 = 1$. Ясно также, что $B_1A_1 = 1 + x$.

З-ча **3**. 100 чисел, среди которых есть положительные и отрицательные, выписаны в ряд. Подчеркнуто, во-первых, каждое положительное число, а во-вторых, каждое число, сумма которого со следующим положительна. Может ли сумма всех подчеркнутых чисел оказаться отрицательной? Равной нулю?

Реш **3**. Ответ: нет, не может.

Будем подчёркивать положительные числа одной чертой, а отрицательные числа, сумма которых со следующим числом положительна, двумя чертами. Ясно, что после каждого подчёркнутого двумя чертами числом a стоит число b, подчёркнутое одной чертой, причём $a + b > 0$. Подчёркнутые числа разбиваются на следующие группы: пары, состоящие из подчёркнутого двумя чертами числа и следующего за ним числа, и все остальные подчёркнутые числа. Сумма чисел в каждой группе положительна.

З-ча **4**. 64 неотрицательных числа, сумма которых равна 1956, расположены в форме квадратной таблицы: по восемь чисел в каждой строке и в каждом столбце. Сумма чисел, стоящих на одной из диагоналей, равна 112. Числа, расположенные симметрично относительно этой диагонали, равны. Докажите, что сумма чисел в любом столбце меньше 1035.

Реш **4**. Предположим, что сумма чисел в некотором столбце равна $S \geqslant 1035$. Рассмотрим строку, симметричную этому столбцу относительно выделенной диагонали. Сумма чисел в этой строке тоже

равна S, а сумма всех чисел, стоящих в этом столбце и этой строке, равна $2S - s$, где s — число, стоящее на их пересечении. Число s стоит на выделенной диагонали, поэтому $s \leqslant 112$. Следовательно, $2S - s \geqslant 2 \cdot 1035 - 112 = 1958 > 1956$. Приходим к противоречию.

З-ча **5**. На столе лежат 15 журналов, закрывающих его целиком. Докажите, что можно забрать семь журналов так, чтобы оставшиеся журналы закрывали не меньше $8/15$ площади стола.

(*Эту задачу не решил никто из участников олимпиады.*)

Реш **5**. Докажем сначала, что если n журналов покрывают площадь S, то можно убрать один журнал так, чтобы оставшиеся журналы покрывали площадь не менее $(n-1)S/n$. Если после того как мы уберём некоторый журнал, оставшиеся журналы будут покрывать площадь меньше $(n-1)S/n$, то площадь, которую покрывает только этот журнал, больше S/n. Предположим, что после того как мы уберём произвольный журнал, оставшиеся журналы будут покрывать площадь меньше $(n-1)S/n$. Тогда площадь, которую покрывает только один (произвольный) журнал, больше S/n. Поэтому площадь, которую покрывают $n-1$ журналов, больше $(n-1)S/n$. Приходим к противоречию.

Пусть 15 журналов покрывают площадь S. Тогда можно убрать один журнал так, чтобы оставшиеся журналы покрывали площадь $S_1 \leqslant \frac{14}{15}S$. Затем можно убрать второй журнал так, чтобы оставшиеся журналы покрывали площадь $S_2 \leqslant \frac{13}{14}S_1 \leqslant \frac{13}{15}S$, и т.д. После того как мы уберём седьмой журнал, оставшиеся журналы будут покрывать площадь $S_7 \leqslant \frac{8}{9}S_6 \leqslant \frac{8}{15}S$.

8 класс

З-ча **1**. Груз весом 13,5 т упакован в ящики так, что вес каждого ящика не превосходит 350 кг. Докажите, что этот груз можно перевезти на 11 полуторатонках.(Весом пустого ящика можно пренебречь.)

Реш **1**. Выделим 8 машин и будем последовательно их грузить, причём каждый раз тот ящик, который уже нельзя погрузить, будем ставить рядом с машиной. Погруженные ящики вместе с ящиками, стоящими рядом с машинами, весят более $8 \cdot 1{,}5 = 12$ т, поэтому оставшиеся ящики весят менее 1,5 т; их можно увезти на одной полуторатонке. Поскольку $4 \cdot 350 = 1400 < 1500$, на одной машине можно увезти любые 4 ящика. Значит, 8 ящиков, стоящих рядом с машинами, можно увезти на двух оставшихся полуторатонках.

З-ча **2**. 64 неотрицательных числа, сумма которых равна 1956, расположены в форме квадратной таблицы по восемь чисел в каждой строке и в каждом столбце. Сумма чисел, стоящих на двух диагоналях, равна 112. Числа, расположенные симметрично относительно любой диагонали, равны. Докажите, что сумма чисел в любой строке меньше 518.

Реш **2**. Предположим, что сумма чисел в некоторой строке равна $S \geqslant 518$. Рассмотрим два столбца, симметричных этой строке относительно двух диагоналей, и ещё строку, симметричную этим столбцам. Число 8 чётно, поэтому мы получим два разных столбца и две разных строки. На пересечениях этих строк и столбцов стоят 4 числа, сумма которых равна $s \leqslant 112$. Сумма всех чисел, стоящих в этих двух строках и двух столбцах равна $4S - s \geqslant 4 \cdot 518 - 112 = 1960 > 1956$. Приходим к противоречию.

З-ча **3**. Все точки данного отрезка AB проектируются на всевозможные прямые, проходящие через данную точку O. Найти геометрическое место этих проекций.

Реш **3**. Если A' — проекция точки A на прямую, проходящую через точку O, то $\angle OA'A = 90°$, поэтому точка A' лежит на окружности с диаметром OA (мы предполагаем, что прямые проводятся на плоскости). Рассмотрим две окружности с диаметрами OA и OB. Искомое ГМТ состоит из точек, лежащих внутри одной из этих окружностей, но вне другой (рис.???).

З-ча **4**. 100 чисел, среди которых есть положительные и отрицательные, выписаны в ряд. Подчеркнуто, во-первых, каждое положительное число, во-вторых, каждое число, сумма которого со следующим положительна, и, в-третьих, каждое число, сумма которого с двумя следующими положительна. Может ли сумма всех подчеркнутых чисел оказаться отрицательной? Равной нулю?

Реш **4**. О т в е т : нет, не может.

Будем подчёркивать числа следующим образом: 1) положительные числа одной чертой; 2) отрицательные числа, сумма которых со следующим числом положительна, двумя чертами; 3) отрицательные числа, для которых сумма со следующим числом неположительна, но сумма со следующими двумя числами положительна, тремя чертами. После каждого подчёркнутого двумя чертами числом a стоит число b, подчёркнутое одной чертой, причём $a + b > 0$. После каждого подчёркнутого тремя чертами числом a стоит число b, подчёркнутое двумя чертами, а за ним стоит число c, подчёркнутое одной чертой. При этом $a + b + c > 0$. Подчёркнутые числа разобьём на группы следующим образом. Сначала возьмём все тройки, состоящие из числа, подчёркнутого тремя чертами, и двух следующих за ним числами. Среди оставшихся подчёркнутых чисел возьмём пары, состоящие из подчёркнутого двумя чертами числа и сле-

дующего за ним числа. После этого возьмём все остальные подчёркнутые числа. Сумма чисел в каждой группе положительна.

З-ча **5**. В прямоугольнике площадью 5 кв. единиц расположены девять прямоугольников, площадь каждого из которых равна единице. Докажите, что площадь общей части некоторых двух прямоугольников больше или равна 1/9.

Реш **5**. Предположим, что площадь общей части любых двух прямоугольников меньше 1/9. Покажем, что тогда они занимают площадь больше 5. Занумеруем прямоугольники произвольным образом. Первый прямоугольник занимает площадь 1. Добавим второй прямоугольник. Площадь общей части первого и второго прямоугольника меньше 1/9, поэтому добавится площадь больше 8/9. Добавим третий прямоугольник. Площадь общей части третьего прямоугольника с первым и вторым меньше 2/9, поэтому добавится площадь больше 7/9 и т.д. В результате получим, что все девять прямоугольников занимают площадь больше

$$1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \cdots + \frac{1}{9} = 5.$$

9 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 8 класса.

З-ча **2**. В кубе, ребро которого равно 13, выбрано 1956 точек. Можно ли в этот куб поместить кубик с ребром 1 так, чтобы внутри него не было ни одной выбранной точки?

Реш **2**. Ответ: да, можно. Разрежем данный куб на $13^3 = 2197$ кубиков с ребром 1. Если бы *внутри* каждого из этих кубиков была выбранная точка, то количество выбранных точек было бы не меньше 2197, что противоречит условию. Следовательно, внутри по крайней мере одного из этих кубиков не лежит ни одной выбранной точки.

З-ча **3**. Взяли три числа x, y, z. Вычислили абсолютные величины попарных разностей $x_1 = |x - y|$, $y_1 = |y - z|$, $z_1 = |z - x|$. Тем же способом по числам x_1, y_1, z_1 построили числа x_2, y_2, z_2 и т.д. Оказалось, что при некотором n $x_n = x$, $y_n = y$, $z_n = z$. Зная, что $x = 1$, найти y и z.

Реш **3**. Ответ: $y = z = 0$.

Числа x_n, y_n, z_n неотрицательны, поэтому числа x, y, z тоже неотрицательны. Если бы все числа x, y, z были положительны, то наибольшее из чисел x_1, y_1, z_1 было бы строго меньше наибольшего из чисел x, y, z, а тогда и наибольшее из чисел x_n, y_n, z_n было бы строго меньше наибольшего из чисел x, y, z. Поэтому среди чисел x, y, z есть 0. Аналогично доказывается, что среди чисел x_1, y_1, z_1 есть 0 (при $n = 1$ доказывать ничего не нужно, потому что тогда $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$). Это означает, что два из чисел x, y, z равны. В итоге получаем, что неупорядоченный набор чисел x, y, z может быть равен либо 0, 0, 1, либо 0, 1, 1. Очевидно, что второй набор не обладает требуемым свойством.

З-ча **4**. Четырёхугольник описан около окружности. Докажите, что прямые, соединяющие соседние точки касания и не пересекающиеся в одной из этих точек, пересекаются на продолжении диагонали или параллельны ей.

Реш **4**. При решении этой задачи удобно считать, что четырёхугольник составлен из двух треугольников, поэтому введём следующие обозначения: $ACBC'$ — данный четырёхугольник, A_1 и B_1 — точки касания со сторонами BC и AC, A_1' и B_1' — точки касания со сторонами BC' и AC', C_1 и C_1' — точки, в которых прямые A_1B_1 и $A_1'B_1'$ пересекают прямую AB (точки C_1 и C_1' определены лишь в том случае, когда соответствующие прямые не параллельны).

Если $A_1B_1 \| AB$, то $AB_1 : BA_1 = B_1C : A_1C = 1$. Поэтому $AB_1 = BA_1$, а значит, $AB_1' = BA_1'$, поскольку $AB_1 = AB_1'$ и $BA_1 = BA_1'$. Таким образом, $A_1'B_1' \| AB$.

Будем теперь считать, что точки C_1 и C_1' определены; нужно доказать, что они совпадают. Согласно теореме Менелая $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Учитывая, что $A_1C = B_1C$, получаем $AC_1 : C_1B = AB_1 : A_1B$. Аналогично $AC_1' : C_1'B = AB_1' : A_1'B$. Но $AB_1 = AB_1'$ и $BA_1 = BA_1'$. Поэтому $AC_1 : C_1B = AC_1' : C_1'B$, а значит, $C_1 = C_1'$, поскольку обе эти точки лежат вне отрезка AB.

З-ча **5**. На клетчатой бумаге выбраны три точки A, B, C, находящиеся в вершинах клеток. Докажите, что если треугольник ABC остроугольный, то внутри или на сторонах его есть по крайней мере еще одна вершина клетки.

Реш **5**. Построим прямоугольник со сторонами, идущими по линиям клетчатой бумаги, так, чтобы вершины A, B, C лежали на его сторонах. Ни одна из вершин A, B, C не может оказаться внутри этого прямоугольника, поскольку иначе угол при этой вершине был бы тупым. По крайней мере одна из точек A, B, C лежит на стороне прямоугольника, а не в его вершине, поскольку иначе треугольник ABC был

бы прямоугольным. Пусть для определённости вершина A лежит на стороне прямоугольника. Введём на плоскости координаты, выбрав точку A в качестве начала координат, а эту сторону прямоугольника — в качестве оси Ox. Ось Oy направим так, чтобы прямоугольник лежал в полуплоскости $y \geqslant 0$. Ни одна из вершин B и C не лежит на оси Ox, поскольку иначе угол при вершине A был бы тупым. Таким образом, если точки B и C имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2), то $y_1, y_2 \geqslant 1$, а числа x_1 и x_2 имеют разные знаки. Поэтому точка с координатами $(0, 1)$ лежит внутри треугольника ABC или на его стороне BC.

10 класс

З-ча **1**. Подряд выписаны n чисел, среди которых есть положительные и отрицательные. Подчеркивается каждое положительное число, а также каждое число, сумма которого с несколькими непосредственно следующими за ним числами положительна. Докажите, что сумма всех подчеркнутых чисел положительна.

Реш **1**. Ответ: нет, не может.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Подчеркнём число a_i $k+1$ чертами, если k — наименьшее число, для которого $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_{i+k} > 0$ (положительное число a_1 подчёркивается одной чертой). Ясно, что если число a_i подчёркнуто $k+1$ чертами, то числа a_{i+1}, a_{i+2}, … a_{i+k} подчёркнуты соответственно k, $k-1$, … , 2, 1 чертами. Подчёркнутые числа разобьём на группы следующим образом. Сначала возьмём числа, подчёркнутые наибольшим числом черт (пусть это число черт равно K), и следующие за каждым из них $K-1$ чисел. Затем возьмём числа, подчёркнутые $K-1$ чертами, и следующие за каждым из них $K-2$ чисел, и т.д. Сумма чисел в каждой группе положительна.

З-ча **2**. Девять многоугольников площади 1 расположены внутри квадрата площади 5. Докажите, что некоторые два из них имеют общую часть площади, не меньшую чем $1/9$.

Реш **2**. См. решение задачи 5 для 8 класса.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 9 класса.

З-ча **4**. Докажите, что если в треугольной пирамиде любые два трехгранных угла равны или симметричны, то все грани этой пирамиды равны.

Реш **4**. Рассмотрим развёртку данной пирамиды. Она представляет собой треугольник ABC, к которому приложены треугольники ABD_C, BCD_A, CAD_B. Из условия следует, что следующие 4 величины равны: суммы троек углов при вершинах A, B и C и сумма углов при вершинах D_A, D_B, D_C. Значит, каждая из этих сумм равна $180°$, поскольку сумма всех 12 рассматриваемых углов представляет собой сумму углов четырёх треугольников. В итоге получаем, что развёртка представляет собой треугольник, в котором проведены три средние линии (мы воспользовались здесь тем, что $AD_B = AD_C$, $BD_A = BD_C$, $CD_A = CD_B$). Средние линии разбивают треугольник на 4 равных треугольника, поэтому грани пирамиды равны.

З-ча **5**. На продолжениях сторон A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 правильного n-угольника ($n \geqslant 5$ — *прим. ред.*) $A_1A_2 \ldots A_n$ построить точки B_1, B_2, …, B_n так, чтобы B_1B_2 было перпендикулярно к A_1A_2, B_2B_3 перпендикулярно к A_2A_3, …, B_nB_1 перпендикулярно к A_nA_1.

Реш **5**. Пусть $x_k = A_{k+1}B_k$, α — внешний угол правильного n-угольника, a — длина его стороны. Тогда $x_1 = (a + x_2)\cos\alpha$, $x_2 = (a + x_3)\cos\alpha$, … , $x_n = (a + x_1)\cos\alpha$. Тогда $x_1 = a_1 + b_1x_2 = a_2 + b_2x_3 = \cdots = a_n + b_nx_1$, где $b_n = (\cos\alpha)^n \neq 1$. Поэтому x_1 (а также и x_k для любого k) определено однозначно. Ясно также, что мы получим решение, если положим $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$, где $x = (a + x)\cos\alpha$, т.е. $x : a = \cos\alpha : (1 - \cos\alpha)$