Московская городская математическая олимпиада 1994 года

10 класс

1. Ученик не заметил знака умножения между двумя семизначными числами и написал одно четырнадцатизначное число, которое оказалось в три раза больше их произведения. Найдите эти числа.

2. Бесконечная последовательность чисел x_n определяется условиями: $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$, причем $0 \leq x_1 \leq 1$. Докажите, что последовательность начиная с некоторого места периодическая а) в том и б) только в том случае, если x_1 рационально.

3. Каждый из 1994 депутатов парламента дал пощечину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно составить парламентскую комиссию из 665 человек, члены которой не выясняли отношений между собой указанным выше способом.

4. D — точка на стороне BC треугольника ABC. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K. Докажите, что длина отрезка AK не зависит от положения точки D на BC.

5. Рассматривается произвольный многоугольник (не обязательно выпуклый).
а) Всегда ли найдется хорда многоугольника, которая делит его на равновеликие части?
б) Докажите, что любой многоугольник можно разделить некоторой хордой на части, площадь каждой из которых не меньше, чем 1/3 площади многоугольника.
(Хордой многоугольника называется отрезок, концы которого принадлежат контуру многоугольника, а сам он целиком принадлежит многоугольнику, включая контур).

6. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что у него есть отрицательный коэффициент, а все коэффициенты любой его степени $P^n(x)$, $n > 1$ — положительные?

Московская городская математическая олимпиада 1994 года

11 класс

1. Придумайте многогранник, у которого нет трех граней с одинаковым числом сторон.

2. Бесконечная последовательность чисел x_n определяется условиями: $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$, причем $0 \leq x_1 \leq 1$. Докажите, что последовательность начиная с некоторого места периодическая а) в том и б) только в том случае, если x_1 рационально.

3. В круглый бокал, осевое сечение которого — график функции $y = x^4$, опускают вишенку — шар радиуса r. При каком наибольшем r шар коснется нижней точки дна? (Другими словами, каков максимальный радиус r круга, лежащего в области $y \geq x^4$ и содержащего начало координат)?

4. Из выпуклого многогранника с 9 вершинами, одна из которых A, параллельными переносами, переводящими A в каждую из остальных вершин, образуется 8 равных ему многогранников. Докажите, что хотя бы два из этих 8 многогранников пересекаются (по внутренним точкам).

5. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Докажите, что если каждая из трех пар биссектрис: внешних углов четырехугольника при вершинах A и C, внешних углов при вершинах B и D, а также внешних углов при вершинах Q и P (треугольников QAB и PBC соответственно) имеет точку пересечения, то эти три точки лежат на одной прямой.

6. Докажите, что для любого $k > 1$ найдется степень 2 такая, что среди k последних ее цифр не менее половины составляют девятки. (Например, $2^{12} = 4096$, $2^{53} = \ldots 992$).