LX Московская математическая олимпиада

Окружной тур

5 класс *25 января 1997 года*

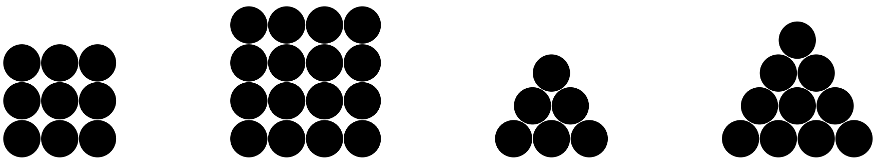
1. (Старинная задача.) Хозяин обещал работнику за 30 дней 9 рублей и кафтан. Через три дня работник уволился и получил кафтан. Сколько стоил кафтан? (А. Ковальджи)

2. Найдите последнюю цифру числа $1111 \cdot 2222 \cdot 3333 \cdot 4444 \cdot 5555$. (А. Спивак)

3. По кругу лежат 5 монет гербом вниз. Разрешается переворачивать одновременно три монеты, лежащие подряд. Как таким способом положить все монеты гербом вверх? (А. Ковальджи)

4. Квадрат разрезали на три прямоугольника, два из которых имеют размеры 5×11 и 4×6. Какие размеры может иметь третий прямоугольник? (В. Произволов)

5. На рисунке показано, как можно выложить шарики в виде квадрата, если их 9 или 16, или в виде равностороннего треугольника, если их 6 или 10.



Из какого количества шариков (большего одного) можно выложить как квадрат, так и равносторонний треугольник? Укажите одно такое число.

(А. Жохов)

LX Московская математическая олимпиада

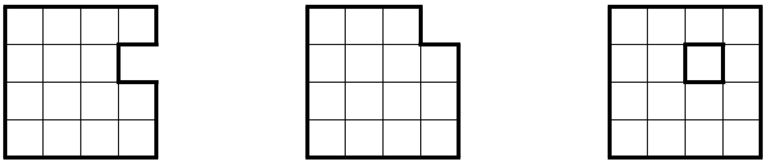
Окружной тур

---

6 класс *25 января 1997 года*

1. Найдите угол между часовой и минутной стрелками в 12 ч. 20 мин. (А. Кулаков)

2. Из доски 4×4 вырезали одну клетку тремя способами (см. рисунок). Разрежьте одну из получившихся досок на две части так, чтобы из них можно было сложить каждую из двух оставшихся. (К. Кноп)



3. Когда Миша поступал в МГУ, учитывался средний балл аттестата о среднем образовании по двенадцати предметам. У Миши средний балл 3,5. По скольким предметам ему нужно было повысить оценку на один балл, чтобы средний балл оказался равным 4? (А. Ковальджи)

4. Придумайте число, которое оканчивается на 17, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 17. (А. Ковальджи)

5. Найдите значение дроби
$$\frac{В \cdot А \cdot Р \cdot Е \cdot Н \cdot Ь \cdot Е}{К \cdot А \cdot Р \cdot Л \cdot С \cdot О \cdot Н},$$
где разные буквы — это разные цифры, а между буквами стоит знак умножения. (А. Ковальджи)

LX Московская математическая олимпиада

Окружной тур

---

7 класс *25 января 1997 года*

1. Хоккеист бросил шайбу в сторону бортика и побежал за ней. На середине пути к бортику он поймал отскочившую шайбу. Во сколько раз скорость шайбы больше скорости хоккеиста? (Скорости шайбы и хоккеиста постоянны.) (А. Ковальджи)

2. Найдите значение выражения $(x+1)^4-(x-1)^4$ при $x=1000$. (Е. Пронина)

3. Туристам-байдарочникам нужны восемь одинаковых «сидушек» — мягких ковриков длиной не менее 35 см и шириной не менее 20 см. В спортивном магазине продаются большие коврики длиной 110 см и шириной 56 см. Хватит ли большого коврика на восемь сидушек? (А. Ковальджи)

4. Часы точно поставлены в 12 часов дня в воскресенье. Какое время покажут часы в пятницу в 17 часов (по точному времени), если они спешат на 5 минут 36 секунд в неделю? (А. Ковальджи)

5. Три богини пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Афродита: «Я самая прекрасная». Афина: «Афродита не самая прекрасная». Гера: «Я самая прекрасная». Афродита: «Гера не самая прекрасная». Афина: «Я самая прекрасная». Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения остальных богинь ложны. Исходя из этого предположения, определите прекраснейшую из богинь. (А. Ковальджи)

LX Московская математическая олимпиада

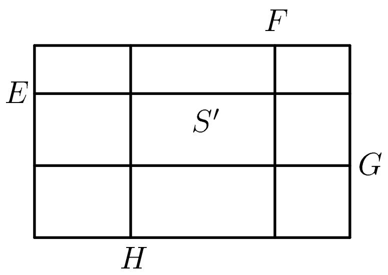
Окружной тур

8 класс *8 февраля 1997 года*

1. Обычный лист бумаги (типографский формат А4) представляет собой прямоугольник, у которого отношение большей стороны к меньшей такое же, как у его половины. Найдите это отношение. (А. Ковальджи)

2. Фильтр очищает бак воды за 20 минут, а наполняет такой же бак чистой водой за 21 минуту. Какую долю бака с неочищенной водой занимали примеси, задержанные фильтром? (Вода очищается с постоянной скоростью.) (А. Шевкин, А. Ковальджи)

3. Прямоугольник площади S разбит на 9 разных прямоугольников прямыми, параллельными его сторонам (см. рис.). Найдите площадь четырехугольника $EFGH$, если площадь центрального прямоугольника равна S'. (Ю. Раскин)



4. Какая дробь больше
$$\frac{166\ldots6}{66\ldots64} \text{ или } \frac{199\ldots9}{99\ldots95},$$
если в числителях и знаменателях стоят по 1997 одинаковых цифр? (А. Ковальджи)

5. Когда обезьяна несла три одинаковых кокосовых ореха на вершину многоэтажного дерева, один орех упал с 11-го этажа и разбился. Обезьяна хочет определить самый высокий этаж, при падении с которого кокосовые орехи не разбиваются. Она может уронить орех с любого этажа и подобрать его, если он цел. Докажите, что ей хватит четырех испытаний (с двумя орехами). (А. Ошмян)

LX Московская математическая олимпиада

Окружной тур

---

9 класс *8 февраля 1997 года*

1. Числа a, b, c отличны от нуля, а их сумма равна нулю. Найдите значение выражения
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}.$$
(А. Ковальджи)

2. Несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли. В результате число учащихся уменьшилось на 10%, а доля мальчиков в лицее увеличилась с 50% до 55%. Увеличилось или уменьшилось число мальчиков?
(А. Ковальджи)

3. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина AD. Точка F — основание перпендикуляра, опущенного из B на прямую CE. Докажите, что треугольник ABF равнобедренный.
(М. Волчкевич)

4. Барон Мюнхгаузен утверждает, что пустил шар от борта бильярда, имеющего форму правильного треугольника, так, что тот, отражаясь от бортов, прошел через некоторую точку три раза в трех различных направлениях и вернулся в исходную точку. Могут ли слова барона быть правдой? (Отражение шара от борта происходит по закону «угол падения равен углу отражения».)
(А. Спивак)

5. Имеется 201 гиря, веса которых (в граммах) — последовательные натуральные числа от 1 до 201. Назовем гирю хорошей, если после ее удаления оставшиеся 200 гирь можно разделить на две группы, равные по весу и по количеству гирь. Докажите, что

   а) гиря 101 г хорошая;

   б) гиря 199 г хорошая.

(В. Произволов)

LX Московская математическая олимпиада

Окружной тур

---

10 класс *8 февраля 1997 года*

1. Числа p и q различны. Известно, что можно подобрать такое число x, что $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + qx + p = 0$. Найдите $p + q$. (А. Ковальджи)

2. Взяли 100 чисел. Среди их всевозможных произведений по два числа оказались 1000 отрицательных. Сколько среди исходных чисел было нулей? (И. Рубанов)

3. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями $y = 2x + 1$ и $y = \frac{1}{3}x - 1$. (А. Ковальджи)

4. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C прямые. Из точек B и D опустили перпендикуляры на диагональ AC и получили соответственно точки M и N. Докажите, что $AN = CM$. (В. Произволов)

5. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 8×8 так, чтобы у каждой клетки среди ее соседей (по стороне) были хотя бы две клетки, окрашенные в тот же цвет? (А. Ковальджи)

11 класс *8 февраля 1997 года*

1. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 1997? (А. Спивак)

2. Пусть $f(x)$ — функция и для любых a и b выполняется равенство $f(a+b)+f(a-b) = 2f(a)+2f(b)$. Является ли эта функция четной? (А. Ковальджи)

3. Докажите неравенство $(1+x)^y \geq 1+yx$ при $x \geq 0$, $y \geq 0$ (А. Ковальджи)

4. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{t}$ при $1 \leq x \leq y \leq z \leq t \leq 100$. (Ю. Раскин)

5. Около правильного тетраэдра $ABCD$ описана сфера. На его гранях построены во внешнюю сторону как на основаниях правильные пирамиды $ABCD'$, $ABDC'$, $ACDB'$, $BCDA'$, вершины которых лежат на этой сфере. Найти угол между плоскостями ABC' и ACD'. (А. Заславский)

LX Московская математическая олимпиада

Городской тур

6 класс *16 февраля 1997 года*

1. Витя выложил из карточек пример на сложение и затем поменял местами две карточки. Как видите, равенство нарушилось. Какие карточки переставил Витя?

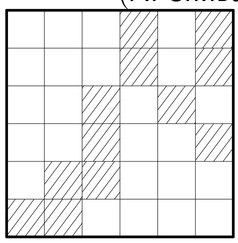
$$\begin{array}{r} 314159 \\ +\,291828 \\ \hline 585787 \end{array}$$

(В. Замков)

2. В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1, например,

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}.$$

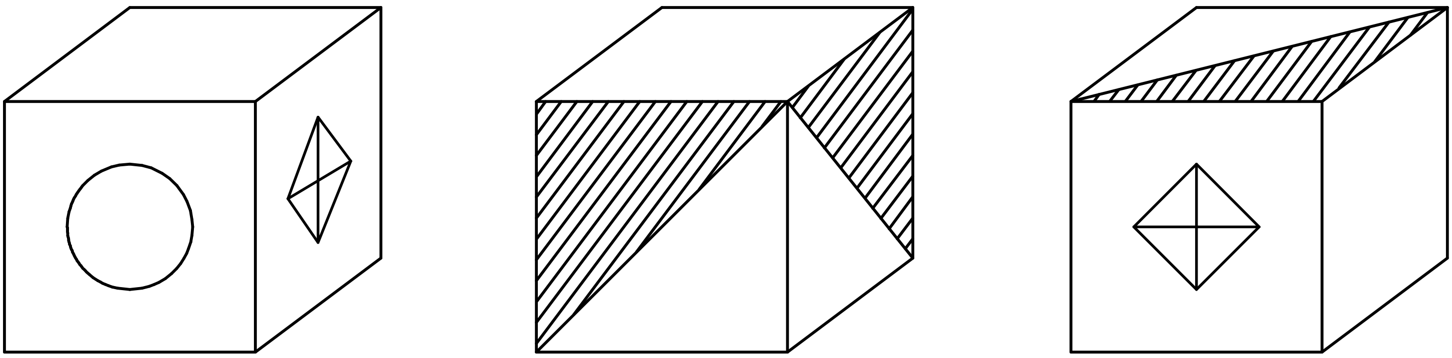
Один из знаменателей здесь заменен буквой x. Найдите этот знаменатель. (А. Спивак)



3. В корзине лежат 30 грибов — рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине? (А. Галочкин)

4. Разрежьте изображенную доску на 4 одинаковые части, чтобы каждая из них содержала 3 заштрихованные клетки. (А. Спивак)

5. Придумайте раскраску граней кубика, чтобы в трех различных положениях он выглядел, как показано на рисунке. (Укажите, как раскрасить невидимые грани или нарисуйте развертку.) (А. Спивак)



6. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, малыш — за 5, а бабушка — за 10 минут. У них есть один фонарик. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Мост выдерживает только двоих. Если переходят двое, то более быстрый идет со скоростью более медлительного. Как им перейти мост за 17 минут? (Из электронной конференции rec.puzzles)

LX Московская математическая олимпиада

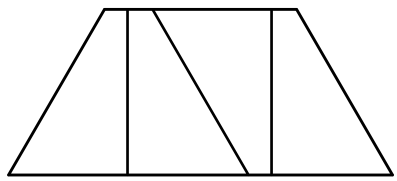
Городской тур

7 класс *16 февраля 1997 года*

1. Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.) (С. Дориченко)

2. В Мексике экологи добились закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает в полицию номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый — по своим делам!). Сколько автомобилей должно быть в семье, если взрослых в ней а) 5 человек; б) 8 человек? (И. Ященко)

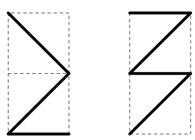
3. Четырехугольник с длинами сторон 1, 1, 1 и 2 имеет две параллельные стороны и разбит на четыре одинаковые фигуры (см. рис). В результате верхняя сторона разделилась на четыре отрезка. Найдите отношение длины большего отрезка к меньшему. (А. Ковальджи)



4. В корзине лежат 30 грибов. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине? (А. Галочкин)

5. В тесте к каждому вопросу указаны 5 вариантов ответов. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удается списать, он отвечает правильно, а в противном случае — наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на $1/5$ часть). За год двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать? (А. Спивак, И. Ященко)

6. Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано на левом рисунке. А если справа — то как на правом рисунке. Нарисуйте вид сверху. (А. Шень)



LX Московская математическая олимпиада

Городской тур

---

8 класс *2 марта 1997 года*

1. В некоторых клетках шахматной доски стоят фигуры. На каждой горизонтали шахматной доски стоит хотя бы одна фигура, и в разных горизонталях число фигур разное. Докажите, что можно выбрать 8 фигур, которые будут стоять в разных горизонталях и разных вертикалях. (В. Произволов)

2. От вулканостанции до вершины вулкана Стромболи надо идти 4 часа по дороге, а затем 4 часа по тропинке. На вершине два рядом расположенных кратера, первый 1 час извергается, потом 17 часов молчит, потом опять 1 час извергается…, второй — 1 час извергается, 9 часов молчит, 1 час извергается… и т.д. Во время извержения первого кратера опасно идти и по тропинке, и по дороге, а во время извержения второго опасна только тропинка. Ваня увидел, что ровно в 12 часов оба кратера начали извергаться одновременно. Сможет ли он когда-нибудь взойти на вершину вулкана и вернутся назад, не рискуя жизнью? (И. Ященко)

3. Внутри острого угла XOY взяты точки M и N так, что $\angle XON = \angle YOM$. На отрезке OX выбирается точка Q так, что $\angle OQN = \angle MQX$, а на отрезке OY выбирается точка P так, что $\angle OPN = \angle MPY$. Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны. (В. Произволов)

4. Докажите, что существует натуральное число, которое при замене любой тройки соседних цифр на произвольную тройку цифр остается составным? Существует ли такое 1997-значное число? (А. Шаповалов, А. Кулаков)

5. Дан ромб $ABCD$, в котором $\angle ABC = 40°$, E — середина BC, F — основание перпендикуляра, опущенного из A на DE. Найти угол DFC. (М. Волчкевич)

6. Банкир попросил эксперта определить с помощью чашечных весов без гирь одну фальшивую более легкую монету из клада абсолютно похожих друг на друга монет. Банкир предупредил эксперта, что каждую монету можно класть на чашки весов не более двух раз. Из какого наибольшего числа монет эксперт может выделить фальшивую за n взвешиваний? (А. Шаповалов)

9 класс *2 марта 1997 года*

1. В треугольнике одна сторона в 3 раза меньше суммы двух других. Докажите, что противолежащий ей угол — наименьший угол треугольника.

(А. Толпыго)

2. На тарелке лежит 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились бы на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой? (В. Дольников)

3. В выпуклом шестиугольнике $AC_1BA_1CB_1$ стороны попарно равны: $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$ и $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1$. Доказать, что площадь треугольника ABC равна половине площади шестиугольника. (В. Произволов)

4. По окружности в одном направлении на равных расстояниях курсируют N поездов. На этой дороге в вершинах правильного треугольника расположены станции A, B, C (обозначенные по направлению движения). Ира входит на станцию A и одновременно Леша входит на станцию B, чтобы уехать на ближайших поездах.

   Известно, что если они входят на станции в тот момент, когда машинист Рома проезжает лес, то Ира сядет в поезд раньше Леши, а в остальных случаях Леша — раньше или одновременно с ней. Какая часть дороги проходит по лесу? (А. Ковальджи, В. Палт)

5. $2n$ спортсменов дважды провели круговой турнир (в круговом турнире каждый встречается с каждым, за победу начисляется одно очко, за ничью — $1/2$, за поражение — 0). Сумма очков каждого изменилась не менее, чем на n.

   Доказать, что она у всех изменилась ровно на n. (Б. Френкин)

6. Пусть $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = F(x)G(x)$, где F и G — многочлены, коэффициенты которых — нули и единицы ($n > 1$). Докажите, что один из многочленов $F(x)$, $G(x)$ представим в виде $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1})T(x)$, где T — также многочлен с коэффициентами 0 и 1, а $k > 1$.

(М. Вялый, В. Сендеров)

LX Московская математическая олимпиада

Городской тур

---

10 класс *2 марта 1997 года*

1. Существует ли выпуклое тело, отличное от шара, все ортогональные проекции которого на три попарно перпендикулярные плоскости, являются кругами? (А. Канель-Белов)

2. Докажите, что среди четырехугольников с заданными длинами диагоналей и углом между ними наименьший периметр имеет параллелограмм. (В. Произволов)

3. а) Каждую сторону четырехугольника процессе обхода по часовой стрелке продолжили на ее длину. Оказалось, что концы построенных отрезков служат вершинами квадрата. Докажите, что исходный четырехугольник — квадрат.

   б) Докажите, что если в результате той же процедуры из n-угольника получится правильный, то исходный n-угольник правильный. (М. Евдокимов)

4. Даны действительные числа $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ и $b_1 \leq b_2 \leq b_3$, такие что $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ и $a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3$. Докажите, что если $a_1 \leq b_1$, то $a_3 \leq b_3$. (К. Фельдман)

5. В круговом турнире не было ничьих, за победу присуждалось 1 очко, за поражение — 0. Затем был определен коэффициент каждого участника. Он равнялся сумме очков, набранных теми, кого победил данный спортсмен. Оказалось, что у всех участников коэффициент одинаков. Число участников турнира больше двух. Доказать, что все спортсмены набрали одинаковое количество очков. (Б. Френкин)

6. Рассмотрим последовательность первых цифр степеней пятерки: 1, 5, 2, 1, 6, … Докажите, что любой кусок этой последовательности, записанный в обратном порядке, встретится в последовательности первых цифр степеней двойки (1, 2, 4, 8, 1, 3, …). (А. Канель-Белов)

LX Московская математическая олимпиада
Городской тур

---

11 класс *2 марта 1997 года*

1. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C', A' и B' соответственно. Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$ равна
$$\frac{AB' \cdot BC' \cdot CA' + AC' \cdot CB' \cdot BA'}{4R},$$
где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. (А. Заславский)

2. Вычислить
$$\int\limits_0^{\pi/2} \Big(\cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)\Big)\, dx.$$
(М. Вялый)

3. Учитель написал на доске три функции: $f_1(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = (x-1)^2$ и предложил ученикам с помощью операций сложения, умножения, вычитания, операции умножения на произвольное число и операции сложения с произвольным числом получить функцию $\dfrac{1}{x}$. Выполните это задание и докажите, что при этом должны быть использованы все три функции. (М. Евдокимов)

4. Можно ли разбить правильный тетраэдр с ребром 1 на правильные тетраэдры и октаэдры, длины ребер каждого из которых меньше $1/100$? (В. Произволов)

5. Положительные числа a, b и c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что
$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1.$$
(Г. Гальперин)

6. На плоскости дано конечное число полос, сумма ширин которых равна 100, и круг радиуса 1. Доказать, что каждую из полос можно параллельно перенести так, чтобы все они покрывали круг. (М. Смуров)

LX Московская математическая олимпиада

Отборочный тур

9 класс *18 марта 1997 года*

1. Есть n гирь. Известно, что каждая весит целое число граммов, и их общий вес меньше p г. При каком наибольшем p можно с помощью чашечных весов гарантированно определить вес каждой гири? (Можно класть гири на чаши в любых сочетаниях и проводить любое число взвешиваний). (А. Шаповалов)

2. В стране Ненашии города связаны двусторонними рейсами двух авиакомпаний, между любыми двумя городами есть авиа маршрут (возможно, с пересадками), и из каждого города рейсов обеих компаний поровну. Агенту 007 предписано при передвижении строго чередовать авиакомпании. Сможет ли он, соблюдая это условие, добраться из любого города в любой другой? (А. Шаповалов)

3. Десять банкиров сидят за круглым столом. У каждого на счете записано действительное число, причем есть положительные числа и есть отрицательные. Банкиры по очереди прибавляют остальным банкирам одну девятую своего (к началу операции) числа, а себе пишут нуль. Докажите, что после десятой операции у банкиров не могут оказаться исходные десять чисел. (А. Ковальджи)

4. Можно ли все натуральные числа расставить на бесконечной шахматной доске (по одному в каждую клетку) так, чтобы сумма любых десяти идущих подряд по горизонтали или вертикали чисел, делилась бы на 101? (А. Канель-Белов, В. Замятин)

5. Три окружности равных радиусов с центрами в точках A, B, C проходят через точку O. Пусть $A'B'C'$ — другие точки их пересечений, где A' — точка пересечения окружностей с центрами B и C и т.д. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке. (А. Заславский)

6. Докажите, что из всех ломаных, разбивающих круг на две равновеликие части, наименьшую длину имеет диаметр. (В. Произволов)

LX Московская математическая олимпиада

Отборочный тур

10 класс *18 марта 1997 года*

1. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AD, F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую CE. Докажите, что $AF = AB$. (М. Волчкевич)

2. Фигура в пространстве представляет собой пересечение единичного куба $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ с полупространством $ax+by+cz \le d$, где a, b и c — положительные числа. Докажите, что ее объем равен
$$\frac{1}{6abc}(d_+^3 - (d-a)_+^3 - (d-b)_+^3 - (d-c)_+^3 + \\ (d-a-b)_+^3 + (d-b-c)_+^3 + (d-a-c)_+^3 - (d-a-b-c)_+^3),$$
где $x_+ = \max(x, 0)$. (А. Канель-Белов)

3. В каждой клетке шахматной доски стоит знак $+$ или $-$. Разрешается одновременно заменять все знаки, стоящие в одной строке или в одном столбце на противоположные. Докажите, что с помощью многократного применения этой операции можно сделать все знаки плюсами тогда и только тогда, когда в любом квадрате 2×2 стоит четное число плюсов. (А. Канель-Белов)

4. Фанерный прямоугольник расчерчен отрезками на прямоугольники. Докажите, что по этим отрезкам его можно распилить ножовкой (пилить можно только от края по прямой, отпиленные куски разнимаются). (А. Шаповалов)

5. Для каждого натурального числа n обозначим через A_n множество натуральных чисел, больших единицы, дающих при делении на n остаток единица. Назовем число из A_n неприводимым, если оно не представимо в виде произведения двух меньших чисел из A_n. Докажите, что для любого $n > 2$ найдется число в A_n, представимое в виде произведения неприводимых в A_n чисел различными способами. (В. Сендеров)

6. Задано натуральное число $n > 3$. Верно ли, что среди всех n-угольников (не только выпуклых) наибольшую сумму синусов внутренних углов имеет правильный? (В. Сендеров)

LX Московская математическая олимпиада

Отборочный тур

---

11 класс *18 марта 1997 года*

1. Пусть $f(x)$ — нечетная возрастающая функция. Докажите, что для любых чисел a, b и c, сумма которых равна нулю, выполнено неравенство $f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(c)f(a) \leq 0$.
(В. Произволов)

2. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом n-угольнике так, чтобы каждая пересекалась не более чем с одной другой? (Совпадение концов диагоналей пересечением не считается).
(А. Шаповалов)

3. 1997 фишек расположены на плоскости в вершинах выпуклого 1997-угольника. За один ход можно разбить их на две группы и фишки первой группы сдвинуть на какой-нибудь вектор, а остальные фишки оставить на месте. Может ли случиться, что после а) 9; б) 10 ходов все фишки окажутся на одной прямой? (М. Евдокимов)

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Пусть E — точка пересечения прямых AB и CD, F — точка пересечения прямых AD и BC.

   а) Доказать, что все шесть описанных окружностей треугольников ABF, CDF, BEC, ADE, BOD и AOC пересекаются в некоторой общей точке K.

   б) Верно ли, что точка K лежит на прямой EF, а прямые EF и OK перпендикулярны?

(М. Евдокимов, А. Заславский)

5. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[0;5]$, причем $\int\limits_0^5 f(x)\,dx = 0$.

   а) Обязательно ли существует такой отрезок $[a;b]$ длины 2, содержащийся в отрезке $[0;5]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$?

   б) Докажите, что существует отрезок $[a;b]$ длины 2 или 3, содержащийся в отрезке $[0;5]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$.

(В. Произволов)

6. Все вершины одного куба лежат на поверхности другого. Может ли так случиться, что никакая грань первого куба не параллельна никакой грани второго? (В. Произволов)