LXVI Московская математическая олимпиада

Окружной тур 8 класс 2.02.2003

Задача 1. Пусть $\dfrac{n-2m}{m}=3$. Вычислите значение выражения $\dfrac{n^2-mn}{4m^2}$.

Ответ: 5.

Первый способ. Из условия следует, что $n=5m$, причем $m\neq 0$. Подставим:

$$\frac{n^2-mn}{4m^2}=\frac{25m^2-5m^2}{4m^2}=5.$$

Второй способ. $\dfrac{n-2m}{m}=3 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{n}{m}-2=3 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{n}{m}=5$. Следовательно, $\dfrac{n^2-mn}{4m^2}=\dfrac{\left(\frac{n}{m}\right)^2-\frac{n}{m}}{4}=\dfrac{5^2-5}{4}=5$.

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$\pm$ *верный ход решения, но допущена арифметическая ошибка*

Задача 2. В трапеции $ABCD$: $AD=2$, $AB=BC=CD=1$. Найдите радиус окружности, проходящей через все вершины трапеции.

Ответ: 1.

Пусть O — середина AD (см. рисунок 8.2). Тогда $AO=BC$ и $AO\|BC$, следовательно, $ABCO$ — параллелограмм. Значит, $OC=AB=OA=1$. Аналогично, $BO=1$. Значит, точка O равноудалена от точек A, B, C и D, то есть является центром окружности, описанной около трапеции.

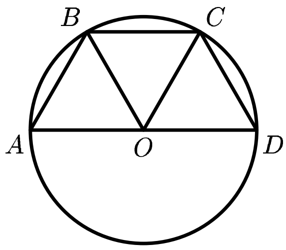

Рис. 8.2.

$\mp$ *приведен только верный ответ*

Задача 3. Докажите,что число $9^{8n+4}-7^{8n+4}$ делится на 20 при всех натуральных n.

Решение. $9^{8n+4}-7^{8n+4}=(9^{4n+2}-7^{4n+2})(9^{4n+2}+7^{4n+2})=(9^{4n+2}-7^{4n+2})(81^{2n+1}+49^{2n+1})$.

В первой скобке стоит разность двух нечетных чисел, которая является четным числом. Во второй скобке первая степень оканчивается на единицу, а вторая — на 9, так как показатель этой степени нечетный. Тогда их сумма оканчивается нулем, то есть делится на 10. Произведение четного числа и числа, кратного 10, делится на 20.

Рассматривая последние цифры данных степеней можно доказать только, что разность делится на 10.

$\mp$ *есть идея разложения по формуле разности квадратов, но решение не доведено до конца*

$+/2$ *доказана делимость на 10*

Задача 4. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может провести в некотором треугольнике один отрезок так, что после этого на чертеже окажутся все виды треугольников: равносторонний, равнобедренный, разносторонний, остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. Не врет ли барон?

Ответ: нет, не врет.

Если в прямоугольном треугольнике с углом 30° провести медиану к гипотенузе (см. рисунок 8.4), то она разобьет исходный прямоугольный разносторонний треугольник на тупоугольный равнобедренный и остроугольный равносторонний.

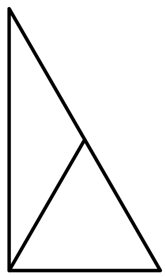
Рис. 8.4.

Приведенный в решении пример является единственно возможным.

$+$ *приведен прямоугольный треугольник, верно указана величина острого угла и показан отрезок*

$+/2$ *приведен прямоугольный треугольник, верно указана величина острого угла, но отрезок не показан*

$-$ *приведен только ответ "нет"*

Задача 5. На острове рыцарей и лжецов провели перепись населения. Часть жителей заявила, что количество рыцарей на острове четно, а остальные — что количество лжецов нечетно. Могло ли на острове жить ровно 2003 человека?

Ответ: не могло.

Предположим, что на острове — 2003 жителя. Тогда:

1) если первое утверждение истинно, то количество лжецов нечетно. Следовательно, второе утверждение также истинно, что противоречит условию задачи.

2) если первое утверждение ложно, то количество рыцарей нечетно, поэтому количество лжецов должно быть четно. Следовательно, второе утверждение также ложно, что противоречит условию задачи.

Таким образом, на острове не могло жить 2003 человека.

Можно также решить задачу, рассматривая различные случаи четности количества рыцарей и количества лжецов.

$\mp$ *приведен верный ответ, но рассмотрена только часть случаев*

$-$ *приведен только верный ответ*

Задача 6. Среди 25 внешне одинаковых монет — 3 фальшивых и 22 настоящих. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые монеты также весят одинаково, но фальшивые монеты легче настоящих. Объясните, как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти 8 настоящих монет.

Решение. 1) Положим на обе чаши весов по 12 монет. Если чаши будут находится в равновесии, то на каждой чаше лежит ровно по одной фальшивой монете. Если же какая-то чаша перевесит, то на ней либо нет фальшивых монет, либо ровно одна фальшивая монета. Таким образом, за первое взвешивание мы выделим 12 монет, среди которых не более одной фальшивой.

2) Разделим эти 12 монет на 3 кучки по 4 монеты и взвесим две из них. Если весы окажутся в равновесии, то все взвешиваемые монеты настоящие. Иначе — единственная фальшивая монета находится в более легкой кучке, и все монеты в двух остальных кучках настоящие.

$\mp$ *взвешивания указаны верно, но не рассмотрены все случаи*

Задача 1. Решите уравнение: $1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+2}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\right)=x$.

Ответ: 2.

$1+\frac{1}{x+1}=\frac{x+2}{x+1}$, поэтому данное уравнение равносильно уравнению $1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)=x$ при условии, что $x\neq-2$. Действуя аналогично, получим, что $1+\frac{3}{x+1}=x$, где $x\neq-2$ и $x\neq-3$. Корнями этого уравнения являются числа 2 и -2, значит корнем исходного уравнения является только число 2.

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$+/2$ *верный ход решения, но не отброшен посторонний корень*

Задача 2. Два таракана находятся в углу A квадратной комнаты $ABCD$ и одновременно начинают бегать без остановок с равными скоростями. Первый бежит по диагонали AC, затем по стороне CB, затем по стороне BA и так далее. А второй — по стороне AD, затем обратно по стороне DA и так далее. Могут ли тараканы когда-нибудь встретиться снова?

Ответ: нет, не могут.

Пусть сторона квадрата равна x, а скорости тараканов равны по 1. Траектории движения тараканов пересекаются только в точке A. Пусть они встретятся в точке A, когда первый таракан вернется туда в n-й раз, а второй — в m-й раз. Первый таракан впервые вернется в A, пробежав расстояние $2x+x\sqrt{2}$, а второй таракан — пробежав расстояние $2x$. Время движения первого таракана до встречи равно $(2+\sqrt{2})xn$, а время движения второго — $2xm$. Составим уравнение: $(2+\sqrt{2})xn=2xm \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}=\frac{2n-2m}{m}$, чего не может быть, поскольку в левой части уравнения стоит иррациональное число, а в правой — рациональное.

$-$ *приведен только верный ответ*

$\pm$ *приведен верный ответ, высказана и обоснована идея несоизмеримости, но нет формальных выкладок*

Задача 3. По кругу выписано 2003 целых числа, причем в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Докажите, что найдется пара несоседних чисел, обладающая таким же свойством.

Решение. Соединим каждые два соседних числа стрелкой, ведущей от делимого к делителю (если числа равны, направим стрелку произвольно). Этих стрелок 2003 (нечетное количество), поэтому найдутся хотя бы две соседние стрелки, направленые в одну сторону ($a\to b\to c$), то есть $a\,\vdots\, b$, а $b\,\vdots\, c$. Следовательно, $a\,\vdots\, c$, то есть пара $(a;c)$ — искомая.

$\mp$ *присутствует идея транзитивности отношения делимости*

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH к гипотенузе AB. Биссектрисы углов CAB и BCH пересекаются в точке M, а биссектрисы углов CBA и ACH — в точке N. Докажите, что $MN||AB$.

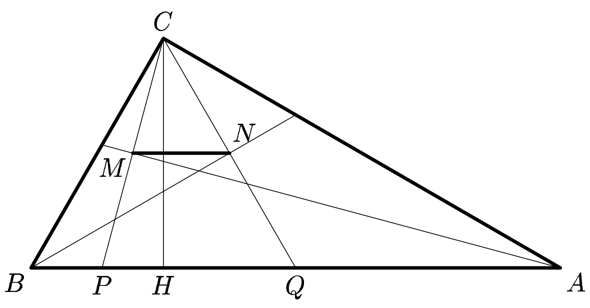

Рис. 9.4.

Решение. Пусть CP и CQ — биссектрисы треугольников BCH и ACH соответственно, $\angle CAM=\alpha$ (см. рисунок 9.4). Тогда $\angle CAH=\angle BCH=2\alpha$. $\angle ACH=90^\circ-2\alpha$, значит, $\angle ACM=90^\circ-\alpha$. $\angle AMC=180^\circ-(\angle CAM+\angle ACM)=90^\circ$. Значит, AM — высота и биссектриса треугольника ACP, то есть $AC=AP$ и M — середина CP. Аналогично доказывается, что точка N — середина CQ. Тогда MN — средняя линия треугольника CPQ, то есть $MN||PQ$, что и требовалось доказать.

Задача 5. Числа a и b таковы, что $a^2+b^2=\frac{a+b}{2}$. Найдите наименьшее и наибольшее значение разности чисел a и b.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$ — наименьшее значение; $\dfrac{1}{2}$ — наибольшее.

$a^2+b^2=\dfrac{2a^2+2b^2}{2}=\dfrac{(a^2-2ab+b^2)+(a^2+2ab+b^2)}{2}=\dfrac{(a-b)^2+(a+b)^2}{2}$. Используя равенство, данное в условии, получим, что $(a-b)^2=(a+b)-(a+b)^2$. Пусть $a+b=t$, тогда $(a-b)^2=t-t^2\leqslant\frac{1}{4}$ (неравенство $t-t^2\leqslant\frac{1}{4}$ можно доказывать различными способами, в частности, оно равносильно верному неравенству $(t-\frac{1}{2})^2\geqslant 0$). Таким образом, $|a-b|\leqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leqslant a-b\leqslant\frac{1}{2}$. Значение $\frac{1}{2}$ достигается при $a=\frac{1}{2}$, $b=0$, а значение $-\frac{1}{2}$ — при $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, причем указанные пары (a,b) удовлетворяют условию.

$\pm$ *верно найдено и обосновано только одно из экстремальных значений*

$\pm$ *доказано, что* $|a-b|\leqslant\frac{1}{2}$*, но не показано, что эти значения достигаются*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

Задача 6. Семиугольник, три угла которого равны по 120°, вписан в окружность. Могут ли все его стороны быть различными по длине?

Ответ: нет.

Пусть $ABCDEFG$ — данный семиугольник. Покажем, что какие-то две его стороны равны.

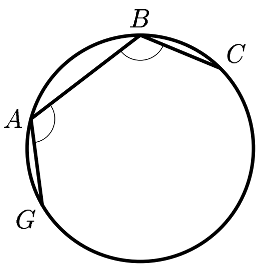

Рис. 9.6а

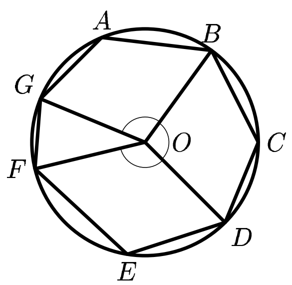

Рис. 9.6б

Если есть два соседних угла по 120° (например, при вершинах A и B, см. рисунок 9.6а), то дуги GAB и ABC равны, а значит, равны дуги AG и CB. Тогда стягивающие их хорды AG и CB равны, что и требовалось доказать.

Если углы по 120° расположены не рядом, то, без ограничения общности, можно считать, что такую величину имеют углы A, C и E (см. рисунок 9.6б). В этом случае центральные углы GOB, BOD и DOF равны по 120°. Тогда $\angle FOG=360^\circ-(\angle GOB+\angle BOD+\angle DOF)=$ $=360^\circ-120^\circ-120^\circ-120^\circ=0^\circ$. Получили противоречие.

$\mp$ *верно рассмотрен только один из двух возможных случаев*

LXVI Московская математическая олимпиада

Окружной тур 10 класс 2.02.2003

Задача 1. Решите уравнение:

$$\frac{1}{x^2+2x+2}+\frac{3}{x^2+2x+4}+\frac{5}{x^2+2x+6}+\ldots+\frac{2003}{x^2+2x+2004}=1002.$$

Ответ: $x=-1$.

$\dfrac{1}{(x+1)^2+1}\leqslant 1$, $\dfrac{3}{(x+1)^2+3}\leqslant 1$, $\ldots$, $\dfrac{2003}{(x+1)^2+2003}\leqslant 1$. Так как в левой части данного уравнения 1002 слагаемых, то $\dfrac{1}{(x+1)^2+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2+3}+\cdots+\dfrac{2003}{(x+1)^2+2003}\leqslant 1002$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно 1. Следовательно, $x=-1$.

$\mp$ *приведен только верный ответ*

Задача 2. В шахматном турнире Вася сыграл 52 партии. По старой системе подсчета очков за победу давалось 1 очко, за ничью — 0 очков, за поражение — (-1). По новой системе за победу стали давать 1 очко, за ничью — $1/2$ очка, за поражение — 0. Известно, что по новой системе Вася набрал 25 очков. Сколько очков он набрал бы, если бы очки начислялись по старой системе?

Ответ: -2 очка.

Введем промежуточную систему подсчета очков: за победу — 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. При такой системе подсчета Вася набрал бы 50 очков. Чтобы перейти от этой системы к старой, нужно за каждую сыгранную партию вычесть по одному очку, то есть вычесть количество сыгранных партий: $50-52=-2$.

Тот же результат можно получить и алгебраически. Пусть a, b, c — количества Васиных побед, ничьих и поражений соответственно. Тогда $1\cdot a+\dfrac{1}{2}b+0\cdot c=25\Leftrightarrow 2a+1b+0c=50\Leftrightarrow 1a+0b+(-1)c=-2$.

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$\mp$ *приведен верный ответ, полученный в результате рассмотрения частных случаев*

Задача 3. Найдите наибольшее значение выражения a^3b-b^3a, если $a^2+b^2=1$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

Первый способ. Так как $a^2+b^2=1$, то существует число α, такое что $a=\cos\alpha$, $b=\sin\alpha$. Тогда $a^3b-b^3a=ab(a^2-b^2)=\cos\alpha\sin\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$. Наибольшее значение этого выражения равно $\dfrac{1}{4}$ и достигается, например, при $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$.

Второй способ. Пусть $C=a^3b-b^3a=ab(a^2-b^2)$. Квадрат этого выражения равен $C^2=a^2b^2(a^4+b^4-2a^2b^2)=a^2b^2((a^2+b^2)^2-4a^2b^2)=a^2b^2(1-4a^2b^2)$. Положим $x=4a^2b^2$. Тогда $C^2=\dfrac{x(1-x)}{4}$. Максимум выражения $x(1-x)$ равен $1/4$ и достигается при $x=1/2$. Тогда наибольшее значение C^2 равно $1/16$. Заметим, что множество значений C симметрично относительно нуля, так как если переставить местами значения a и b, то значение выражения изменится на противоположное. Поэтому наибольшее значение C равно $1/4$.

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$\pm$ *произведена верная оценка, но не показано, что значение* $1/4$ *достигается*

Задача 4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, M — точка пересечения его диагоналей, O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABM и CMD соответственно. K — середина дуги AD, не содержащей точек B и C. $\angle O_1KO_2=60^\circ$, $KO_1=10$. Найдите O_1O_2.

Ответ: $O_1O_2=10$.

Так как точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисах углов AMB и CMD соответственно, то M лежит на отрезке O_1O_2 (см. рисунок 10.4). $\angle BMO_1 = \angle DMO_2 = \angle CMO_2$. Так как K — середина дуги AD, то BK — биссектриса угла ABD, следовательно, точка O_1 лежит на луче BK. Аналогично, точка O_2 лежит на луче CK. Углы ACK и DBK вписанные и опираются на равные дуги, следовательно, они равны. $\angle KO_1O_2 = \angle KBD + \angle BMO_1 = \angle KCA + \angle CMO_2 = \angle KO_2O_1$. Следовательно, треугольник KO_1O_2 — равнобедренный с углом $60°$, то есть равносторонний. Значит, $O_1O_2 = 10$.

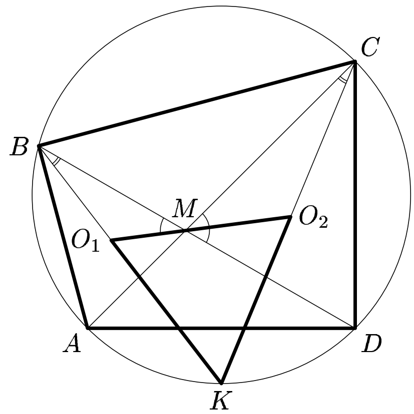

Рис. 10.4.

$-$ *приведен только верный ответ*

$\mp$ *приведен верный ответ и указано (но не доказано!), что треугольник — равносторонний*

Задача 5. В ряд выписаны числа: 1, 2, …, 20, 21. Играющие по очереди вычеркивают по одному числу до тех пор, пока не останутся два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выигравшим считается первый игрок, а если нет — то второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: выигрывает первый игрок.

Разобьем числа от 1 до 20 на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре делилась на 5, например: $(1;4)$, $(2;3)$, $(6;9)$, $(7;8)$, $(11;14)$, $(12;13)$, $(16;19)$, $(17;18)$, $(5;10)$, $(15;20)$. Первым ходом первый игрок вычеркивает число 21. В ответ на любой ход второго он вычеркивает число из той же пары. Таким образом, в конце игры останутся два числа из одной пары, и их сумма кратна пяти.

$-$ *приведен только верный ответ*

Задача 6. Имеется тетраэдр, все ребра которого равны 12 см. Можно ли уместить его в коробку, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда с размерами 9 см, 13 см и 15 см?

Ответ: можно.

Пусть высота коробки 9 см. Расположим тетраэдр так, чтобы два его скрещивающихся ребра были соответственно параллельны двум перпендикулярным ребрам основания коробки. Длина и ширина коробки больше 12 см, поэтому останется сравнить высоту коробки и расстояние между скрещивающимися ребрами тетраэдра. В тетраэдре с ребром a это расстояние равно $a\sqrt{2}/2$ (оно находится из прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является высота грани, а одним из катетов — половина ребра). В нашем случае расстояние равно $6\sqrt{2} < 9$.

Отметим, что высота данного тетраэдра равна $4\sqrt{6} > 9$, поэтому поставить тетраэдр основанием на дно коробки не получится.

$-$ *приведен только верный ответ*

$+/2$ *присутствует, но не обоснована идея верного размещения тетраэдра*

Задача 1. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2+2x}=2\sqrt{x^2+x-8}$.

Ответ: $x=-8$.

Первый способ. Пусть $a=\sqrt{x^2-16}\geqslant 0$, $b=\sqrt{x^2+2x}\geqslant 0$. Тогда $a+b=2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\Leftrightarrow \frac{a+b}{2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Мы получили, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел равно их среднему квадратичному. Значит, $a=b$. Этот же результат можно получить и явно: $a+b= =2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\Rightarrow (a+b)^2=2(a^2+b^2)\Leftrightarrow a^2+b^2=2ab\Leftrightarrow (a-b)^2=0\Leftrightarrow a=b$. Таким образом, $x^2-16x=x^2+2x$, откуда $x=-8$.

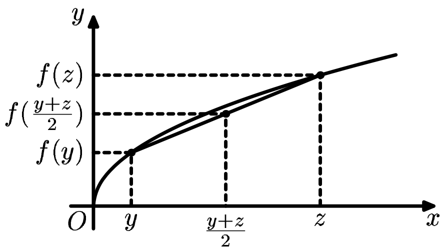

Рис. 11.1.

Второй способ. Пусть $y=x^2-16$, $z=x^2+2x$. Тогда $\frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}=\sqrt{\frac{y+z}{2}}$. Рассмотрим график функции $f(t)=\sqrt{t}$. Полученное равенство означает, что $\frac{f(y)+f(z)}{2}=f\left(\frac{y+z}{2}\right)$. Если $y\neq z$, то точка с координатами $\left(\frac{y+z}{2}; f\left(\frac{y+z}{2}\right)\right)$ является серединой отрезка с концами в точках $(y;f(y))$ и $(z;f(z))$, то есть лежит ниже графика (см. рисунок 11.1). Следовательно, $y=z$, значит, $x^2-16x=x^2+2x$, откуда $x=-8$.

$\mp$ *приведен только верный ответ*

Задача 2. В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC через точку B проведена прямая, параллельная CD и пересекающая диагональ AC точке E. Сравните площади треугольников ABC и DEC.

Ответ: площади треугольников равны.

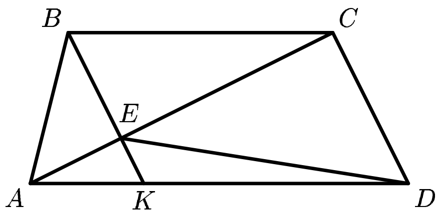

Рис. 11.2.

Пусть прямая BE пересекает основание AD в точке K (см. рисунок 11.2). Тогда $BCDK$ — параллелограм. Площадь треугольника CDE равна половине площади $BCDK$, так как у них общее основание CD и общая высота, проведенная из точки E. А площадь треугольника ABC равна половине площади $BCDK$, так как у них общее основание BC а высоты, проведенные соответственно из точек A и D, равны.

$-$ *приведен только верный ответ*

Задача 3. Верно ли, что графики функций $y=2^x$ и $y=x^3$ имеют ровно одну общую точку?

Ответ: нет, не верно.

Пусть $f(x)=2^x-x^3$. Заметим, что $f(x)$ непрерывна (разность двух непрерывных функций) и $f(0)=1>0$, $f(2)=-4<0$, $f(10)=1024-1000>0$. Таким образом, $f(x)$ имеет нули на интервалах $(0;2)$ и $(2;10)$. Следовательно, графики данных функций имеют не менее двух общих точек.

$-$ *приведен только верный ответ*

$\pm$ *верное решение и верный ответ, но отсутстует ссылка на непрерывность функций*

Задача 4. На доске написано число x. За каждый ход его можно заменить либо на число $2x+4$, либо на число $3x+8$, либо на число x^2+5x. Можно ли за несколько таких ходов из числа 3 получить число 2002?

Ответ: нет, нельзя.

Заметим, что если число x дает остаток 3 при делении на 7, то есть имеет вид $7k-4$, где k — натуральное, то и числа $2x+4$, $3x+8$, x^2+5x также дают остаток 3 при делении на 7: $2x+4=2(7k-4)+4=14k-4$, $3x+8=3(7k-4)+8=21k-4$, $x^2+5x=(7k-4)^2+5(7k-4)=$ $=49k^2-56k+16+35k-20=49k^2-21k-4=7(7k^2-3)-4$. Поэтому из числа 3 с помощью указанных операций можно получить только числа, дающие остаток 3 при делении на 7, а число 2002 делится на 7.

$-$ *приведен только верный ответ*

Задача 5. Одна треугольная пирамида расположена внутри другой. Может ли сумма длин ребер внешней пирамиды быть меньше суммы длин ребер внутренней?

Ответ: да, например, см. рисунок 11.5.

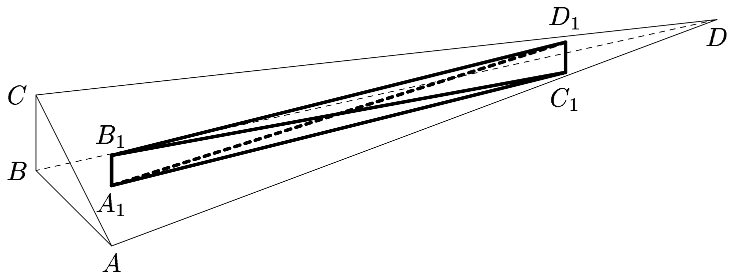

Рис. 11.6.

Внешняя пирамида $ABCD$ имеет 3 “длинных” ребра: DA, DB, DC, и три “коротких”: AB, BC, CA. Внутренняя пирамида $A_1B_1C_1D_1$ имеет 4 “длинных” ребра: A_1C_1, A_1D_1, B_1C_1, B_1D_1, и два “коротких”: A_1B_1 и C_1D_1. Длинные ребра внутренней пирамиды немногим короче длинных ребер внешней пирамиды, а длины коротких ребер не существенны для сравнения.

Приведение конкретных численных примеров сопряжено с большими техническими трудностями при доказательстве того, что одна пирамида может лежать внутри другой.

$-$ *приведен только верный ответ без примера*

$\pm$ *приведен пример с правдоподобным чертежом, но отсутствуют словесные пояснения*

Задача 6. Дана функция $f(x)$. Для всех действительных x выполняются неравенства

$$f(x+3) \leqslant f(x)+3 \quad \text{и} \quad f(x+2) \geqslant f(x)+2.$$

Докажите, что функция $g(x)=f(x)-x$ является периодической.

Решение. Из первого неравенства следует, что для всех x $g(x+6)=f(x+6)-(x+6)=$ $=f((x+3)+3)-x-6 \leqslant f(x+3)+3-x-6 \leqslant f(x)+3+3-x-6=f(x)-x=g(x)$. Из второго неравенства следует, что для всех x $g(x+6)=f(x+6)-(x+6)=f((x+4)+2)-x-6 \geqslant$ $\geqslant f(x+4)+2-x-6 \geqslant f(x+2)+2+2-x-6 \geqslant f(x)+2+2+2-x-6=f(x)-x=g(x)$. Следовательно, при всех x $g(x+6)=g(x)$, то есть число 6 является периодом функции $g(x)$.

Можно доказать, что любая функция $g(x)$, удовлетворяющая условию, имеет период 1.