Департамент образования города Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской области
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Дом научно-технического творчества молодёжи
Московский центр непрерывного математического образования

LXVII

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Проведение олимпиады
поддержано компьютерным
супермаркетом «НИКС»

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва — 2004

Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу

119002, Москва, Г-2,
Бол. Власьевский пер., 11,
Московская математическая олимпиада

или по адресу электронной почты

mmo@mccme.ru

или по телефону

241 12 37

Сборник подготовили

А. В. Акопян, В. Д. Арнольд, М. А. Берштейн, А. Д. Блинков, И. И. Богданов, П. А. Бородин, А. И. Галочкин, Т. И. Голенищева-Кутузова, Г. Г. Гусев, В. М. Гуровиц, А. А. Заславский, А. Я. Канель-Белов, А. Н. Карпов, В. А. Клепцын, Г. А. Колюцкий, Е. В. Корицкая, О. Н. Косухин, Ю. Г. Кудряшов, А. К. Кулыгин, А. М. Кустарёв, М. В. Левин, М. А. Макаров, С. В. Маркелов, И. В. Межиров, Г. А. Мерзон, П. И. Митричев, Н. Г. Мощевитин, Ю. Л. Притыкин, И. Н. Сергеев, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков, Б. Р. Френкин, А. В. Хачатурян, А. В. Шаповалов, А. Х. Шень, И. В. Ященко.

Рисунки выполнили

И. В. Межиров, П. И. Митричев, М. Ю. Панов, В. Ю. Радионов.

LXVII Московская математическая олимпиада.
Задачи и решения.

Редакторы *А. В. Семёнов, А. Б. Скопенков.* Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 11/III 2004 года.
Формат бумаги 60×88 $^1\!/_{16}$. Объём 1,5 печ. л. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Гарнитура обыкновенная новая. Тираж 3000 экз. Заказ 6912.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 КЛАСС

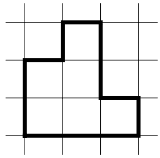


Рис. 1

1. Кузнечик прыгает вдоль прямой вперёд на 80 см или назад на 50 см. Может ли он менее чем за 7 прыжков удалиться от начальной точки ровно на 1 м 70 см? (*Фольклор*)

2. Килограмм говядины с костями стоит 78 рублей, килограмм говядины без костей — 90 рублей, а килограмм костей — 15 рублей. Сколько граммов костей в килограмме говядины? (*А. В. Хачатурян*)

3. а) Придумайте три правильные несократимые дроби, сумма которых — целое число, а если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей тоже будет целым числом.

б) То же, но числители дробей — не равные друг другу натуральные числа.

(*Т. И. Голенищева-Кутузова*)

4. Сложите из фигур, изображённых на рис. 1,

а) квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3;

б) прямоугольник размером 9×12.

(Фигуры можно не только поворачивать, но и переворачивать.) (*А. В. Хачатурян*)

5. Вадик написал название своего родного города и все его циклические сдвиги, получив табл. 1.

Таблица 1

М	О	С	К	В	А
А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
С	К	В	А	М	О
О	С	К	В	А	М

Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, он составил табл. 2 и выписал её последний столбец: ВКСАМО.

Таблица 2

А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
М	О	С	К	В	А
О	С	К	В	А	М
С	К	В	А	М	О

Саша сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» МТТЛАРАЕКИС. Что это за город, если его название начинается с буквы С? (*А. Х. Шень*)

7 КЛАСС

1. Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух? (*И. В. Ященко*)

2. Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть? (Если да, нарисуйте пример, если нет, обоснуйте ответ.)

(*Т. И. Голенищева-Кутузова, Ю. Г. Кудряшов*)

3. На доске написаны три правильные несократимые дроби, дающие в сумме единицу, причём их числители — различные натуральные числа.

Таблица 3

М	О	С	К	В	А
А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
С	К	В	А	М	О
О	С	К	В	А	М

Таблица 4

А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
М	О	С	К	В	А
О	С	К	В	А	М
С	К	В	А	М	О

Оказалось, что если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей будет натуральным числом. Приведите пример таких дробей.

(*Т. И. Голенищева-Кутузова*)

4. Таня написала название своего родного города и все его циклические сдвиги, получив табл. 3.

Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, она составила табл. 4 и выписала её последний столбец: ВКСАМО.

Валера сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» ОССНГСОРОК. Что это за город, если его название заканчивается на букву К? (*А. Х. Шень*)

5. Сложите из фигур, изображённых на рис. 2, квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3 (фигуры можно не только поворачивать, но и переворачивать). (*А. В. Хачатурян*)

6. Из Цветочного города в Солнечный ведёт шоссе длиной 12 км. На втором километре этого шоссе расположен железнодорожный переезд, который три минуты закрыт и три минуты открыт и т. д., а на четвёртом и на шестом километрах расположены светофоры, которые две минуты горят красным светом и три минуты — зелёным и т. д. Незнайка выезжает из Цветочного города в Солнечный в тот момент, когда переезд только что закрылся, а оба светофора только что переключились на красный. За какое наименьшее время (в минутах) он сможет доехать до Солнечного города, не нарушая правил, если его электромобиль едет по шоссе с постоянной скоростью (Незнайка не умеет ни тормозить, ни увеличивать скорость)? (*И. В. Ященко*)

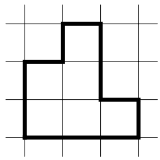


Рис. 2

8 КЛАСС

1. У квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами. (*И. В. Ященко*)

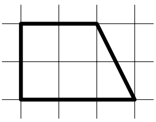


Рис. 3

2. Разрежьте изображённую на рис. 3 трапецию на три части и сложите из них квадрат. (*А. М. Кустарёв*)

3. В треугольнике ABC сторона AC наименьшая. На сторонах AB и CB взяты точки K и L, соответственно, такие что $KA=AC=CL$. Пусть M — точка пересечения AL и KC, а I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что прямая MI перпендикулярна прямой AC. (*М. А. Макаров*)

4. Курс акций компании «Рога и копыта» каждый день в 12^{00} повышается или понижается на n процентов, где n — фиксированное целое положительное число, меньшее 100 (курс не округляется). Существует ли n, для которого курс акций может дважды принять одно и то же значение? (*Б. Р. Френкин*)

5. а) Из картона вырезали семь выпуклых многоугольников и положили на стол так, что любые шесть из них можно прибить к столу двумя гвоздями, а все семь нельзя. Приведите пример таких многоугольников и их расположения. (Многоугольники могут перекрываться.)

б) Из картона вырезали восемь выпуклых многоугольников и положили на стол так, что любые семь из них можно прибить к столу двумя гвоздями, а все восемь — нельзя. Приведите пример таких многоугольников и их расположения. (Многоугольники могут перекрываться.) (*А. В. Акопян*)

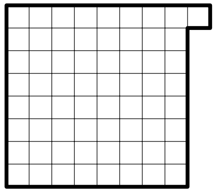


Рис. 4

6. На шахматную доску произвольным образом уложили 32 доминошки (прямоугольника 1×2), так что доминошки не перекрываются. Затем к доске добавили одну клетку, как показано на рис. 4. Разрешается вынимать любую доминошку, а затем класть её на две соседние пустые клетки. Докажите, что можно расположить все доминошки горизонтально. (*А. В. Шаповалов*)

9 КЛАСС

1. Курс акций компании «Рога и копыта» каждый день в 12^{00} повышается или понижается на 17 процентов (курс не округляется). Может ли курс акций дважды принять одно и то же значение?

(*Б. Р. Френкин*)

2. У квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили девять раз. Могло ли оказаться, что у каждого из десяти полученных уравнений корни — целые числа? (*И. В. Ященко*)

3. Бильярдный стол имеет форму многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого соседние стороны перпендикулярны друг другу. Вершины этого многоугольника — лузы, при попадании в которые шар там и остаётся. Из вершины с (внутренним) углом в 90° выпущен шар, который отражается от бортов (сторон многоугольника) по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что шар в эту вершину никогда не вернётся. (*А. Я. Канель-Белов*)

4. Пусть l_a, l_b и l_c — длины биссектрис углов A, B и C треугольника ABC, а m_a, m_b и m_c — длины соответствующих медиан. Докажите, что

$$\frac{l_a}{m_a}+\frac{l_b}{m_b}+\frac{l_c}{m_c}>1.$$

(*С. В. Маркелов*)

5. Назовём натуральное число *разрешённым*, если оно имеет не более 20 различных простых делителей. В начальный момент имеется куча из 2004! (т. е. $1\cdot2\cdot\ldots\cdot2004$) камней. Два игрока по очереди забирают из кучи некоторое разрешённое количество камней (возможно, каждый раз новое). Побеждает тот, кто заберёт последние камни. Кто выигрывает при правильной игре? (*А. Я. Канель-Белов*)

6. Перед экстрасенсом лежит колода из 36 карт рубашкой вверх (четыре масти, по девять карт каждой масти). Он называет масть верхней карты, после чего карту открывают и показывают ему. После этого экстрасенс называет масть следующей карты и т. д. Задача экстрасенса — угадать масть как можно большее число раз.

Рубашки карт несимметричны, и экстрасенс видит, в каком из двух положений лежит верхняя карта. Помощник экстрасенса знает порядок карт в колоде, не может менять его, но может расположить рубашку каждой из карт тем или иным образом.

Мог ли экстрасенс так договориться с помощником, когда тот ещё не знал порядок карт, чтобы обеспечить угадывание масти не менее чем а) 19 карт; б) 23 карты?

Если вы придумали способ угадывания другого количества карт, большего 19, то тоже напишите. (*А. В. Шаповалов*)

10 КЛАСС

1. Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Сумма первых n членов этой прогрессии является степенью двойки. Докажите, что n — также степень двойки. (*М. Б. Скопенков*)

2. Существует ли тетраэдр, все грани которого — равные прямоугольные треугольники? (*А. Д. Блинков*)

3. Назовём *белыми* числа вида $\sqrt{a+b\sqrt{2}}$, где a и b — целые числа, не равные нулю. Аналогично, назовём *чёрными* числа вида $\sqrt{c+d\sqrt{7}}$, где c и d — целые, не равные нулю числа. Может ли чёрное число равняться сумме нескольких белых? (*С. В. Маркелов*)

4. Назовём натуральное число *разрешённым*, если оно имеет не более 20 различных простых делителей. В начальный момент имеется куча из 2004! (т. е. $1\cdot2\cdot\ldots\cdot2004$) камней. Два игрока по очереди забирают из кучи некоторое разрешённое количество камней (возможно, каждый раз новое). Побеждает тот, кто заберёт последние камни. Кто выигрывает при правильной игре? (*А. Я. Канель-Белов*)

5. Радиус описанной окружности треугольника ABC равен радиусу окружности, касающейся стороны AB в точке C' и продолжений двух других сторон в точках A' и B'. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC совпадает с ортоцентром (точкой пересечения высот) треугольника $A'B'C'$. (*А. А. Заславский*)

6. Перед экстрасенсом лежит колода из 36 карт рубашкой вверх (четыре масти, по девять карт каждой масти). Он называет масть верхней карты, после чего карту открывают и показывают ему. После этого экстрасенс называет масть следующей карты и т. д. Задача экстрасенса — угадать масть как можно большее число раз.

Рубашки карт несимметричны, и экстрасенс видит, в каком из двух положений лежит верхняя карта. Помощник экстрасенса знает порядок карт в колоде, не может менять его, но может расположить рубашку каждой из карт тем или иным образом.

Мог ли экстрасенс так договориться с помощником, когда тот ещё не знал порядок карт, чтобы обеспечить угадывание масти не менее чем а) 19 карт; б) 23 карты?

Если Вы придумали способ угадывания другого количества карт, большего 19, то тоже напишите. (*А. В. Шаповалов*)

11 КЛАСС

1. Докажите, что любой квадратный трёхчлен можно представить в виде суммы двух квадратных трёхчленов с нулевыми дискриминантами. (*И. Н. Сергеев*)

2. Верно ли, что для любых четырёх попарно скрещивающихся прямых можно так выбрать по одной точке на каждой из них, чтобы эти точки были вершинами а) трапеции, б) параллелограмма? (*П. А. Бородин*)

3. Докажите, что для любого натурального числа d существует делящееся на него натуральное число n, в десятичной записи которого можно вычеркнуть некоторую ненулевую цифру так, что получившееся число тоже будет делиться на d. (*А. И. Галочкин*)

4. Треугольник ABC с острым углом $\angle A=\alpha$ вписан в окружность. Диаметр этой окружности проходит через основание высоты треугольника, проведённой из вершины B, и делит треугольник ABC на две части одинаковой площади. Найдите величину угла B. (*П. А. Бородин*)

5. Для заданных натуральных чисел $k_0<k_1<k_2$ выясните, какое наименьшее число корней на промежутке $[0; 2\pi)$ может иметь уравнение вида

$$\sin k_0x+A_1 \sin k_1x+A_2 \sin k_2x=0,$$

где $A_1, A_2\in\mathbb{R}$. (*И. Н. Сергеев*)

6. Вдоль стены круглой башни по часовой стрелке ходят два стражника, причём первый из них — вдвое быстрее второго. В этой стене, имеющей длину 1, проделаны бойницы. Система бойниц называется н а д ё ж н о й, если при некотором начальном расположении стражников в каждый последующий момент времени хотя бы один из них находится возле бойницы.

а) Какую наименьшую длину может иметь бойница, если система, состоящая только из этой бойницы, надёжна?

б) Докажите, что суммарная длина бойниц любой надёжной системы больше $1/2$.

в) Докажите, что для любого числа $s>1/2$ существует надёжная система бойниц с суммарной длиной, меньшей s. (*О. Н. Косухин*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 КЛАСС

1. Ответ: может. Указание: $5\cdot 5-8=17$.

2. Ответ: 160 граммов.

Пусть в килограмме говядины x кг костей, тогда «чистой» говядины в нём $(1-x)$ кг. Таким образом,

$$15x+90(1-x)=78,$$

откуда $x=0{,}16$.

3. Ответ: да, может. Например, $\frac{2}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{6}{11}$.

4. Ответ показан на рис. 5 и 6.

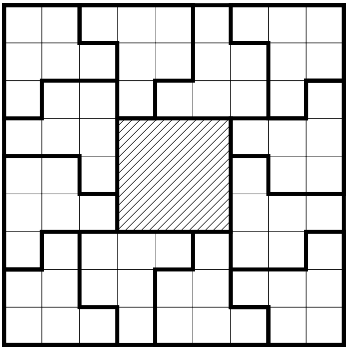


Рис. 5

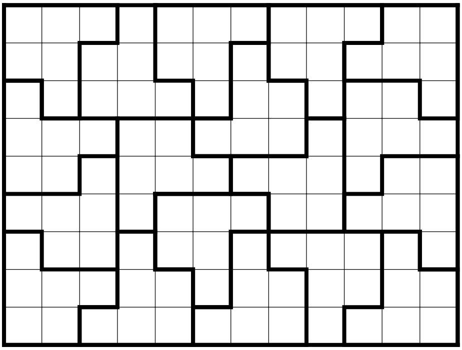


Рис. 6

5. Ответ: СТЕРЛИТАМАК.

Мы будем постепенно восстанавливать Сашину вторую таблицу. Заметим сначала, что каждая буква встречается в каждом столбце столько же раз, сколько раз она встречается в слове. Так как слова

Таблица 5

А	*	*	*	*	*	*	*	*	*	М
А	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
Е	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
И	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Л
К	*	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Л	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Р
М	*	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Р	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Е
С	*	*	*	*	*	*	*	*	*	К
Т	*	*	*	*	*	*	*	*	*	И
Т	*	*	*	*	*	*	*	*	*	С

Таблица 6

А	К	*	*	*	*	*	*	*	*	М
А	М	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
Е	Р	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
И	Т	*	*	*	*	*	*	*	*	Л
К	С	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Л	И	*	*	*	*	*	*	*	*	Р
М	А	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Р	Л	*	*	*	*	*	*	*	*	Е
С	Т	*	*	*	*	*	*	*	*	К
Т	А	*	*	*	*	*	*	*	*	И
Т	Е	*	*	*	*	*	*	*	*	С

в таблице упорядочены по алфавиту, то в первом столбце буквы слова стоят в алфавитном порядке: А, А, Е, И, К, Л, М, Р, С, Т, Т (табл. 5).

В циклических сдвигах слова после его последней буквы идёт первая. Из первой строки табл. 5 видно, что после буквы М идёт буква А, из второй и третьей — что после буквы Т один раз идёт А, а один раз — Е, и т. д. Так как слова упорядочены по алфавиту, то в строчках с одинаковой первой буквой возможные вторые буквы упорядочены по алфавиту.

Воспользовавшись этим, мы можем заполнить и второй стобец (табл. 6). Из получившейся таблицы видно, что после пары букв МА идёт буква К (первая строчка), после пары ТА идёт М (вторая строчка), и т. д.

Можно, пользуясь этой информацией, заполнить третий столбец, потом четвёртый и т. д., пока не заполнится вся таблица. Но для решения задачи достаточно восстановить третью снизу строку (так как название города начинается с буквы С), что несложно сделать, зная, какая буква идёт за какой парой букв.

7 КЛАСС

1. Ответ: только на 7.

Очевидно, что последняя цифра больше 1. Трёхзначное простое число не может оканчиваться ни на чётную цифру (т. е. на 0, 2, 4, 6 или 8), ни на цифру 5. Если последняя цифра 3 или 9, то сумма всех цифр числа, равная удвоенной последней цифре, делится на 3, а тогда само число делится на 3. Таким образом, осталась только цифра 7.

Замечания. Есть четыре числа, удовлетворяющих условию задачи: 167, 257, 347, 527 (приводить примеры таких чисел в решении не требовалось).

2. Ответ: да, могло (рис. 7).

Замечание. Такое возможно, даже если заменить число 3 на любое другое, сколь угодно большое число.

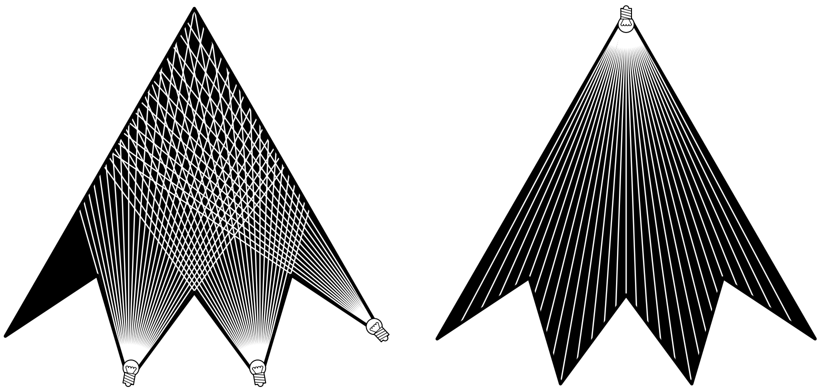


Рис. 7

3. Ответ: например, $\frac{2}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{6}{11}$.

4. Ответ: СОСНОГОРСК.

Решение аналогично решению задачи 5 для 6 класса.

5. См. рис. 5 на стр. 8.

6. Ответ: 24 мин.

Будем откладывать по оси абсцисс время (в минутах), а по оси ординат — расстояние от Цветочного города (в километрах). Так как скорость электромобиля постоянна, то график его движения — прямая. При этом Незнайка не может проезжать переезд, расположенный на втором километре шоссе, пока не истекут три минуты (когда он закрыт), а также на седьмой—девятой минутах, на тринадцатой—пятнадцатой минутах и т. д. Графически это означает, что прямая не может пересекать выделенные отрезки (рис. 8). Аналогично можно отметить отрезки,

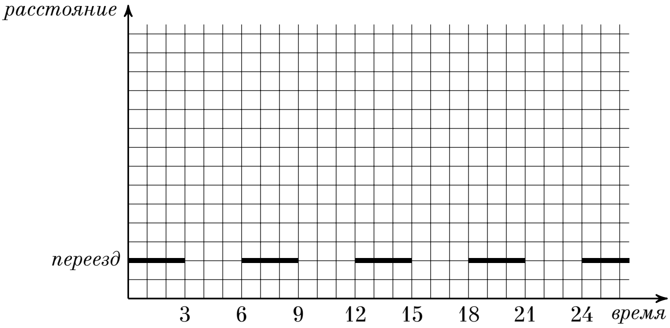


Рис. 8

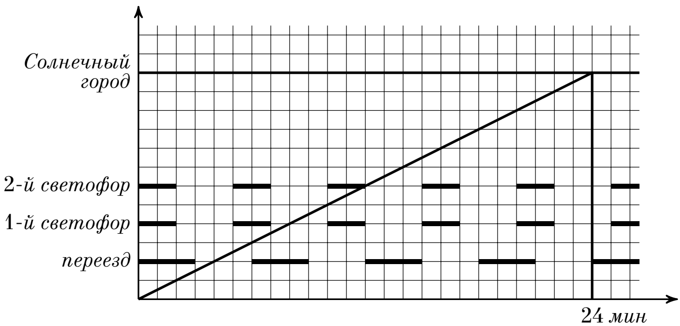


Рис. 9

которые запрещено пересекать из-за красного света светофоров (рис. 9). Для получения ответа осталось из начала координат провести прямую, которая не пересекает ни один из выделенных отрезков и пересекает горизонтальную прямую $y = 12$ как можно раньше.

8 КЛАСС

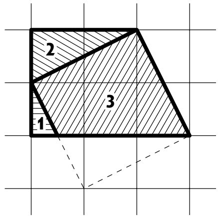
1. Ответ: например, $x^2+3x+2=0$.

Используя теорему Виета, легко понять, что корнями уравнения $x^2+(q+1)x+q=0$ являются числа -1 и $-q$.

Комментарий. Этот пример можно придумать, например, так. Увеличение коэффициентов p и q на единицу означает прибавление $x+1$ к исходному трёхчлену. Пусть один из корней данного уравнения -1, а второй — целый. Тогда при прибавлении $x+1$ корень -1 будет сохраняться, а второй корень будет уменьшаться на 1.

2. Пример необходимого разрезания изображён на рис. 10.

Комментарий. Этот пример можно придумать следующим образом. Разобьём трапецию на квадрат площади 4 и треугольник площади 1 (рис. 11). Таким образом, площадь трапеции равна 5. Значит, площадь искомого квадрата равна 5, поэтому его сторона равна $\sqrt{5}$. По теореме Пифагора длину $\sqrt{5}$ имеет гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2. Теперь уже легко придумать нужное разрезание, изображённое на рис. 10.



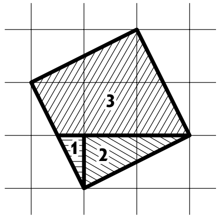


Рис. 10

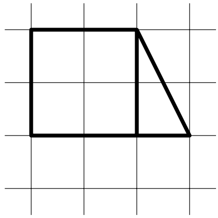


Рис. 11

3. Продлим AI до пересечения с KC в точке X и продлим CI до пересечения с LA в точке Y (рис. 12). Точка I — центр вписанной окружности — является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC. Значит, AX — биссектриса в равнобедренном треугольнике AKC, проведённая к основанию. Поэтому $AX \perp KC$. Аналогично, $CY \perp AL$. Таким образом, в треугольнике AMC отрезки AX и CY — высоты. Поскольку высоты треугольника пересекаются в одной точке, то I — точка пересечения высот треугольника AMC. Следовательно, прямая MI содержит высоту, а значит, она перпендикулярна прямой AC.

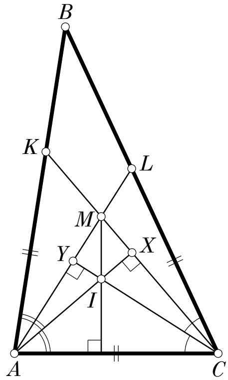


Рис. 12

4. Заметим, что при повышении курса акций он умножается на $1+\frac{n}{100}$, а при понижении — на $1-\frac{n}{100}$. Следовательно, после k повышений и l понижений курс акций умножится на

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^k\left(1-\frac{n}{100}\right)^l.$$

Докажем, что это число не может быть равно единице. Для этого запишем дробь $\frac{n}{100}$ в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где $q>1$. Тогда $1+\frac{n}{100}=\frac{q+p}{q}$ и $1-\frac{n}{100}=\frac{q-p}{q}$. Так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, числа

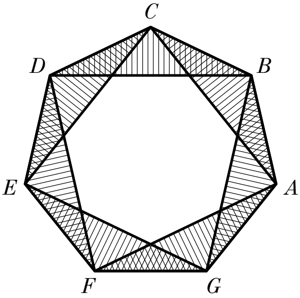


Рис. 13

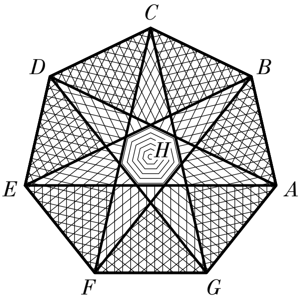


Рис. 14

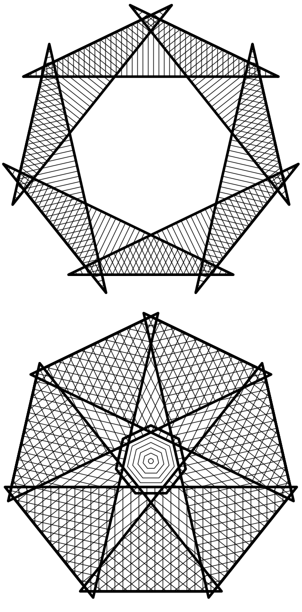


Рис. 15

$q+p$ и q взаимно просты, числа $q-p$ и q тоже взаимно просты. Следовательно, дробь $\dfrac{(q+p)^k(q-p)^l}{q^{k+l}}$ также несократима, а значит не равна единице, что и требовалось доказать.

То же решение можно сформулировать по-другому: после каждого изменения курса акций возрастает количество знаков после запятой в числе, выражающем отношение текущего курса к начальному.

5. а) Рассмотрим выпуклый семиугольник *ABCDEFG*. Искомые семь многоугольников — это треугольники, определённые парами соседних сторон семиугольника (т. е. треугольники *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEF*, *EFG*, *FGA* и *GAB*, рис. 13). Докажем, что они удовлетворяют условию задачи. Рассмотрим какие-нибудь шесть из них, например, все, кроме треугольника *GAB*. Их можно прибить двумя гвоздями (в точках F и C). Если взять какие-то другие шесть треугольников, то их тоже можно прибить двумя гвоздями. С другой стороны, так как любой гвоздь прибивает не более трёх многоугольников, то двумя гвоздями можно прибить не более шести многоугольников.

б) Рассмотрим правильный семиугольник *ABCDEFG* (рис. 14). Искомые восемь многоугольников — это четырёхугольники *ABCD*, *BCDE*, *CDEF*, *DEFG*, *EFGA*, *FGAB*, *GABC* и семиугольник, находящийся в центре, ограниченный диагоналями *AD*, *BE*, *CF*, *DG*, *EA*, *FB* и *GC*. Докажем, что любые семь из них можно прибить двумя гвоздями. Действительно, если взять семь четырёхугольников (*ABCD*, ..., *GABC*), то их можно прибить к столу двумя гвоздями в точках A и E. Если же взять центральный семиугольник и шесть четырёхугольников, например *CDEF*, ..., *ABCD* (без *BCDE*), то их можно прибить двумя гвоздями в точках H и F.

Теперь докажем, что все восемь многоугольников нельзя прибить двумя гвоздями. Предположим, что это не так. Тогда один из гвоздей должен прибивать центральный семиугольник. Но тогда этот гвоздь прибивает не более двух четырёхугольников. Значит, оставшийся гвоздь должен прибить по меньшей мере пять четырёхугольников, но это невозможно. Противоречие.

Замечание к обоим пунктам. Можно построить пример, в котором гвозди прибивают внутренние точки многоугольников. Например, можно немного «раздуть» имеющиеся многоугольники (рис. 15).

Комментарий. Знаменитая теорема Хелли утверждает, что если на плоскости даны несколько выпуклых многоугольников, любые три из которых можно прибить к плоскости одним гвоздём, то и все многоугольники можно прибить одним гвоздём. Наша задача опровергает аналогичное утверждение с заменой одного гвоздя на два.

О теореме Хелли см.: В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2001. — [http://www.mccme.ru/free-books/prasolov.html].

6. Все доминошки занимают 64 клетки, поэтому одна клетка всегда свободна. Будем называть её дыркой. Заметим сначала, что если в (горизонтальном) ряду с дыркой есть хотя бы одна вертикальная доминошка, то одну из таких доминошек можно сделать горизонтальной. Действительно, для этого достаточно сдвинуть все горизонтальные доминошки, находящиеся между дыркой и вертикальной доминошкой, после чего повернуть вертикальную доминошку. Будем повторять такую операцию, пока дырка не окажется в ряду без вертикальных доминошек (это обязательно случится, так как после каждой операции число вертикальных доминошек уменьшается). Во всех рядах, кроме верхнего, чётное количество клеток, поэтому, когда указанный процесс остановится, дырка будет находиться в верхнем ряду.

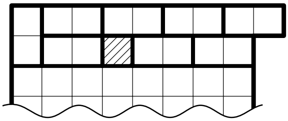


Рис. 16

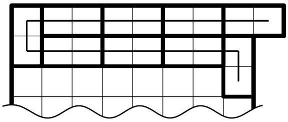


Рис. 17

Начнём строить «змею»: передвинем дырку в верхний левый угол и сделаем вертикальной доминошку, оказавшуюся под дыркой («змея» занимает весь первый ряд). Затем повторим процесс, описанный в предыдущем абзаце, не затрагивая доминошек из первого ряда (включая одну вертикальную). После этого дырка окажется во второй строке, причём в этой строке будет только одна вертикальная доминошка (рис. 16). Передвинем теперь дырку в правый конец второго ряда, сделаем оказавшуюся под ней доминошку вертикальной. «Змея» теперь занимает уже два первых ряда (рис. 17).

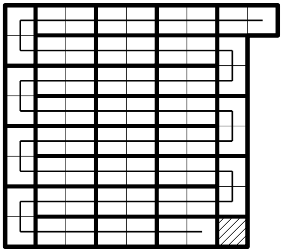


Рис. 18

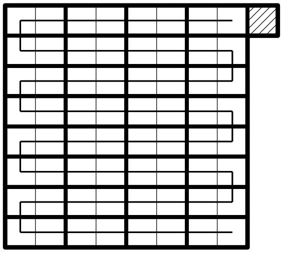


Рис. 19

Повторяя эти операции, в итоге получим «змею», составленную из всех доминошек (рис. 18). Теперь, если «змея переползёт на одну клетку вперёд», то все доминошки станут горизонтальными, рис. 19 (формально, это переползание — применение процедуры, описанной в первом абзаце).

9 КЛАСС

1. О т в е т: нет, не могло.

Заметим, что при повышении курса акций он умножается на $\frac{117}{100}$, а при понижении — на $\frac{83}{100}$. Следовательно, после k повышений и l понижений курс акций умножится на

$$\left(\frac{117}{100}\right)^k \left(\frac{83}{100}\right)^l .$$

Если это число равно единице, то $117^k \cdot 83^l = 100^{k+l}$. Но в правой части этого равенства стоит чётное число, а в левой — нечётное. Противоречие.

Ср. с решением задачи 3 для 8 класса.

2. О т в е т: да, могло.

Решение аналогично решению задачи 1 для 8 класса.

3. Доказательство от противного. Пусть шар вернулся в исходную точку. Обозначим начальную и конечную точку через A, а точки отражения через $A_1, \ldots, A_n$. Заметим, что угол (обычный, ненаправленный) между вертикальной прямой и отрезками пути шара постоянен (нетрудно проверить, что он не меняется при отражениях относительно как вертикальных, так и горизонтальных прямых). Можно считать, что он не равен 0° и 90°, иначе шар свалится в первую попавшуюся лузу. Так как A — вершина внутреннего угла, то существует лишь один луч с вершиной в A, образующий данный угол с вертикальной прямой и лежащий в той четверти, где расположен стол. Значит, шар вернулся в A по той же прямой, по которой и вылетел.

Таким образом, первый и последний отрезки пути шара совпадают. Рассмотрим два отражения шара от стенки в точке A_1 — первое и последнее. Учитывая закон отражения, получим, что шар в конце пути прилетел в точку A_1 по той же траектории, по которой вылетел из неё в начале. Поэтому второй и предпоследний отрезки пути шара также совпадают. Рассуждая аналогично, мы видим, что путь шара состоит из двух частей, вторая из которых получается из первой прохождением в обратном направлении. Значит, в некоторый момент времени шар, отразившись от стенки, пошёл в противоположную сторону. Но тогда некоторый отрезок пути шара перпендикулярен стороне многоугольника, следовательно образует с вертикальной прямой угол 0° или 90°. Противоречие.

4. Пусть $a \leqslant b \leqslant c$ — стороны треугольника ABC. Пусть I — точка пересечения биссектрис углов A и B (рис. 20). Тогда

$$\frac{l_a}{m_a}+\frac{l_b}{m_b}+\frac{l_c}{m_c} > \frac{l_a}{m_a}+\frac{l_b}{m_b} \geqslant \frac{l_a+l_b}{c} > \frac{AI+IB}{c} > 1.$$

Здесь второе неравенство выполнено, поскольку любой отрезок внутри треугольника (в частности, любая медиана) не превосходит наибольшей стороны. Третье неравенство выполнено, поскольку $l_a > AI$ и $l_b > BI$.

Четвёртое неравенство выполнено по неравенству треугольника для треугольника AIB.

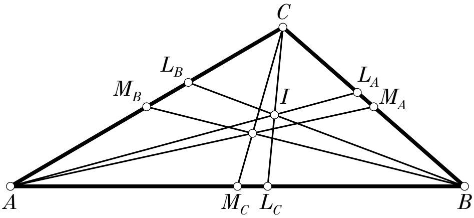


Рис. 20

Комментарий автора задачи. Данная задача — один из примеров преимущества метода «инженерной прикидки» перед методом «грубой силы». Попытки решить задачу с помощью формул, выражающих длины биссектрис и медиан через стороны треугольника, заводят в тупик (не удалось это сделать и автору задачи, даже с помощью компьютера). В то же время метод «сели и подумали» даёт короткое решение, из которого ясно, что биссектрисы и медианы ни при чём — неравенство верно для произвольных отрезков, соединяющих вершину треугольника и какую-то точку на противоположной стороне. (Подумайте, можно ли в условии задачи заменить биссектрисы на высоты.)

Отметим, что оценка точная, т. е. число 1 в правой части нельзя заменить на большее так, чтобы неравенство осталось верным для всех треугольников (докажите это!), т. е. данная задача является примером симметричного неравенства, в котором оценка точная, но не достигается ни в каком треугольнике. На первый взгляд, это кажется невозможным — рассмотрим треугольник, у которого $\frac{l_a}{m_a}+\frac{l_b}{m_b}+\frac{l_c}{m_c}<1{,}1$, потом такой, у которого эта сумма меньше, чем 1,01, потом 1,001 и т. д. Посмотрим, к какому треугольнику они будут «стремиться» — для этого треугольника искомая сумма должна быть равна 1 (а чему ещё она, казалось бы, может быть равна?). Подумайте, почему это нестрогое рассуждение (часто приводящее к верному результату) в данному случае неверно.

Бытует мнение, что любое верное симметричное неравенство можно доказать многократным применением неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом и аналогичных. Наша задача является контрпримером к этому утверждению, поскольку в классических неравенствах о средних равенство достигается, когда все слагаемые равны между собой. В данной же задаче, если $\frac{l_a}{m_a}=\frac{l_b}{m_b}=\frac{l_c}{m_c}$, то $\frac{l_a}{m_a}+\frac{l_b}{m_b}+\frac{l_c}{m_c}=3$ (докажите это!), что далеко от точной оценки 1.

Заинтересовавшимся темой геометрических неравенств рекомендуем следующую литературу:

[1] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, 1970. — (Библиотека математического кружка; вып. 12). — [http://www.mccme.ru/free-book/djvu/bib-mat-kr/shk-12.djvu].

[2] В. Г. Болтянский, И. М. Яглом. Геометрические задачи на максимум и минимум // Энциклопедия элементарной математики / Под редакцией П. С. Александрова, А. И. Маркушевича, А. Я. Хинчина. — Кн. 5: Геометрия. — С. 270—348. — М.: Наука, 1966. — [http://www.mccme.ru/free-book/djvu/encikl/enc-el-5.htm].

[3] Н. М. Седракян, А. М. Авоян. Неравенства. Методы доказательства: Пер. с арм. — М.: Физматлит, 2002.

[4] В. М. Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах. — М.: Наука, 1986. — (Библиотечка «Кванта»; вып. 56).

[5] O. Bottema, R. Z. Djordjevic, R. Janic, D. S. Mitrinovic, P. M. Vasic. Geometric Inequalities. — Groningen: Wolters-Noordhoff, 1969.

(*С. В. Маркелов*, markelov@mccme.ru)

5. Ответ: при правильной игре выигрывает второй игрок.

Пусть p — произведение первых 21 простых чисел. Заметим, что p — наименьшее не разрешённое число. Поскольку 2004! делится на p, то число m, полученное после первого хода первого игрока, не делится на p. Остаток от деления m на p меньше, чем p. Поэтому он не может делиться больше чем на 20 простых чисел. Второй игрок сможет либо взять все оставшиеся камни, либо вычесть этот остаток и снова получить число, делящееся на p, и т. д.

6. Ответ: а), б) да, мог.

а) Заметим, что угадать 18 карт не составляет труда. Действительно, первыми двумя рубашками помощник может «закодировать» масть второй карты (сопоставив каждой масти один из четырёх возможных вариантов расположения двух рубашек), следующими двумя рубашками — масть четвёртой и т. д.

Когда в колоде остались две карты, экстрасенс знает, какие они (так как он видел, какие 34 карты вышли), и поэтому помощнику достаточно закодировать лишь порядок, в котором они лежат; это легко сделать при помощи рубашки 35-й карты. Таким образом экстрасенс угадает масти 19 карт.

б) Рассмотрим следующие 17 карт: все нечётные карты, кроме первой и предпоследней, и вторую карту. Заметим, что среди этих семнадцати карт обязательно найдутся пять карт одной масти. Назовём эту масть *основной*. Положением первых двух карт колоды помощник может закодировать основную масть. Положением $(2k-1)$-й и $2k$-й карт (для $1<k<18$) помощник может закодировать масть $2k$-й карты. Положением рубашки предпоследней карты помощник может закодировать масти двух последних карт (см. решение пункта а)).

Экстрасенс должен называть основную масть на каждую из выбранных семнадцати карт. Тогда он угадает масти хотя бы пяти из выбранных семнадцати карт. Кроме того, экстрасенс угадает масти всех чётных карт, кроме второй и последней, а также масти двух последних карт. Всего он угадает масти 23 карт.

Комментарий. Покажем, как экстрасенс мог угадать масти 24 карт. Для этого достаточно из первых 34 карт угадать масти хотя бы 22 (см. конец решения пункта а)). Разделим эти 34 карты, кроме первой, на 11 троек, идущих подряд. Положение первой карты (не входящей ни в одну из троек) будет указывать, каких мастей в первой тройке больше — чёрных или красных. Не уменьшая общности, предположим, что чёрных больше.

Рассмотрим карты первой тройки. Назовём *натуральными* картами первые две чёрные карты. Оставшуюся карту назовём *ненатуральной* (она может быть как чёрной, так и красной). Поворотом рубашки каждой из двух натуральных карт помощник покажет, какую из двух мастей чёрного цвета должен называть экстрасенс. Используя эту информацию, экстрасенс угадает масти обеих натуральных карт. Поворотом рубашки ненатуральной карты помощник «кодирует» цвет, который чаще встречается в следующей тройке. (Заметим, что если красная карта в первой тройке не последняя, то её ненатуральность экстрасенс сможет опознать только после её открытия.)

Теперь то же самое можно сделать со второй тройкой — при этом экстрасенс угадает в ней две масти из трёх и узнает преобладающий цвет следующей тройки, и т. д. Таким образом, он угадает масти всех карт, кроме, быть может, первой карты, и ещё 11 карт (по одной в каждой тройке), т. е. всего не менее 24 карт.

Жюри умеет строить (гораздо более сложный) алгоритм, обеспечивающий угадывание мастей 25 карт. А вот можно ли заведомо угадать масти 26 карт, жюри неизвестно.

10 КЛАСС

1. Пусть a и b — первый и n-й члены прогрессии, S — сумма первых n членов. Тогда $S=\frac{a+b}{2}n$. Значит, $2S$ делится на n. Так как $2S$ — степень двойки, то и n — степень двойки.

2. Ответ: нет, не существует.

Предположим, что существует такой тетраэдр $ABCD$. Пусть AB — гипотенуза треугольников ABC и ABD. Тогда CD — гипотенуза треугольников ACD и BCD. Середину гипотенузы CD обозначим через M. Так как треугольники ACD и BCD прямоугольные, то $AM=BM=CD/2=AB/2$, что противоречит неравенству треугольника для треугольника AMB.

3. Ответ: да, может. Например,

$$\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}=\sqrt{6+2\sqrt{7}}.$$

Это равенство легко проверить возведением в квадрат.

Комментарий. Известны следующие *формулы сложного радикала*:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}\pm\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{2A\pm2\sqrt{A^2-B}},\qquad \sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Другие решения исходной задачи можно получить при помощи формулы сложного радикала и решений уравнения $a^2-2b^2=7$. О решениях последнего уравнения (точнее, уравнения $a^2-2b^2=1$) можно прочитать в брошюре [1]. У исходной задачи есть и другие решения:

$$\sqrt{26-14\sqrt{2}}+\sqrt{5+3\sqrt{2}}+\sqrt{27+9\sqrt{2}}=\sqrt{54+18\sqrt{7}},$$
$$\sqrt{mn+n+2m\sqrt{n}}+\sqrt{mn+n-2m\sqrt{n}}+\sqrt{n+1+2\sqrt{n}}+\sqrt{n+1+2\sqrt{n}}=\sqrt{4mn+4n+8n\sqrt{m}}.$$

Здесь первой равенство следует из равенства $((2-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2}))\sqrt{3-\sqrt{2}}+3\sqrt{3+\sqrt{2}}=3\sqrt{6+2\sqrt{7}}$. Оно показывает, что число белых слагаемых может быть равно трём. Второе равенство показывает, что пару чисел $(2,7)$ можно заменить на любую другую пару чисел, не являющихся полными квадратами (это равенство фактически придумано одним из школьников на олимпиаде).

Неизвестно, могут ли все числа a, b, c, d в исходной задаче быть положительными. Поставленный на олимпиаде вопрос естественно сформулировать и в общем виде: пусть даны два выражения с радикалами (возможно, вложенными) от нескольких чисел и переменных. Можно ли представить какое-то число, представимое во втором виде, в виде суммы нескольких чисел первого вида? Возможно, ответы на эти вопросы удастся получить кому-то из участников олимпиады. . .

Интересно, что для «ординарных» радикалов ответ на аналогичный вопрос отрицательный: если p_1, p_2, ..., p_n — различные простые числа, то ни один из корней $\sqrt{p_i}$ не представляется в виде суммы других с рациональными коэффициентами. Элементарное доказательство этого факта можно прочитать журнале «Квант» [2]. В статье [3] можно найти доказательство такой теоремы: сумма чисел вида $\sqrt[n_i]{p_i^{m_i}}$ с рациональными коэффициентами является иррациональным числом, если все дроби $\dfrac{m_i}{n_i}$ правильные и различные. В этом утверждении числа вида $\sqrt[n_i]{p_i^{m_i}}$ можно заменить на числа вида $\sqrt[n]{p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_k^{m_k}}$ (это было доказано в статье [4], но было известно и до этой публикации).

Американский математик Сюзен Ландау в 1992 году привела пример алгоритма, который позволяет по выражению с радикалами сказать, можно ли его упростить (т. е. уменьшить уровень вложенности радикалов) [5].

Заметим, что решение уравнений в радикалах — знаменитая тема, которая положила начало современной алгебре [6].

[1] В. О. Бугаенко. Уравнения Пелля. — М.: МЦНМО, 2001. — (Библиотека «Математическое просвещение»; вып. 13). — [http://www.mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/book.13.pdf].

[2] Л. Н. Камнев. Иррациональность суммы радикалов // Квант. — 1972. — № 2. — С. 26—27. — [http://kvant.mccme.ru/1972/02/].

[3] В. Олейников. Иррациональность и неприводимость // Квант. — 1986. — №. 10. — С. 6—10. — [http://kvant.mccme.ru/1986/10/].

[4] A. Besicovich. On the linar independence of fractional powers of integers // Journal of London Math. Society. — 1940. — № 15. — P. 3—6.

[5] S. Landau. Simplification of Nested Radicals // SIAM Journal of Computation. — 1992. — Vol. 21. — P. 85—110. — [http://citeseer.nj.nec.com/landau93simplification.html].

[6] В. Б. Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. — М.: МЦНМО, 2001. — [http://www.mccme.ru/free-books/books/alekseev.pdf].

4. См. решение задачи 5 для 9 класса.

5. Первое решение. Пусть O — центр описанной окружности, O' — центр вневписанной. Будем считать, что A' лежит на луче CB, а B' лежит на луче CA (рис. 21). Для начала заметим, что $O'A \perp B'C'$. Значит, чтобы доказать перпендикулярность прямых OA' и $B'C'$, достаточно доказать, что $O'A \parallel OA'$. Поскольку $\angle A'O'C' = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle A'BC' = 180^\circ - \angle A'BC' = \angle B$ и, аналогично, $\angle B'O'C' = \angle A$, имеем:

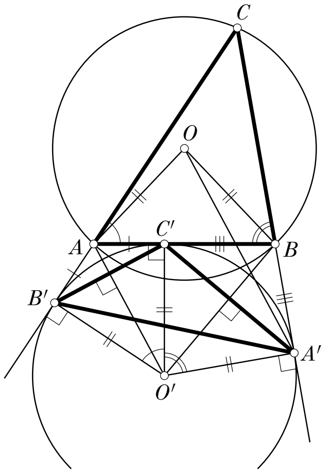


Рис. 21

$$\angle A'O'A = \angle A'O'C' + \frac{1}{2}\angle B'O'C' = \angle B + \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\angle O'AO = \angle O'AB + \angle BAO = (90^\circ - \angle C'O'A) + (90^\circ - \angle C) = 180^\circ - \angle C - \frac{1}{2}\angle A = \angle B + \frac{1}{2}\angle A.$$

По условию $O'A' = OA$, следовательно, $A'O'AO$ — равнобокая трапеция. Рассуждая аналогично, можно показать, что и $OB' \perp A'C'$. Значит, O — точка пересечения двух прямых, содержащие высоты треугольника $A'B'C'$, а следовательно, через неё проходит и третья прямая, содержащая высоту.

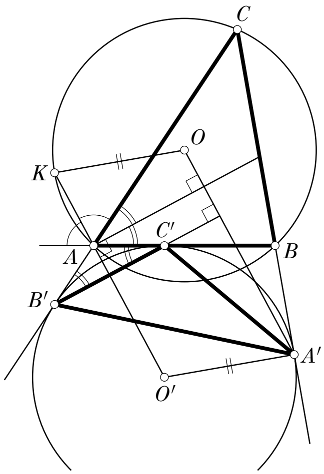


Рис. 22

Набросок второго решения (предложенного школьниками на олимпиаде). Обозначим через O и O' центры данных окружностей (описанной и вневписанной). Пусть K — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC (рис. 22). Тогда $OK \perp AB$, $O'A' \perp BC$; кроме того, $OK = O'A'$ как радиусы. Поэтому четырёхугольник $OKO'A'$ — параллелограмм и $OA' \parallel O'K$. Заметим, что AK — биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине A, поэтому параллельные отрезки $A'O$ и $O'K$ перпендикулярны биссектрисе угла CAB. А поскольку треугольник $C'AB'$ равнобедренный и $\angle AC'B' = \frac{1}{2}\angle A$, то $C'B' \perp A'O$. Аналогично, $A'C' \perp B'O$. Поэтому O — точка пересечения высот треугольника $A'B'C'$.

6. Ответ: а), б) да, мог.

См. решение задачи 6 для 9 класса.

11 КЛАСС

1. Обозначим $t=x+\dfrac{b}{2a}$ и $D=b^2-4ac$. Тогда

$$ax^2+bx+c=a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right).$$

При $D\leqslant 0$ положим $p=\dfrac{\sqrt{-D}}{2a}$. Тогда

$$a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right)=\frac{a}{2}((t-p)^2+(t+p)^2).$$

При $D>0$ положим $q=\dfrac{\sqrt{D}}{2a\sqrt{2}}$. Тогда

$$a\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right)=a(2(t+q)^2-(t+2q)^2).$$

2. а) Ответ: да, верно.

Пусть a, b, c, d — четыре попарно скрещивающиеся прямые. Построим такие плоскости $\alpha\supset a$ и $\beta\supset b$, что α параллельна β (рис. 23). Аналогично, построим такие плоскости $\gamma\supset c$ и $\delta\supset d$, что γ параллельна δ. Рассмотрим произвольное направление $\overrightarrow{v}$, не параллельное никакой из этих плоскостей. Спроецируем прямую a на плоскость β вдоль этого направления. Обозначим через B точку пересечения проекции и прямой b, а через $A\in a$ её прообраз при проекции. Тогда прямая AB

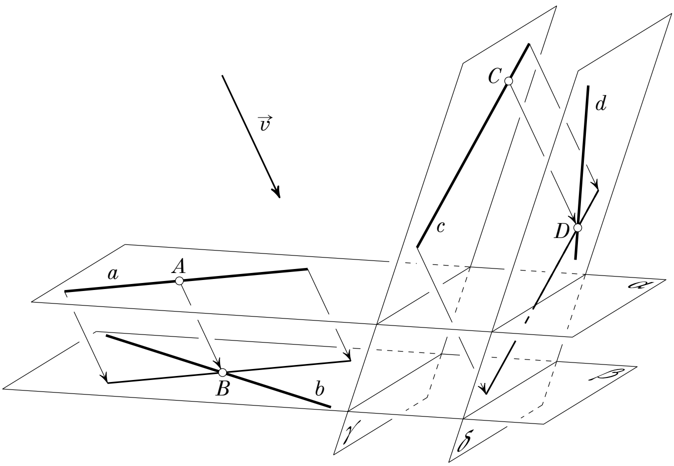


Рис. 23

параллельна направлению $\vec{v}$. Аналогично строятся точки $C \in c$ и $D \in d$, для которых прямая CD параллельна направлению $\vec{v}$. Тогда прямая AB параллельна CD. Поэтому либо точки A, B, C и D лежат на одной прямой, либо четырёхугольник $ABCD$ — трапеция, либо четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Для всех направлений $\vec{v}$, кроме конечного числа, точки A, B, C и D не лежат на одной прямой.

Чтобы исключить случай параллелограмма, достаточно обеспечить неравенство $AB \neq CD$. Заметим, что $AB = \frac{p}{\sin\varphi}$ и $CD = \frac{q}{\sin\psi}$, где p — расстояние между плоскостями α и β, q — расстояние между плоскостями γ и δ, φ — угол между направлением $\vec{v}$ и плоскостью α, ψ — угол между направлением $\vec{v}$ и плоскостью γ.

Если плоскости α и γ не параллельны, то найдётся направление $\vec{v}$, для которого $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} < \frac{p}{q}$ (например, направление, почти параллельное плоскости α и перпендикулярное прямой пересечения плоскостей α и γ), и тогда $AB \neq CD$.

Если же все плоскости α, β, γ, δ параллельны, то $\varphi = \psi$ для любого направления $\vec{v}$, и для выполнения неравенства $AB \neq CD$ достаточно неравенства $p \neq q$, которого всегда можно добиться, переобозначив плоскости.

б) Ответ: нет, не верно.

Возьмём четыре параллельные плоскости, все попарные расстояния между которыми различны. В каждой из них проведём прямую таким образом, чтобы эти прямые попарно скрещивались. Докажем, что параллелограмма с вершинами на этих прямых не существует. Действительно, длины любых двух параллельных отрезков с концами на этих прямых пропорциональны расстояниям между соответствующими парами плоскостей, а значит, различны.

3. Первое решение. Число n можно записать в виде $n = 10^k(10a+b)+c$, где $0 \leqslant c < 10^k$, b — ненулевая цифра, которую вычёркиваем, a — число, образованное цифрами, стоящими левее b. Тогда после вычёркивания получится число $n_1 = 10^k a + c$. Их разность $n - n_1 = 10^k(9a+b)$. Чтобы выполнялось условие задачи, достаточно, чтобы числа $9a+b$ и $10^k a + c$ делились на d. Для этого подберём ненулевую цифру b так, чтобы число $d-b$ делилось на 9, и возьмём $a = \frac{d-b}{9}$. Тогда $d = 9a+b$. Пусть k — такое число, что $10^{k-1} > d$. Число $10^k a + 10^{k-1}$ разделим с остатком на d: $10^k a + 10^{k-1} = dq + r$, $0 \leqslant r < d$. Положим $c = 10^{k-1} - r > 0$. Тогда $10^k a + c = dq$ делится на d.

Второе решение (предложенное школьниками на олимпиаде). Рассмотрим для произвольного натурального k число $n_k = 10^k d - d$. Пусть l — количество знаков в десятичной записи числа d ($l = [\lg d] + 1$). Заметим, что при достаточно больших k (а именно, при $k > l$) десятичная запись числа n_k выглядит следующим образом: сначала идёт десятичная запись числа $d-1$, затем — серия девяток, и наконец — десятичная запись числа 10^l-d. Таким образом, при $k>l$ число n_k можно получить из числа n_{k+1} путём вычёркивания одной из девяток в центральной части десятичной записи. Очевидно также, что все числа n_k делятся на d.

4. Ответ: $\pi-2\alpha$ или $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$.

Пусть H — основание высоты, проведённой из вершины B, пусть указанный в условии диаметр d пересекает контур треугольника в точках H и O, а M — середина стороны AC. Медиана BM делит треугольник на две части одинаковой площади. Если диаметр d содержит отрезок BM, то $H=M$, треугольник ABC — равнобедренный, и $\angle B=\pi-2\alpha$ (рис. 24). В противном случае d и BM пересекаются в некоторой точке K, поскольку каждый из этих отрезков делит треугольник на две равновеликие части. Ясно, что площади треугольников BOK и MKH равны. Тогда площади треугольников BOH и BMH равны. Значит, отрезок BH параллелен OM (рис. 25). Поэтому отрезок OM — серединный перпендикуляр к хорде AC. Следовательно, он является частью диаметра окружности. Значит, точка O принадлежит двум различным диаметрам, поэтому она является центром окружности. Если точка O лежит на стороне BC, то $\angle A=\dfrac{\pi}{2}>\alpha$, что невозможно, а если O лежит на стороне AB, то $\angle C=\dfrac{\pi}{2}$ и $\angle B=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$.

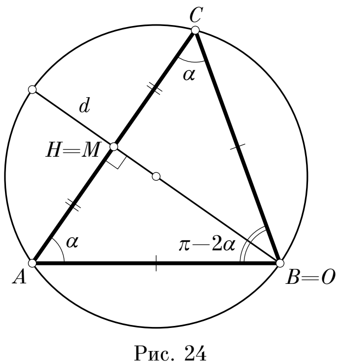


Рис. 24

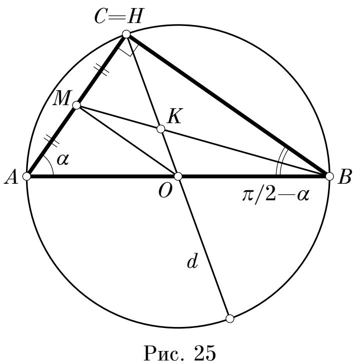


Рис. 25

5. Ответ: $2k_0$.

Обозначим через $N(F)$ число нулей функции F на промежутке $[0; 2\pi)$, т. е. значений аргумента $x\in[0; 2\pi)$, для которых $F(x)=0$. Тогда при $A_1=A_2=0$ получаем $N(\sin k_0x)=2k_0$. Действительно, нулями являются числа $x_n=\dfrac{\pi n}{k_0}$, где $n=0, 1, \ldots, 2k_0-1$.

Фиксируем произвольные числа A_1 и A_2 и докажем, что число нулей функции $F(x)=\sin k_0x+A_1\sin k_1x+A_2\sin k_2x$ на промежутке $[0;2\pi)$ не меньше $2k_0$. Пусть $f_m(x)=(\sin x)^{(m)}$. Заметим, что $\{f_m(x)\}$ — последовательность функций $\sin x$, $-\cos x$, $-\sin x$, $\cos x$, $\sin x$, ... (периодическая с периодом 4). Определим последовательность функций

$$F_m(x)=f_m(k_0x)+A_1\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^m f_m(k_1x)+A_2\left(\frac{k_0}{k_2}\right)^m f_m(k_2x), \quad m=0,\ 1,\ \ldots$$

Тогда $F_0=F$ и $F'_{m+1}=k_0F_m$. Ясно, что число 2π — период каждой из функций F_m (можно представить себе, что они являются функциями от точек единичной окружности длиной 2π). Строго между любыми двумя соседними (на окружности) нулями функции F_{m+1} есть хотя бы один ноль её производной (это естественное утверждение называется теоремой Ролля). Значит, $N(F_m)\geqslant N(F_{m+1})$. Поэтому достаточно доказать, что $N(F_M)\geqslant 2k_0$ для достаточно большого числа M.

Поскольку $\frac{k_0}{k_1}<1$, $\frac{k_0}{k_2}<1$, то существует достаточно большое число M вида $4m+3$, для которого

$$\left|A_1\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^M\right|+\left|A_2\left(\frac{k_0}{k_2}\right)^M\right|=\varepsilon<1.$$

Тогда

$$F_M\left(\frac{\pi n}{k_0}\right)=\cos(\pi n)+A_1\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^M\cos\left(\frac{k_1\pi n}{k_0}\right)+A_2\left(\frac{k_0}{k_2}\right)^M\cos\left(\frac{k_2\pi n}{k_0}\right).$$

Поэтому $F_M\left(\frac{\pi n}{k_0}\right)>1-\varepsilon>0$ для чётных n и $F_M\left(\frac{\pi n}{k_0}\right)<-1+\varepsilon<0$ для нечётных n. Значит, непрерывная функция F_M обязательно имеет ноль между любыми соседними точками $x_n=\frac{\pi n}{k_0}$, где $n=0, 1, \ldots, 2k_0$. Поэтому $N(F_M)\geqslant 2k_0$.

6. а) Ответ: $\frac{2}{3}$.

Предположим, что бойница имеет длину $s<\frac{2}{3}$. За то время, пока второй стражник проходит не занятый бойницей участок стены (длины $1-s$), первый стражник пройдёт расстояние $2(1-s)>s$. Т. е. найдётся такой момент времени в который ни один из стражников не находится возле бойницы.

Рассмотрим такой момент времени, в который первый стражник находится на $\frac{1}{3}$ впереди второго. Пусть бойница занимает тот участок стены между стражниками, который имеет длину $\frac{2}{3}$. Легко проверить, что тогда условия задачи выполнены.

б) Пусть суммарная длина бойниц равна s. Без ограничения общности, будем считать, что в начальный момент времени стражники находятся в одной точке, а за 1 час второй стражник делает ровно один обход вдоль стены. За этот час каждый стражник побывает возле бойниц в течение s часов (первый стражник пройдёт все бойницы дважды, но в два раза быстрее). Кроме того, найдётся такой промежуток времени, в течение которого они оба будут находиться возле одной и той же бойницы, содержащей точку их встречи. Поэтому суммарное время, проведённое двумя стражниками возле бойниц в течение часа, строго больше 1 часа. Т. е. $2s>1$, и следовательно $s>\frac{1}{2}$.

в) Построим функцию $f(t)$, обладающую следующими свойствами:

1° $f(t)$ имеет период 1;

2° на отрезке $[0, 1]$ функция $f(t)$ обращается в ноль на конечном множестве отрезков с суммарной длиной меньшей s;

3° $f(t)\,f(2t)=0$ для всех t.

Выберем натуральное число n таким, чтобы $\frac{1}{2^n}<s-\frac{1}{2}$. Рассмотрим двоичную запись числа t из промежутка $[0, 1)$: $t=0{,}a_1a_2a_3\ldots$ (все a_k равны 0 или 1). Пусть задано некоторое натуральное число q. Рассмотрим множество M_q чисел t из промежутка $[0, 1)$, для которых среди первых qn знаков после запятой в двоичном разложении t встречается набор $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}$. Ясно, что M_q представляет собой объединение конечного числа промежутков.

Дополнение $[0,1)\setminus M_q$ содержится в множестве G_q тех чисел t из промежутка $[0, 1)$, для которых ни один из наборов вида $a_{kn+1}a_{kn+2}\ldots a_{(k+1)n}$ $(k=0, 1, \ldots, q-1)$ не совпадает с набором $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}$. Тогда суммарная длина промежутков, составляющих множество G_q, равна $g_q=\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)^q$.

Поскольку $\frac{2^n-1}{2^n}<1$, то g_q стремится к нулю при неограниченном росте q (если n фиксировано). Поэтому можно взять q настолько большим, чтобы $g_q<\frac{1}{2^{n+1}}$.

Множество M_q разобьём на два множества B_q и C_q. Здесь B_q — множество таких чисел t, что набор $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}$ впервые встречается в двоичной записи числа t, начиная с нечётного места (т. е. для некоторого $k=0, 1, 2, \ldots$ набор $a_{2k+1}a_{2k+2}\ldots a_{2k+n}$ совпадает с набором $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}$, а при любом $j<2k+1$ для набора $a_j a_{j+1} \ldots a_{j+n-1}$ такого совпадения нет). Аналогично, C_q — множество таких чисел t, что набор $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}$ впервые встречается, начиная с чётного места. Обозначим суммарную длину промежутков, составляющих множество B_q, через b_q, а суммарную длину промежутков, составляющих множество C_q, — через c_q.

Пусть число t содержится в B_q, тогда число $\frac{t}{2}$ содержится в C_q. Кроме того, если набор $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ первых цифр числа t' не совпадает с набором $\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}$, то число $\frac{t'+1}{2}$ также содержится в C_q. Ясно, что $\frac{t}{2} \neq \frac{t'+1}{2}$. Отсюда получаем, что

$$c_q \geqslant \frac{b_q}{2} + \frac{1}{2}\left(b_q - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = b_q - \frac{1}{2^n}.$$

Имеем: $b_q < 1 - c_q \leqslant 1 + \frac{1}{2^n} - b_q$, т. е. $b_q < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$.

Положим $f(t)$ равной нулю на всех промежутках (включая их концы), составляющих объединение множеств B_q и G_q. Суммарная длина этих промежутков не превосходит

$$b_q + g_q < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} < s.$$

В остальных точках промежутка $[0, 1)$ положим $f(t)=1$, а затем продолжим $f(t)$ на $(-\infty, \infty)$ с периодом 1. Свойства 1° и 2° для функции f, очевидно, выполнены. Для доказательства свойства 3° заметим, что если $f(t)=1$ и $0 \leqslant t < 1$, то $t = 0{,}a_1 a_2 \ldots$ содержится в множестве C_q, т. е. среди первых q знаков после запятой встречается набор $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}$, причём он впервые встречается, начиная с чётного места. Тогда одно из чисел $2t$ или $2t-1$ равно $0{,}a_2 a_3 \ldots$, т. е. принадлежит множеству B_q. Получаем $f(2t)=0$ как только $f(t)=1$. Отсюда вытекает, что $f(t)\,f(2t)=0$ для любого t.

Как и раньше считаем, что в момент времени $t=0$ стражники находились в одной точке, а за отрезок времени $[0, 1]$ второй стражник делает ровно один обход вдоль стены. Пусть бойницы проделаны на тех участках стены, мимо которых проходит второй стражник в те отрезки времени, на которых $f(t)=0$. Тогда их суммарная длина будет меньше s. Так как для любого t имеем $f(t)\,f(2t)=0$, получаем, что в каждый момент времени по крайней мере один из стражников находится возле бойницы.