8 КЛАСС

1. Ответ: например, $x^2+3x+2=0$.

Используя теорему Виета, легко понять, что корнями уравнения $x^2+(q+1)x+q=0$ являются числа -1 и $-q$.

Комментарий. Этот пример можно придумать, например, так. Увеличение коэффициентов p и q на единицу означает прибавление $x+1$ к исходному трёхчлену. Пусть один из корней данного уравнения -1, а второй — целый. Тогда при прибавлении $x+1$ корень -1 будет сохраняться, а второй корень будет уменьшаться на 1.

2. Пример необходимого разрезания изображён на рис. 1.

Комментарий. Этот пример можно придумать следующим образом. Разобьём трапецию на квадрат площади 4 и треугольник площади 1 (рис. 2). Таким образом, площадь трапеции равна 5. Значит, площадь искомого квадрата равна 5, поэтому его сторона равна $\sqrt{5}$. По теореме Пифагора длину $\sqrt{5}$ имеет гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2. Теперь уже легко придумать нужное разрезание, изображённое на рис. 1.

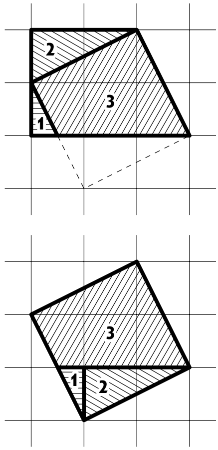

Рис. 1

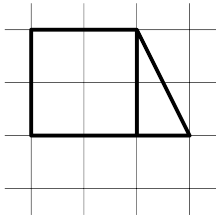
Рис. 2

3. Продлим AI до пересечения с KC в точке X и продлим CI до пересечения с LA в точке Y (рис. 3). Точка I — центр вписанной окружности — является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC. Значит, AX — биссектриса в равнобедренном треугольнике AKC, проведённая к основанию. Поэтому $AX\perp KC$. Аналогично, $CY\perp AL$. Таким образом, в треугольнике AMC отрезки AX и CY — высоты. Поскольку высоты треугольника пересекаются в одной точке, то I — точка пересечения высот треугольника AMC. Следовательно, прямая MI содержит высоту, а значит, она перпендикулярна прямой AC.

4. Заметим, что при повышении курса акций он умножается на $1+\frac{n}{100}$, а при понижении — на $1-\frac{n}{100}$. Следовательно, после k повышений и l понижений курс акций умножится на

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^k\left(1-\frac{n}{100}\right)^l.$$

Докажем, что это число не может быть равно единице. Для этого запишем дробь $\frac{n}{100}$ в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где $q>1$. Тогда $1+\frac{n}{100}=\frac{q+p}{q}$ и $1-\frac{n}{100}=\frac{q-p}{q}$. Так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, числа

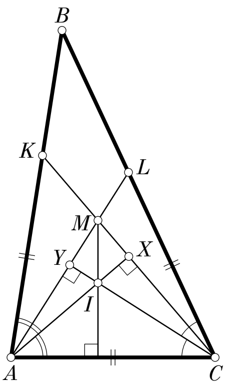

Рис. 3

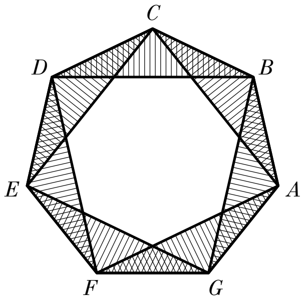

Рис. 4

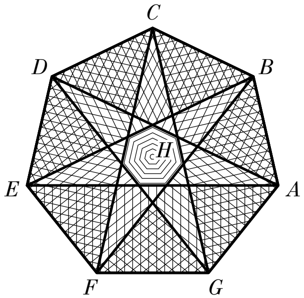

Рис. 5

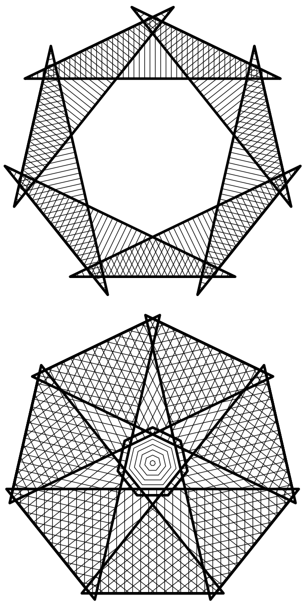

Рис. 6

$q+p$ и q взаимно просты, числа $q-p$ и q тоже взаимно просты. Следовательно, дробь $\dfrac{(q+p)^k(q-p)^l}{q^{k+l}}$ также несократима, а значит не равна единице, что и требовалось доказать.

То же решение можно сформулировать по-другому: после каждого изменения курса акций возрастает количество знаков после запятой в числе, выражающем отношение текущего курса к начальному.

5. а) Рассмотрим выпуклый семиугольник $ABCDEFG$. Искомые семь многоугольников — это треугольники, определённые парами соседних сторон семиугольника (т. е. треугольники ABC, BCD, CDE, DEF, EFG, FGA и GAB, рис. 4). Докажем, что они удовлетворяют условию задачи. Рассмотрим какие-нибудь шесть из них, например, все, кроме треугольника GAB. Их можно прибить двумя гвоздями (в точках F и C). Если взять какие-то другие шесть треугольников, то их тоже можно прибить двумя гвоздями. С другой стороны, так как любой гвоздь прибивает не более трёх многоугольников, то двумя гвоздями можно прибить не более шести многоугольников.

б) Рассмотрим правильный семиугольник $ABCDEFG$ (рис. 5). Искомые восемь многоугольников — это четырёхугольники $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$, $DEFG$, $EFGA$, $FGAB$, $GABC$ и семиугольник, находящийся в центре, ограниченный диагоналями AD, BE, CF, DG, EA, FB и GC. Докажем, что любые семь из них можно прибить двумя гвоздями. Действительно, если взять семь четырёхугольников ($ABCD$, ..., $GABC$), то их можно прибить к столу двумя гвоздями в точках A и E. Если же взять центральный семиугольник и шесть четырёхугольников, например $CDEF$, ..., $ABCD$ (без $BCDE$), то их можно прибить двумя гвоздями в точках H и F.

Теперь докажем, что все восемь многоугольников нельзя прибить двумя гвоздями. Предположим, что это не так. Тогда один из гвоздей должен прибивать центральный семиугольник. Но тогда этот гвоздь прибивает не более двух четырёхугольников. Значит, оставшийся гвоздь должен прибить по меньшей мере пять четырёхугольников, но это невозможно. Противоречие.

Замечание к обоим пунктам. Можно построить пример, в котором гвозди прибивают внутренние точки многоугольников. Например, можно немного «раздуть» имеющиеся многоугольники (рис. 6).

Комментарий. Знаменитая теорема Хелли утверждает, что если на плоскости даны несколько выпуклых многоугольников, любые три из которых можно прибить к плоскости одним гвоздём, то и все многоугольники можно прибить одним гвоздём. Наша задача опровергает аналогичное утверждение с заменой одного гвоздя на два.

О теореме Хелли см.: В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2001. — [http://www.mccme.ru/free-books/prasolov.html].

6. Все доминошки занимают 64 клетки, поэтому одна клетка всегда свободна. Будем называть её дыркой. Заметим сначала, что если в (горизонтальном) ряду с дыркой есть хотя бы одна вертикальная доминошка, то одну из таких доминошек можно сделать горизонтальной. Действительно, для этого достаточно сдвинуть все горизонтальные доминошки, находящиеся между дыркой и вертикальной доминошкой, после чего повернуть вертикальную доминошку. Будем повторять такую операцию, пока дырка не окажется в ряду без вертикальных доминошек (это обязательно случится, так как после каждой операции число вертикальных доминошек уменьшается). Во всех рядах, кроме верхнего, чётное количество клеток, поэтому, когда указанный процесс остановится, дырка будет находиться в верхнем ряду.

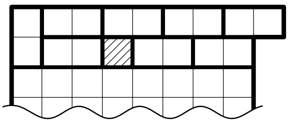
Рис. 7

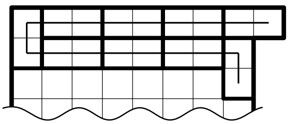
Рис. 8

Начнём строить «змею»: передвинем дырку в верхний левый угол и сделаем вертикальной доминошку, оказавшуюся под дыркой («змея» занимает весь первый ряд). Затем повторим процесс, описанный в предыдущем абзаце, не затрагивая доминошек из первого ряда (включая одну вертикальную). После этого дырка окажется во второй строке, причём в этой строке будет только одна вертикальная доминошка (рис. 7). Передвинем теперь дырку в правый конец второго ряда, сделаем оказавшуюся под ней доминошку вертикальной. «Змея» теперь занимает уже два первых ряда (рис. 8).

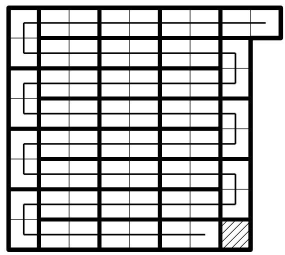
Рис. 9

Повторяя эти операции, в итоге получим «змею», составленную из всех доминошек (рис. 9). Теперь, если «змея переползёт на одну клетку вперёд», то все доминошки станут горизонтальными, рис. 10 (формально, это переползание — применение процедуры, описанной в первом абзаце).

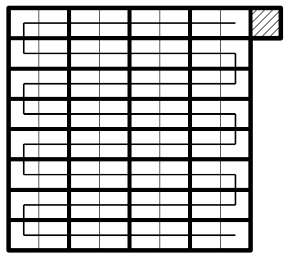
Рис. 10