10 КЛАСС

1. Пусть a и b — первый и n-й члены прогрессии, S — сумма первых n членов. Тогда $S=\frac{a+b}{2}n$. Значит, $2S$ делится на n. Так как $2S$ — степень двойки, то и n — степень двойки.

2. Ответ: нет, не существует.

Предположим, что существует такой тетраэдр $ABCD$. Пусть AB — гипотенуза треугольников ABC и ABD. Тогда CD — гипотенуза треугольников ACD и BCD. Середину гипотенузы CD обозначим через M. Так как треугольники ACD и BCD прямоугольные, то $AM=BM=CD/2=AB/2$, что противоречит неравенству треугольника для треугольника AMB.

3. Ответ: да, может. Например,

$$\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}=\sqrt{6+2\sqrt{7}}.$$

Это равенство легко проверить возведением в квадрат.

Комментарий. Известны следующие *формулы сложного радикала*:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}\pm\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{2A\pm2\sqrt{A^2-B}},\qquad \sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Другие решения исходной задачи можно получить при помощи формулы сложного радикала и решений уравнения $a^2-2b^2=7$. О решениях последнего уравнения (точнее, уравнения $a^2-2b^2=1$) можно прочитать в брошюре [1]. У исходной задачи есть и другие решения:

$$\sqrt{26-14\sqrt{2}}+\sqrt{5+3\sqrt{2}}+\sqrt{27+9\sqrt{2}}=\sqrt{54+18\sqrt{7}},$$

$$\sqrt{mn+n+2m\sqrt{n}}+\sqrt{mn+n-2m\sqrt{n}}+\sqrt{n+1+2\sqrt{n}}+\sqrt{n+1+2\sqrt{n}}=\sqrt{4mn+4n+8n\sqrt{m}}.$$

Здесь первой равенство следует из равенства $((2-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2}))\sqrt{3-\sqrt{2}}+3\sqrt{3+\sqrt{2}}=3\sqrt{6+2\sqrt{7}}$. Оно показывает, что число белых слагаемых может быть равно трём. Второе равенство показывает, что пару чисел $(2, 7)$ можно заменить на любую другую пару чисел, не являющихся полными квадратами (это равенство фактически придумано одним из школьников на олимпиаде).

Неизвестно, могут ли все числа a, b, c, d в исходной задаче быть положительными. Поставленный на олимпиаде вопрос естественно сформулировать и в общем виде: пусть даны два выражения с радикалами (возможно, вложенными) от нескольких чисел и переменных. Можно ли представить какое-то число, представимое во втором виде, в виде суммы нескольких чисел первого вида? Возможно, ответы на эти вопросы удастся получить кому-то из участников олимпиады. . .

Интересно, что для «ординарных» радикалов ответ на аналогичный вопрос отрицательный: если p_1, p_2, ..., p_n — различные простые числа, то ни один из корней $\sqrt{p_i}$ не представляется в виде суммы других с рациональными коэффициентами. Элементарное доказательство этого факта можно прочитать журнале «Квант» [2]. В статье [3] можно найти доказательство такой теоремы: сумма чисел вида $\sqrt[n_i]{p_i^{m_i}}$ с рациональными коэффициентами является иррациональным числом, если все дроби $\frac{m_i}{n_i}$ правильные и различные. В этом утверждении числа вида $\sqrt[n_i]{p_i^{m_i}}$ можно заменить на числа вида $\sqrt[n]{p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_k^{m_k}}$ (это было доказано в статье [4], но было известно и до этой публикации).

Американский математик Сюзен Ландау в 1992 году привела пример алгоритма, который позволяет по выражению с радикалами сказать, можно ли его упростить (т. е. уменьшить уровень вложенности радикалов) [5].

Заметим, что решение уравнений в радикалах — знаменитая тема, которая положила начало современной алгебре [6].

[1] В. О. Бугаенко. Уравнения Пелля. — М.: МЦНМО, 2001. — (Библиотека «Математическое просвещение»; вып. 13). — [http://www.mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/book.13.pdf].

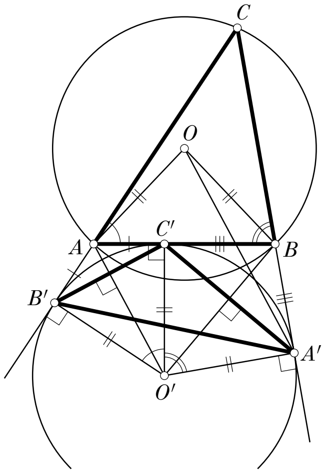

Рис. 1

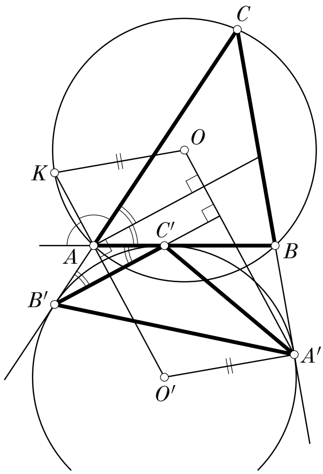

Рис. 2

[2] Л. Н. Камнев. Иррациональность суммы радикалов // Квант. — 1972. — № 2. — С. 26—27. — [http://kvant.mccme.ru/1972/02/].

[3] В. Олейников. Иррациональность и неприводимость // Квант. — 1986. — №. 10. — С. 6—10. — [http://kvant.mccme.ru/1986/10/].

[4] A. Besicovich. On the linar independence of fractional powers of integers // Journal of London Math. Society. — 1940. — № 15. — P. 3—6.

[5] S. Landau. Simplification of Nested Radicals // SIAM Journal of Computation. — 1992. — Vol. 21. — P. 85—110. — [http://citeseer.nj.nec.com/landau93simplification.html].

[6] В. Б. Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. — М.: МЦНМО, 2001. — [http://www.mccme.ru/free-books/books/alekseev.pdf].

4. Ответ: при правильной игре выигрывает второй игрок.

Пусть p — произведение первых 21 простых чисел. Заметим, что p — наименьшее не разрешённое число. Поскольку 2004! делится на p, то число m, полученное после первого хода первого игрока, не делится на p. Остаток от деления m на p меньше, чем p. Поэтому он не может делиться больше чем на 20 простых чисел. Второй игрок сможет либо взять все оставшиеся камни, либо вычесть этот остаток и снова получить число, делящееся на p, и т. д.

5. Первое решение. Пусть O — центр описанной окружности, O' — центр вневписанной. Будем считать, что A' лежит на луче CB, а B' лежит на луче CA (рис. 1). Для начала заметим, что $O'A\perp B'C'$. Значит, чтобы доказать перпендикулярность прямых OA' и $B'C'$, достаточно доказать, что $O'A\| OA'$. Поскольку $\angle A'O'C' = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle A'BC' = 180^\circ - \angle A'BC' = \angle B$ и, аналогично, $\angle B'O'C' = \angle A$, имеем:

$$\angle A'O'A = \angle A'O'C' + \frac{1}{2}\angle B'O'C' = \angle B + \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\angle O'AO = \angle O'AB + \angle BAO = (90^\circ - \angle C'O'A) + (90^\circ - \angle C) = $$
$$= 180^\circ - \angle C - \frac{1}{2}\angle A = \angle B + \frac{1}{2}\angle A.$$

По условию $O'A' = OA$, следовательно, $A'O'AO$ — равнобокая трапеция. Рассуждая аналогично, можно показать, что и $OB'\perp A'C'$. Значит, O — точка пересечения двух прямых, содержащие высоты треугольника $A'B'C'$, а следовательно, через неё проходит и третья прямая, содержащая высоту.

Н а б р о с о к в т о р о г о р е ш е н и я (предложенного школьниками на олимпиаде). Обозначим через O и O' центры данных окружностей (описанной и вневписанной). Пусть K — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC (рис. 2). Тогда $OK \perp AB$, $O'A' \perp BC$; кроме того, $OK = O'A'$ как радиусы. Поэтому четырёхугольник $OKO'A'$ — параллелограмм и $OA' \parallel O'K$. Заметим, что AK — биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине A, поэтому параллельные отрезки $A'O$ и $O'K$ перпендикулярны биссектрисе угла CAB. А поскольку треугольник $C'AB'$ равнобедренный и $\angle AC'B' = \frac{1}{2}\angle A$, то $C'B' \perp A'O$. Аналогично, $A'C' \perp B'O$. Поэтому O — точка пересечения высот треугольника $A'B'C'$.

6. О т в е т: а), б) да, мог.

а) Заметим, что угадать 18 карт не составляет труда. Действительно, первыми двумя рубашками помощник может «закодировать» масть второй карты (сопоставив каждой масти один из четырёх возможных вариантов расположения двух рубашек), следующими двумя рубашками — масть четвёртой и т. д.

Когда в колоде остались две карты, экстрасенс знает, какие они (так как он видел, какие 34 карты вышли), и поэтому помощнику достаточно закодировать лишь порядок, в котором они лежат; это легко сделать при помощи рубашки 35-й карты. Таким образом экстрасенс угадает масти 19 карт.

б) Рассмотрим следующие 17 карт: все нечётные карты, кроме первой и предпоследней, и вторую карту. Заметим, что среди этих семнадцати карт обязательно найдутся пять карт одной масти. Назовём эту масть о с н о в н о й. Положением первых двух карт колоды помощник может закодировать основную масть. Положением $(2k-1)$-й и $2k$-й карт (для $1 < k < 18$) помощник может закодировать масть $2k$-й карты. Положением рубашки предпоследней карты помощник может закодировать масти двух последних карт (см. пункт а)).

Экстрасенс должен называть основную масть на каждую из выбранных семнадцати карт. Тогда он угадает масти хотя бы пяти из выбранных семнадцати карт. Кроме того, экстрасенс угадает масти всех чётных карт, кроме второй и последней, а также масти двух последних карт. Всего он угадает масти 23 карт.

К о м м е н т а р и й. Покажем, как экстрасенс мог угадать масти 24 карт. Для этого достаточно из первых 34 карт угадать масти хотя бы 22 (см. конец решения пункта а)). Разделим эти 34 карты, кроме первой, на 11 троек, идущих подряд. Положение первой карты (не входящей ни в одну из троек) будет указывать, каких мастей в первой тройке больше — чёрных или красных. Не уменьшая общности, предположим, что чёрных больше.

Рассмотрим карты первой тройки. Назовём н а т у р а л ь н ы м и картами первые две чёрные карты. Оставшуюся карту назовём н е н а т у р а л ь н о й (она может быть как чёрной, так и красной). Поворотом рубашки каждой из двух натуральных карт помощник покажет, какую из двух мастей чёрного цвета должен называть экстрасенс. Используя эту информацию, экстрасенс угадает масти обеих натуральных карт. Поворотом рубашки ненатуральной карты помощник «кодирует» цвет, который чаще встречается в следующей тройке. (Заметим, что если красная карта в первой тройке не последняя, то её ненатуральность экстрасенс сможет опознать только после её открытия.)

Теперь то же самое можно сделать со второй тройкой — при этом экстрасенс угадает в ней две масти из трёх и узнает преобладающий цвет следующей тройки, и т. д. Таким образом, он угадает масти всех карт, кроме, быть может, первой карты, и ещё 11 карт (по одной в каждой тройке), т. е. всего не менее 24 карт.

Жюри умеет строить (гораздо более сложный) алгоритм, обеспечивающий угадывание мастей 25 карт. А вот можно ли заведомо угадать масти 26 карт, жюри неизвестно.