10 класс

1. **Ответ:** 249999.

Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}}{-2}+\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+5}}{-2}+\dots+\frac{\sqrt{x+2003}-\sqrt{x+2005}}{-2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{x+2005}=-2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2005}=2+\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x+2005=$$

$$=4+4\sqrt{x+1}+x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=500 \Leftrightarrow x=249999$$

$\mp$ *верный ответ без решения*

$\mp$ *верный ход решения, но допущена арифметическая ошибка*

2. **Ответ:** $a_1 \in (-2005; -2004)$.

Так как разность прогрессии положительна, то прогрессия — возрастающая. Следовательно, описанная ситуация возможна тогда и только тогда, когда члены прогрессии с первого по 2005-ый — отрицательны, а начиная с 2006-ого — положительны. Таким образом, S_{2005} будет наименьшей, тогда и только тогда, когда $a_{2005} < 0$, а $a_{2006} > 0$. Отсюда получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a_1+2004<0, \\ a_1+2005>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -2005<a_1<-2004.$$

$\pm$ *верный ход решения, но получен не интервал, а отрезок*

$\mp$ *верный ответ без обоснования*

3. В пересечении квадратов получается многоугольник, стороны которого удалены от центра квадратов на расстояние 10. Следовательно, в этот многоугольник можно вписать круг.

Площадь этого круга равна $100\pi > 314$. Следовательно, площадь общей части квадратов больше, чем 314.

4. **Ответ:** номер 90.

Все числа, начинающиеся с цифр 1, 2 или 3, меньше данного числа. Тогда на остальных местах цифры могут стоять в произвольном порядке, то есть их в каждом случае по 4! Значит, чисел, начинающихся с 1, 2 или 3, в точности $3 \cdot 4! = 72$. Кроме того, меньше данного будут все числа, начинающиеся с 41 или 42. Таких чисел будет $2 \cdot 3! = 12$. Чисел, начинающихся с 431 или 432 будет $2 \cdot 2! = 4$, и они также меньше данного. И еще одно число, меньшее данного: 43512.

Итого $72+12+4+1=89$ чисел. Следовательно, данное число имеет номер 90.

Можно также решить задачу, выписав явно все пятизначные числа, меньшие данного.

$\mp$ *верный ответ без обоснования*

$\mp$ *верный ход решения, но допущена арифметическая ошибка*

5. **Ответ:** нет, нельзя.

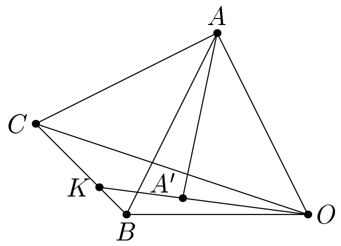
Предположим, что составить выражение, тождественно равное x, можно, то есть для всех x выполняется равенство $f(3x^2+x; 3x) = x$. Но при $x=\frac{2}{3}$ $\quad 3x^2+x=3x=2$, следовательно, левая часть равенства принимает целое значения, а правая — дробное (равна $\frac{2}{3}$).

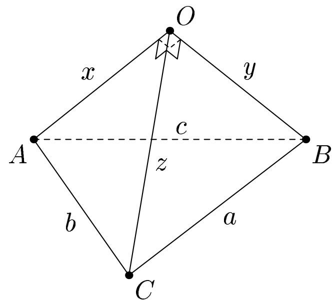
$-$ *ответ «нет» без обоснований*

6. **Ответ:** для остроугольных треугольников.

Рассмотрим треугольник ABC и точку O, удовлетворяющие условию.

1) Докажем, что точка O не может лежать в плоскости треугольника. Действительно, если точка O лежит в плоскости ABC, то из равенства углов $\angle AOB$, $\angle BOC$ и $\angle COA$ следует, что она лежит внутри треугольника. Поэтому каждая сторона треугольника видна из неё под углом, меньшим $180°$, а, например, отрезок AD, проходящий через точку O — под углом $180°$.





2) Докажем, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$. Пусть это не так. Предположим, что эти углы — острые (см. рисунок слева). Пусть точка A' — проекция точки A на плоскость BOC. Тогда, так как $\angle AOB = \angle AOC$, то OA' — биссектриса $\angle BOC$, пересекающая отрезок BC в точке K. $\angle AOK$ — это угол между прямой AO и плоскостью BOC, поэтому $\angle AOK < \angle AOC$. Следовательно, отрезки AK и AC видны из точки O под разными углами. Случай тупых углов рассматривается аналогично.

3) Докажем, что треугольник ABC может быть только остроугольным. Пусть $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ (см. рисунок справа). Тогда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ y^2 + z^2 = a^2, \\ z^2 + x^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = (b^2 + c^2 - a^2)/2, \\ y^2 = (c^2 + a^2 - b^2)/2, \\ z^2 = (a^2 + b^2 - c^2)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < b^2 + c^2, \\ b^2 < c^2 + a^2, \\ c^2 < a^2 + b^2, \end{cases}$$

то есть треугольник ABC остроугольный.

4) Заметим, что если треугольник ABC остроугольный, то рассмотренная система уравнений всегда имеет положительные решения (x, y, z), то есть существует точка O, из которой его стороны видны под прямыми углами. Докажем, что из этой точки каждый из остальных рассматриваемых отрезков виден под прямым углом. Действительно, так как $OA \perp OB$ и $OA \perp OC$, то $OA \perp (OBC)$. Следовательно, прямая OA перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Поэтому для любой точки M, лежащей на отрезке BC, $\angle AOM = 90^\circ$. Аналогично, $OB \perp (AOC)$ и $OC \perp (AOB)$.

$\pm$ *верное решение, но не рассмотрен случай, когда точка O лежит в плоскости ABC*

$+/2$ *верный ответ и доказательство того, что любой остроугольный треугольник удовлетворяет условию*

$+/2$ *верный ответ и доказательство того, что любой неостроугольный треугольник условию не удовлетворяет*

$\mp$ *верный ответ без обоснования*

$\mp$ *доказано только, что равные углы должны быть прямыми*