ISBN 5-94057-248-0
9 785940 572480 >

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXIX
Московская математическая олимпиада

Окружной тур

Москва
Издательство МЦНМО
2006

В брошюре содержатся задачи окружного этапа Московской математической олимпиады 2006 года, их решения и критерии проверки (включая варианты олимпиад, проводившихся на базе вузов). Приведена статистика решения задач. Брошюра адресована учителям математики и методистам.

ISBN 5-94057-248-0

LXIX Московская математическая олимпиада. Окружной тур.
Составители *А. Д. Блинков, В. М. Гуровиц, А. С. Горская.*

Технический редактор А. С. Горская.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 29.05.2006 г.
Формат 60 × 88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 3.5 печ. л.
Тираж 2500 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

Введение

Окружной тур является самым массовым этапом Московской математической олимпиады (ММО). Принять участие в нем (так же, как и в последующем, городском туре) может любой желающий школьник.

Организационную работу по проведению этого тура олимпиады координирует кафедра математики Московского института открытого образования (МИОО).

Окружной тур олимпиады в 5–11 классах проводился по единым текстам, которые составляла методическая комиссия, организуемая кафедрой математики МИОО, Московским центром непрерывного математического образования (МЦНМО) и оргкомитетом ММО. К работе в этой комиссии привлекаются методисты-математики и учителя математики московских школ, студенты и аспиранты МГУ.

В текущем учебном году в состав комиссии, работавшей на базе МЦНМО, входили А. Д. Блинков (председатель), В. М. Гуровиц, Е. С. Горская, П. В. Чулков, И. В. Ященко и ответственные за варианты по классам: Т. А. Баранова и К. П. Кочетков (5 класс), Е. А. Чернышева (6 класс), А. Н. Андреева (7 класс), О. Р. Горская (8 класс), А. В. Хачатурян (9 класс), А. В. Иванищук (10 класс).

При составлении вариантов комиссия руководствовалась следующими принципами:

- решение любого задания не должно требовать знаний, выходящих за рамки программы соответствующего класса общеобразовательной школы (при этом составители постарались учесть имеющееся многообразие школьных учебников по курсу математики);
- задания каждого варианта должны быть максимально разнообразны по тематике;
- первые два — три задания в варианте каждого класса должны быть непосредственно связаны с программным материалом;
- одно — два последних задания в варианте каждого класса должны быть достаточно сложны даже для подготовленных школьников.

В этом учебном году окружной тур проводился 21 января 2006 года для 5–7 классов и 29 января 2006 года — для 8–11 классов.

По сложившейся традиции, для учащихся **5–7 классов** школы проводили олимпиаду на своих территориях (в ряде случаев несколько близлежащих школ объединяли свои усилия). На решение задач участникам выделялось 1,5–2 часа. Проверка работ осуществлялась силами школьных учителей математики. Школьное жюри самостоятельно определяло победителей и призеров по каждой из параллелей (в рамках своей школы), проводило разбор задач и показ работ.

Для проведения олимпиады **в 8–10 классах** в каждом учебном округе выделялись одна или несколько базовых школ[1]. На решение задач участникам отводилось 4 часа. Для проверки работ учащихся в каждом из округов формировалось жюри из числа учителей математики и студентов-математиков. Председателями окружных жюри являлись члены методической комиссии олимпиады или методисты ОНМЦ.

В распоряжение окружных жюри методической комиссией были переданы: тексты заданий и решений, критерии проверки, рекомендации по проведению олимпиады и по организации проверки работ, инструкция учителя — дежурного по аудитории.

При проверке работ учащихся было рекомендовано использовать традиционную для большинства олимпиад систему оценок:

+(4 балла)	задание решено верно и полностью;
± (3 балла)	верное решение, содержащее несущественные неточности или пробелы в рассуждениях (не рассмотрен какой-то из случаев, отсутствует строгое доказательство использованного неочевидного утверждения и нет ссылки на его известность, и т.п.);
+/2 (2 балла)	в работе ученика имеется значительная часть верного решения либо верное решение с существенными пробелами или ошибками в рассуждениях;
∓ (1 балл)	неверное решение, содержащее здравые идеи, или решения нет, но есть верные утверждения, начато «движение» в верном направлении, либо «голый» правильный ответ в заданиях, требующих обоснования;
− (0 баллов)	полностью неверное решение;
0	запись решения и ответа отсутствует.

[1]В Северо-Восточном округе олимпиада проводилась на базе СТАНКИНа.

Критерии успешности выступления и определения призовых мест в 8–10 классе устанавливались окружными жюри в зависимости от общих результатов олимпиады в данном округе. По различным параллелям эти критерии могли быть разными. Список призеров окружного тура олимпиады формировался каждым окружным жюри независимо от жюри в других округах Москвы.

Порядок награждения победителей и призеров также самостоятельно определялся окружными методическими центрами.

В данном отчете приведена статистика решения задач 5–10 классов *в таком виде*, как ее представили методисты окружных научно-методических центров.

На основании Положения о Московской региональной олимпиаде школьников окружной этап Олимпиады в г. Москве приравнивался к 3 этапу Всероссийской олимпиады школьников.

В связи с этим победители и призеры этого этапа в параллели 11 классов имели льготы при поступлении в ряд высших учебных заведений г. Москвы. Исходя из этого был определен особый порядок проведения окружного тура 69 Московской математической олимпиады в этой параллели и утвержден список мест ее проведения.

Олимпиада проводилась на базе следующих московских ВУЗов: МПГУ, МГТУ «СТАНКИН», МГУП (природообустройства), МИЭТ, МИРЭА, Академией ФСБ РФ, РГТУ(МАТИ), МИИГАиК, МГСУ (строительный), МАДИ, РУДН, МГГУ (горный), а также на базе ряда школ. В каждое из мест проведения олимпиады направлялся представитель оргкомитета. Он привозил текст олимпиады в запечатанном конверте, присутствовал на проведении олимпиады и сразу после ее окончания забирал все работы и отвозил их в оргкомитет. После этого все работы были зашифрованы и проверялись Центральным жюри региональной олимпиады по единым критериям. Решение по льготам, предоставляемым побелителям и призерам олимпиады, принимались Учеными Советами ВУЗов.

Кроме того, ряд ВУЗов г.Москвы по согласованию с кафедрой математики МИОО в другие сроки проводили олимпиады, приравнянные к региональным. В настоящем отчете приведены варианты МПГУ и МЭСИ.

Методическая комиссия пользуется случаем поблагодарить всех тех, кто помог в проведении окружного тура LXIX Московской математической олимпиады:

- Департамент образования г. Москвы;
- Московский институт открытого образования;

- Московский Центр непрерывного математического образования;
- окружные научно-методические центры;
- администрацию школ, предоставивших помещения для проведения окружной олимпиады;
- ВУЗы, принимавшие участие в олимпиаде;
- учителей и студентов-математиков, принявших активное участие в проведении олимпиады и проверке работ.

Окружной тур LXX Московской математической олимпиады пройдёт для 5–7 классов — 20 января 2007 года, для 8–11 классов — 28 января 2007 года.

Надеемся на помощь в его проведении всех заинтересованных лиц!

Желаем успеха его участникам!

Методическая комиссия

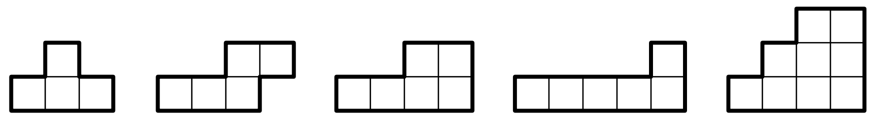
5–7 класс

Условия задач

5 класс

1. В примере на сложение двух чисел первое слагаемое меньше суммы на 2000, а сумма больше второго слагаемого на 6. Восстановите пример.

2. Составьте квадрат, используя ровно четыре из пяти изображенных ниже фигур. Каждую из четырех выбранных Вами фигур можно использовать только один раз.



3. Без ореха (от дупла до орешника) белка бежит со скоростью 4 м/сек, а с орехом (от орешника до дупла) – со скоростью 2 м/сек. На путь от дупла до орешника и обратно она тратит 54 секунды. Найдите расстояние от дупла до орешника. Ответ обоснуйте.

4. В день рождения дяди Федора почтальон Печкин хочет выяснить, сколько тому лет. Шарик говорит, что дяде Федору больше 11 лет, а кот Матроскин утверждает, что больше 10 лет. Сколько лет дяде Федору, если известно, что ровно один из них ошибся? Ответ обоснуйте.

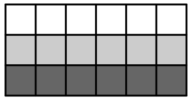
5. В забеге от Воробьевых гор до Красной площади приняли участие три спортсмена. Сначала стартовал Гриша, затем — Саша, и последней — Лена. После финиша выяснилось, что во время забега Гриша обгонял других 10 раз, Лена — 6 раз, Саша — 4 раза, причем все трое ни разу не оказывались в одной точке одновременно. В каком порядке финишировали спортсмены, если известно, что они пришли к финишу в разное время? Ответ обоснуйте.

6 класс

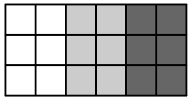
1. В саду у Ани и Вити росло 2006 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

2. Цифры трёхзначного числа A записали в обратном порядке и получили число B. Может ли число, равное сумме A и B, записываться только нечётными цифрами?

3. В стране Полосатии произошёл переворот и новый лидер приказал перекроить старый флаг на новый (см. рисунки). Как выполнить такой приказ, если разрешается разрезать старый флаг ровно на четыре части?



старый флаг



новый флаг

4. Чтобы испечь сто блинов, маме требуется 30 минут, а Ане — 40 минут. Андрюша готов съесть 100 блинов за час. Мама с Аней пекут блины без остановки, а Андрюша непрерывно их поедает. Через какое время после начала этого процесса на столе окажется ровно сто блинов?

5. В норке живёт семья из 24 мышей. Каждую ночь ровно четыре из них отправляются на склад за сыром. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждая мышка побывала на складе с каждой ровно по одному разу?

7 класс

1. У двузначного числа первая цифра вдвое больше второй. Если к этому числу прибавить квадрат его первой цифры, то получится квадрат некоторого целого числа. Найдите исходное двузначное число.

2. Петя тратит $\dfrac{1}{3}$ своего времени на игру в футбол, $\dfrac{1}{5}$ — на учебу в школе, $\dfrac{1}{6}$ — на просмотр кинофильмов, $\dfrac{1}{70}$ — на решение олимпиадных задач, и $\dfrac{1}{3}$ — на сон. Можно ли так жить?

3. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой из них находилось ровно 3 из отмеченных точек.

4. В магическом квадрате суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и на обеих диагоналях равны. Можно ли составить магический квадрат 3×3 из первых девяти простых чисел ? *Число называется простым, если у него ровно два делителя — единица и само число.*

5. На физическом кружке учитель поставил следующий эксперимент. Он разложил на чашечные весы 16 гирек массами 1, 2, 3, ..., 16 грамм так, что одна из чаш перевесила. Пятнадцать учеников по очереди выходили из класса и забирали с собой по одной гирьке, причем после выхода каждого ученика весы меняли свое положение и перевешивала противоположная чаша весов. Какая гирька могла остаться на весах?

Решения задач и примерные критерии проверки

5 класс

1. Ответ: $6 + 2000 = 2006$.

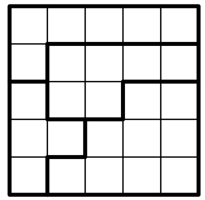
Если из суммы двух чисел вычесть одно из слагаемых, то получится другое слагаемое. Из условия следует, что второе слагаемое равно 2000, а первое — равно 6.

$+$ *верный ответ*

$\pm$ *слагаемые записаны в другом порядке*

2. Ответ: см. рисунок.

Можно определить длину стороны искомого квадрата. Общее количество клеток пяти фигур равно $4+5+6+6+9 = 30$. *Значит, если можно составить квадрат, то только со стороной* 5. *Таким образом, лишней является фигура из пяти клеток.*



$+$ *рисунок с указанием составных частей*

$\mp$ *указаны четыре нужные фигуры, но не показано, как из них сложить квадрат*

3. Ответ: 72 метра.

Поскольку обратно белка бежит в два раза медленнее, то время, затраченное белкой на обратную дорогу, в два раза больше времени, которое она тратит на дорогу от дупла до орешника. Поэтому, время, затраченное на дорогу от дупла до орешника, в три раза меньше времени, затраченного на всю дорогу, то есть оно равно $54 : 3 = 18$ секунд.

Следовательно, расстояние от дупла до орешника равно $18 \cdot 4 = 72$ метра.

$+$ *верный ответ и решение (возможно на чертеже)*

$\pm$ *верный ответ и верно записанные действия без пояснений*

$\mp$ *только верный ответ*

4. Ответ: дяде Федору 11 лет.

Заметим, что если не ошибся Шарик, то не ошибся и Матроскин, что противоречит условию. Значит, Шарик сказал неправду, в отличие от кота Матроскина. Таким образом, дяде Федору больше 10 лет, но не меньше 11. Следовательно, дяде Федору исполнилось 11 лет.

$+$ *верный ответ и обоснование*

$\pm$ *ответ и проверка, что он подходит*

$\mp$ *только верный ответ*

5. Ответ: первым финишировал Гриша, затем — Саша, и последней — Лена.

Гриша стартовал первым. Чтобы он смог совершить 10 обгонов, необходимо чтобы Саша и Лена обогнали его хотя бы 10 раз. Так как общее количество обгонов Саши и Лены равно $6 + 4 = 10$, то они обгоняли только Гришу и не обгоняли друг друга. После того, как Гриша совершил все 10 обгонов, он опять оказался первым. Значит, спортсмены финишировали в том же порядке, в котором и стартовали.

$+$ *верный ответ и полное обоснование*

$\mp$ *только верный ответ (возможно, с рассмотрением конкретного примера)*

6 класс

1. Ответ: 3 куста.

Витя полил 1003 куста, из них 1000 он поливал один, а три вместе с Аней. Точно так же Аня полила 1003 куста, из них 1000 она поливала в одиночку, а три – с Витей. Значит, вместе они полили $1000 + 1000 + 3 = 2003$ куста. Следовательно, остались не политыми $2006 - 2003 = 3$ розовых куста.

$+$ *верный ответ с обоснованием*

$\mp$ *только верный ответ*

2. Ответ: да, может.

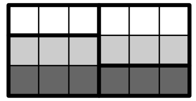
Пусть, например, $A = 219$. Тогда $B = 912$, $A + B = 1131$.

$+$ *приведён верный ответ и указано число A (не обязательно 219, но удовлетворяющее условию задачи), вычислена сумма A и B, все цифры которой нечётны*

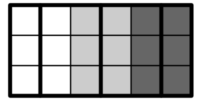
$\pm$ *приведён верный ответ и указано подходящее число A, но не вычислена сумма A и B*

$-$ *отсутствует пример числа A, удовлетворяющего условию*

3. Ответ: см. рисунок.



старый флаг



новый флаг

$+$ *приведён верный пример разрезания флага*

4. Ответ: через 24 минуты.

Первый способ. Мама печёт сто блинов за полчаса, значит, за два часа она испечёт 400 блинов. Аня печёт сто блинов за сорок минут, поэтому, за два часа она испечёт 300 блинов. Андрюша за эти два часа съест двести блинов. Получается, что через два часа на столе окажется $400 + 300 - 200 = 500$ блинов. Следовательно, для того, чтобы на столе оказалось сто блинов, потребуется времени в пять раз меньше, то есть $120 : 5 = 24$ минуты.

Второй способ. Производительность мамы при выпекании блинов равна $\frac{100}{30} = 3\frac{1}{3}$ блина в минуту. Производительность Ани равна $\frac{100}{40} = 2\frac{1}{2}$ блина в минуту. Производительность Андрюши при поедании блинов равна $\frac{100}{60} = 1\frac{2}{3}$ блина в минуту. За каждую минуту стараниями мамы, Ани и Андрюши на столе появляется $3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3} = 4\frac{1}{6}$ блина. Следовательно, сто блинов появятся на столе за $100 : 4\frac{1}{6} = 24$ минуты.

$+$ *верный ответ и полное решение*

$\pm$ *верный ответ с проверкой*

$\pm$ *верный ход решения, но в вычислениях допущена арифметическая ошибка*

$\mp$ *только верный ответ*

5. Ответ: нет, такого быть не может.

Каждая мышка за одну ночь может побывать на складе с тремя другими мышками. Чтобы побывать на складе с каждой из 23 других мышек по одному разу, ей необходимо $23 : 3$ ночей. Но число 23 не делится нацело на три. Поэтому такая ситуация невозможна.

$+$ *верный ответ с обоснованием*

$-$ *только верный ответ*

7 класс

1. Ответ: 21.

Первая цифра в два раза больше второй только у следующих двузначных чисел: 21, 42, 63 и 84. Проверкой убеждаемся, что условию задачи удовлетворяет только число 21.

$+$ *верный ответ с обоснованием*

$\mp$ *верный ответ*

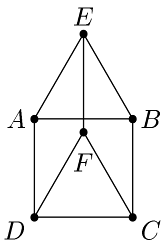
2. Ответ: нет, так жить нельзя.

Поскольку $\frac{1}{5}+\frac{1}{6} > \frac{1}{3}$, то, сумма данных дробей $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{70}+\frac{1}{3} > 1$, что противоречит здравому смыслу.

$+$ *верный ответ с обоснованием*

$-$ *только верный ответ*

3. Ответ: например, см. рисунок.



Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной 1. Построим на стороне AB во внешнюю сторону и на стороне CD во внутреннюю сторону равносторонние треугольники ABE и CDF. Точки A, B, C, D, E и F — искомые.

4. Ответ: нельзя.

Пусть первые девять простых чисел как-то расставлены в клетках квадрата. Среди них есть ровно одно четное число — 2. Сумма чисел в строке, содержащей двойку, — четная (сумма двух нечетных и одного четного чисел). В строках, не содержащих двойку, сумма чисел нечетна, следовательно суммы чисел в каких-то двух строках разные и получить магический квадрат нельзя.

$-$ *только верный ответ*

5. Ответ: на весах осталась гиря массой 1 грамм.

Поскольку в каждый момент времени массы на чашах весов отличались хотя бы на 1 грамм, то для того, чтобы перевесила противоположная чаша, необходимо забрать гирю массой не менее двух грамм. Следовательно, выходя из класса, ни один ученик не мог забрать гирю массой 1 грамм.

Заметим, что описанная в условии ситуация действительно возможна. Например, учитель положил на одну чашу весов все гири с нечетными массами, а на другую чашу — гири с четными массами. А каждый ученик, выходя из класса, забирал гирю с наибольшей массой.

$\mp$ *только верный ответ или верный ответ с примером*

Статистика решения задач

5 класс

1 задача							
Округ	$+$	$\pm$	$+/2$	$\mp$	$-$	0	ИТОГО
ЦАО	1136	205	150	114	187	81	1873
ЮАО	1065	210	92	179	192	13	1751
ЮВАО	1490	308	27	41	153	59	2078
ВАО	1426	255	51	63	92	24	1911
СВАО							
ЗАО	654	63	17	34	129	79	976
СЗАО	689	95	36	119	135	107	1181
ЮЗАО							
САО	1023			398	150		1571
Зеленоград	85	9	0	1	28		123
ВСЕГО	7568	1145	373	949	1066	363	11464
2 задача							
Округ	$+$	$\pm$	$+/2$	$\mp$	$-$	0	ИТОГО
ЦАО	1567	113	56	74	34	29	1873
ЮАО	1200	97	73	106	239	36	1751
ЮВАО	1740	63	14	56	122	83	2078
ВАО	1336	92	68	104	117	194	1911
СВАО							
ЗАО	753	412	30	12	101	67	1375
СЗАО	907	55	24	37	86	72	1181
ЮЗАО							
САО	780				791		1571
Зеленоград	59	1	0	12	51		123
ВСЕГО	8342	833	265	401	1541	481	11863
3 задача							
Округ	$+$	$\pm$	$+/2$	$\mp$	$-$	0	ИТОГО
ЦАО	693	112	132	241	506	189	1873
ЮАО	339	175	155	195	793	94	1751
ЮВАО	333	140	53	170	1088	294	2078
ВАО	228	111	69	187	742	574	1911
СВАО							
ЗАО	177	51	54	147	324	100	853
СЗАО	182	80	53	170	171	525	1181
ЮЗАО							
САО	953	384			234		1571
Зеленоград	16	4	3	10	90		123
ВСЕГО	2921	1057	519	1120	3948	1776	11341
4 задача							
Округ	$+$	$\pm$	$+/2$	$\mp$	$-$	0	ИТОГО
ЦАО	1155	206	75	195	215	27	1873
ЮАО	403	222	175	243	616	92	1751
ЮВАО	431	282	63	555	553	194	2078
ВАО	417	244	102	305	378	465	1911

СВАО							
ЗАО	258	97	55	112	269	114	905
СЗАО	307	128	77	234	270	165	1181
ЮЗАО							
САО	624				360	587	1571
Зеленоград	33	22	12	13	43		123
ВСЕГО	3628	1201	559	1657	2704	1644	11393

5 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	281	243	246	169	356	578	1873
ЮАО	168	154	198	357	736	138	1751
ЮВАО	123	84	60	317	1066	428	2078
ВАО	175	125	103	225	618	665	1911
СВАО							
ЗАО	109	34	32	154	244	277	850
СЗАО	122	61	94	225	305	374	1181
ЮЗАО							
САО	345	321			251	654	1571
Зеленоград	8	4	4	4	103		123
ВСЕГО	1331	1026	737	1451	3679	3114	11338

6 класс

1 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	882	243	106	76	137	76	1520
ЮАО	654	166	97	99	152	47	1215
ЮВАО	1490	308	27	41	153	59	2078
ВАО	803	122	56	176	256	86	1499
СВАО							
ЗАО	523	70	29	31	115	35	803
СЗАО	562	50	49	95	102	50	908
ЮЗАО							
САО	830				69	12	911
Зеленоград	35	18	4	18	15		90
ВСЕГО	5779	977	368	536	999	365	9024

2 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	487	258	91	106	441	137	1520
ЮАО	342	235	110	214	263	51	1215
ЮВАО	1740	63	14	56	122	83	2078
ВАО	487	152	64	177	415	204	1499
СВАО							
ЗАО	335	63	24	87	160	38	707
СЗАО	388	82	46	148	140	104	908
ЮЗАО							
САО	637					274	911
Зеленоград	21	1	48	8	12		90
ВСЕГО	4437	854	397	796	1553	891	8928

3 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	912	61	30	107	243	167	1520
ЮАО	662	91	87	123	203	49	1215
ЮВАО	333	140	53	170	1088	294	2078
ВАО	809	90	27	104	361	108	1499
СВАО							
ЗАО	471	45	26	35	117	47	741
СЗАО	518	62	48	114	106	60	908
ЮЗАО							
САО	309	200				402	911
Зеленоград	61	0	3	0	26		90
ВСЕГО	4075	689	274	653	2144	1127	8962

4 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	442	138	93	167	288	392	1520
ЮАО	231	127	130	198	413	116	1215
ЮВАО	431	282	63	555	553	194	2078
ВАО	204	136	44	201	574	340	1499
СВАО							
ЗАО	132	37	25	78	236	147	655
СЗАО	177	67	63	160	181	260	908
ЮЗАО							
САО	333	50	38	22	468		911
Зеленоград	24	0	2	18	46		90
ВСЕГО	1974	837	458	1399	2759	1449	8876

5 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	350	183	46	138	349	454	1520
ЮАО	134	117	120	286	423	135	1215
ЮВАО	123	84	60	317	1066	428	2078
ВАО	207	121	89	154	500	428	1499
СВАО							
ЗАО	97	42	15	57	240	188	639
СЗАО	129	56	46	172	246	259	908
ЮЗАО							
САО	230		316			365	911
Зеленоград	24	1	1	7	57		90
ВСЕГО	1294	604	693	1131	2881	2257	8860

7 класс

1 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	102	21	8	15	9	5	160
ЮАО	407	125	77	111	101	4	825
ЮВАО	635	164	23	176	156	15	1169

ВАО	835	157	46	128	188	83	1437
СВАО							
ЗАО	341	56	13	30	47	26	513
СЗАО	440	87	41	119	94	61	842
ЮЗАО							
САО	775	102			27		904
Зеленоград	23	6	1	52	17		99
ВСЕГО	3558	718	209	631	639	194	5949
2 задача							
Округ	$+$	$\pm$	$+/2$	$\mp$	$-$	0	ИТОГО
ЦАО	111	17	9	4	10	9	160
ЮАО	404	125	106	84	92	14	825
ЮВАО	711	89	45	105	198	21	1169
ВАО	767	157	48	91	242	132	1437
СВАО							
ЗАО	363	78	16	29	42	9	537
СЗАО	461	83	46	74	72	106	842
ЮЗАО							
САО	807				97		904
Зеленоград	63	11	8	13	4		99
ВСЕГО	3687	560	278	400	757	291	5973
3 задача							
Округ	$+$	$\pm$	$+/2$	$\mp$	$-$	0	ИТОГО
ЦАО	27	23	6	14	47	43	160
ЮАО	117	74	88	129	349	68	825
ЮВАО	126	71	21	87	660	204	1169
ВАО	328	116	40	128	544	281	1437
СВАО							
ЗАО	85	48	27	41	168	108	477
СЗАО	94	34	29	97	286	302	842
ЮЗАО							
САО	314			190	400		904
Зеленоград	5	1	5	5	83		99
ВСЕГО	1096	367	216	691	2537	1006	5913
4 задача							
Округ	$+$	$\pm$	$+/2$	$\mp$	$-$	0	ИТОГО
ЦАО	30	20	11	9	55	35	160
ЮАО	86	100	96	177	282	84	825
ЮВАО	155	75	26	144	593	176	1169
ВАО	275	100	54	154	549	305	1437
СВАО							
ЗАО	92	58	20	75	115	94	454
СЗАО	97	36	39	241	150	279	842
ЮЗАО							
САО	330		317		257		904
Зеленоград	19	15	15	22	28		99
ВСЕГО	1084	404	578	822	2029	973	5890

5 задача							
Округ	$+$	$\pm$	$+/2$	$\mp$	$-$	0	ИТОГО
ЦАО	27	23	31	19	20	40	160
ЮАО	109	86	72	163	338	57	825
ЮВАО	233	51	17	269	417	182	1169
ВАО	252	142	59	240	399	345	1437
СВАО							
ЗАО	111	42	26	64	111	109	463
СЗАО	113	56	47	241	158	227	842
ЮЗАО							
САО	108	150		194	452		904
Зеленоград	13	21	8	16	41		99
ВСЕГО	966	571	260	1206	1936	960	5899

8–10 класс

Условия задач

8 класс

1. Решите уравнение: $|x - 2005| + |2005 - x| = 2006$.

2. Боковая сторона трапеции равна одному из оснований и вдвое меньше другого. Докажите, что другая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей трапеции.

3. На вопрос о возрасте его детей математик ответил: «У нас с женой трое детей. Когда родился наш первенец, суммарный возраст членов семьи был равен 45 годам, год назад, когда родился третий ребёнок — 70 годам, а сейчас суммарный возраст детей — 14 лет». Сколько лет каждому ребенку, если известно, что у всех членов семьи дни рождения в один и тот же день?

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1. M и K — основания перпендикуляров, опущенных из точки B на прямые AA_1 и CC_1. Докажите, что $MK \parallel AC$.

5. Маша задумала натуральное число и нашла его остатки при делении на 3, 6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.

6. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 5×9. В левом нижнем углу стоит фишка. Коля и Серёжа по очереди передвигают ее на любое количество клеток либо вправо, либо вверх. Первым ходит Коля. Выигрывает тот, кто поставит фишку в правый верхний угол. Кто выигрывает при правильной игре?

9 класс

1. Решите уравнение $x + \dfrac{x}{x} + \dfrac{x}{x + \dfrac{x}{x}} = 1$.

2. Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса треугольника, проведённая из вершины третьего угла, вдвое длиннее, чем высота, проведенная из той же вершины.

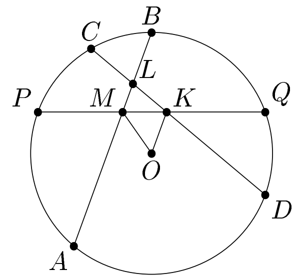
3. Сравните без помощи калькулятора числа:

$$\sqrt{2006} + \sqrt{2005 + \sqrt{2006}} \quad \text{и} \quad \sqrt{2005} + \sqrt{2006 + \sqrt{2005}}.$$

4. 20 шахматистов сыграли турнир в один круг (каждый сыграл с каждым по одной партии). Корреспондент «Спортивной газеты» написал в своей заметке, что каждый участник этого турнира выиграл столько же партий, сколько и свёл вничью. Докажите, что корреспондент ошибся.

5. Гриша едет по маршруту длиной 100 км. В его автомобиле имеется компьютер, дающий прогноз времени, оставшегося до прибытия в конечный пункт. Это время рассчитывается исходя из предположения, что средняя скорость автомобиля на оставшемся участке пути будет такой же, как и на уже пройденном.

Сразу же после старта компьютер показал «2 часа» и всё дальнейшее время показывал именно это число (компьютер исправен). Найдите $x(t)$ — зависимость пути, который проехал Гриша, от времени с момента старта. Постройте график этой зависимости.



6. В окружности с центром O проведены три равные хорды AB, CD и PQ (см. рисунок). Докажите, что $\angle MOK = \dfrac{1}{2}\angle BLD$.

10 класс

1. Один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов как по Цельсию, так и по Фаренгейту?

2. Даны квадратные трехчлены f и g с одинаковыми старшими коэффициентами. Известно, что сумма четырех корней этих трехчленов равна p. Найдите сумму корней трехчлена $f + g$, если известно, что он имеет два корня.

3. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка K — середина стороны AB, точка M лежит на стороне BC, причем $BM : MC = 1 : 3$. На стороне AC выбрана точка P так, что периметр треугольника PKM — наименьший из возможных. В каком отношении точка P делит сторону AC?

4. Найдите все простые числа p, для каждого из которых существует натуральное число m такое, что $\sqrt{m} + \sqrt{m + p}$ — также натуральное число.

5. Укажите все выпуклые четырехугольники, у которых суммы синусов противолежащих углов равны.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь ортогональной проекции грани AA_1B_1B на плоскость, перпендикулярную диагонали AC_1, равна 1. Найдите площадь ортогональной проекции куба на эту плоскость.

Решения задач и примерные критерии проверки

8 класс

1. Ответ: 1002; 3008.

Первый способ. Используя равенство модулей противоположных чисел, получим, что $|x-2005| = 1003$. Отсюда $x-2005 = \pm 1003$, то есть $x = 1002$ или $x = 3008$.

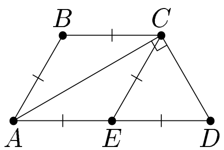
Второй способ. Если $x \geq 2005$, то $2(x - 2005) = 2006$, откуда $x = 3008$. Если $x < 2005$, то $2(2005 - x) = 2006$, откуда $x = 1002$.

$\pm$ *верный ответ с проверкой*

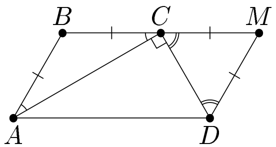
$\mp$ *только верный ответ*

$\mp$ *рассмотрен один случай и получен один ответ*

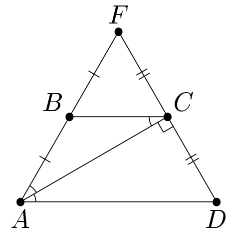
2. Первый способ. Пусть $ABCD$ — трапеция, $AB = BC = \dfrac{1}{2}AD$. Рассмотрим точку E — середину AD (см. рисунок). Тогда $ABCE$ — параллелограмм, так как AE и BC равны и параллельны. Поэтому $EC = AB = \dfrac{1}{2}AD$. Следовательно, в треугольнике ACD медиана CE равна половине стороны AD, к которой она проведена. Поэтому, $\angle ACD = 90°$.



Второй способ. Достроим трапецию $ABCD$ до параллелограмма $ABMD$ (см. рисунок). Тогда $\angle ABC + \angle CMD = 180°$. Поскольку треугольники ABC и CMD — равнобедренные, то $\angle BCA = 90° - \dfrac{\angle ABC}{2}$ и $\angle MCD = 90° - \dfrac{\angle CMD}{2}$, следовательно, $\angle BCA + \angle MCD = 180° - \dfrac{\angle ABC + \angle CMD}{2} = 90°$.



Третий способ. Достроим трапецию до треугольника AFD (см. рисунок). Поскольку $BC : AD = 1 : 2$, то и $BF : AF = FC : FD = 1 : 2$, следовательно, BC — средняя линия этого треугольника. Также $\angle CAD = \angle BCA = \angle BAC$, то есть, AC — биссектриса и медиана треугольника AFD, следовательно, она является и высотой.



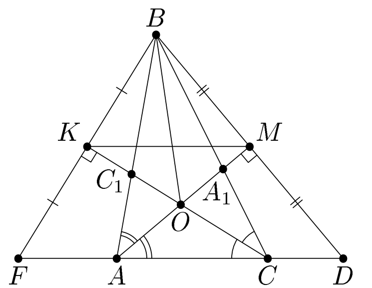
3. Ответ: 8 лет, 5 лет, 1 год.

Из условия задачи следует, что третьему ребенку 1 год. Пусть год назад первому и второму ребенку было x и y лет соответственно. В это же время суммарный возраст родителей был равен $45+2x$. По условию, суммарный возраст семьи в это время равняется 70 годам, следовательно, $70-45 = 3x+y$. Сейчас суммарный возраст детей — 14 лет, поэтому $(x + 1) + (y + 1) + 1 = 14$. Решая систему уравнений, получим $x = 7$, $y = 4$. Следовательно, первому ребенку сейчас 8 лет, второму — 5 лет.

$\pm$ *верно составлена система уравнений, но в процессе ее решения допущена арифметическая ошибка*

$\mp$ *только верный ответ или ответ, полученный из предположения о конкретных возрастах родителей*

4. Первый способ. Продолжим BM и BK до пересечения с AC в точках D и F соответственно (см. рисунок). Так как AM — биссектриса и высота треугольника ABD, то этот треугольник — равнобедренный. Следовательно, M — середина DB. Аналогично, K — середина BF. Следовательно, MK — средняя линия треугольника BDF, поэтому $MK \parallel DF$, то есть $MK \parallel AC$.



В приведенном способе решения не существенно, где располагаются точки K и M — вне треугольника ABC или внутри него.

Второй способ. Пусть O — точка пересечения биссектрисс треугольника ABC (см. рисунок), а углы A и C треугольника ABC равны

2α и 2β соответственно. Тогда $\angle BA_1M = \angle OA_1C = 180° - \alpha - 2\beta$, а $\angle A_1BM = 90° - (180° - \alpha - 2\beta) = \alpha + 2\beta - 90°$. Поскольку $\angle OBC = 90° - \alpha - \beta$, то $\angle OBM = \angle OBC + \angle A_1BM = 90° - \alpha - \beta + \alpha + 2\beta - 90° = \beta = \angle OCA$. Четырехугольник $KBMO$ — вписанный (так как сумма его противоположных углов равна $180°$), следовательно, $\angle OKM = \angle OBM = \beta$, следовательно, $KM \parallel AC$.

5. Ответ: 17.

Первый способ. Остаток при делении числа на 3 не превосходит 2, при делении на 6 — не превосходит 5, при делении на 9 — не превосходит 8. Так как сумма этих остатков равна $15 = 2 + 5 + 8$, они равны соответственно 2, 5 и 8.

Дальнейшее рассуждение можно проводить по-разному.

1) Так как задуманное число дает остаток 8 при делении на 9, то при делении на 18 оно может давать остаток 8 или остаток 17. В первом случае остаток при делении на 6 равен 2, что противоречит условию. Во втором случае условие задачи выполняется.

2) Задуманное число, увеличенное на 1, делится на 3, 6 и 9, следовательно, оно делится и на 18. Следовательно, задуманное Машей число при делении на 18 дает остаток 17.

Второй способ. По остатку от деления числа на 18 можно определить остатки от деления этого числа на 3, 6 и 9. Таким образом, для решения задачи достаточно перебрать все возможные остатки при делении на 18, и для каждого из них проверить сумму остатков при делении на 3, 6 и 9. Перебор можно оформить в виде таблицы:

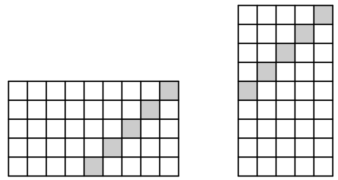
остаток при делении на 18	остаток при делении на 9	остаток при делении на 6	остаток при делении на 3
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	0
4	4	4	1
5	5	5	2
6	6	0	0
7	7	1	1
8	8	2	2
9	0	3	0
10	1	4	1
11	2	5	2
12	3	0	0
13	4	1	1
14	5	2	2
15	6	3	0
16	7	4	1
17	8	5	2

Из таблицы видно, что при делении на 18 может получиться только остаток 17.

+/2 *доказано только то, что остатки при делении на* 3, 6 *и* 9 *равны* 2, 5 *и* 8 *соответственно.*

∓ *верный ответ без объяснений*

6. Ответ: выигрывает Коля.



Каждым своим ходом Коля ставит фишку на одну из клеток отмеченной диагонали (см. рисунок). Сережа своим ходом ее оттуда убирает. Поскольку они ходят только вправо или вверх, то когда-нибудь игра закончится.

Задачу можно также решать с конца при помощи анализа выигрышных и проигрышных позиций.

+ *приведено верное рассуждение (достаточно рассмотреть один случай расположения прямоугольника).*

− *только верный ответ*

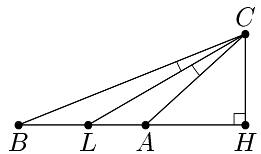
9 класс

1. Ответ: -2.

На области определения уравнение можно привести к виду $x + 1 + \dfrac{x}{x+1} = 1$. Умножим обе части уравнения на $x + 1$. После упрощения получим: $x^2 + 2x = 0$, то есть, $x = 0$ или $x = -2$. Корнем уравнения является только $x = -2$.

∓ *только верный ответ*

− *включение* 0 *во множество корней*



2. Пусть ABC — данный треугольник, $\angle B = \alpha$, $\angle A = 120° + \alpha$. Тогда $\angle C = 60° - 2\alpha$. Если CL — биссектриса данного треугольника, то

$\angle CLA = \angle LCB + \angle LBC = (30^\circ - \alpha) + \alpha = 30^\circ$. Пусть CH — высота треугольника ABC, тогда в треугольнике CLH катет CH, лежащий против угла в 30°, в два раза меньше, чем гипотенуза CL.

3. Ответ: первое число больше.

Первый способ. Рассмотрим разность между данными числами:

$$(\sqrt{2006} + \sqrt{2005 + \sqrt{2006}}) - (\sqrt{2005} + \sqrt{2006 + \sqrt{2005}}) =$$
$$= (\sqrt{2006} - \sqrt{2005}) - (\sqrt{2006 + \sqrt{2005}} - \sqrt{2005 + \sqrt{2006}}) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2006} + \sqrt{2005}} - \frac{1 + \sqrt{2005} - \sqrt{2006}}{\sqrt{2005 + \sqrt{2006}} + \sqrt{2006 + \sqrt{2005}}} > 0,$$

так как первая дробь больше второй. Действительно, числитель первой дроби больше числителя второй, а знаменатель — меньше.

Второй способ. Пусть $n = 2005$, тогда требуется сравнить следующие числа: $A = \sqrt{n+1} + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}$ и $B = \sqrt{n} + \sqrt{n + 1 + \sqrt{n}}$. Поскольку оба числа положительны, то достаточно сравнить их квадраты:

$$A^2 = 2n + 1 + \sqrt{n+1} + 2\sqrt{(n+1)n + (n+1)\sqrt{n+1}},$$
$$B^2 = 2n + 1 + \sqrt{n} + 2\sqrt{n(n+1) + n\sqrt{n}}.$$

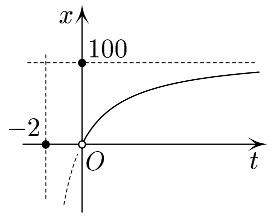
Поскольку $\left(\sqrt{(n+1)n + (n+1)\sqrt{n+1}}\right)^2 = n(n+1) + (n+1)\sqrt{n+1} > (n+1)n + n\sqrt{n} = (\sqrt{n(n+1) + n\sqrt{n}})^2$, то $\sqrt{(n+1)n + (n+1)\sqrt{n+1}} > \sqrt{n(n+1) + n\sqrt{n}}$. Также $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, следовательно, квадрат первого числа больше квадрата второго, то есть, $A > B$.

$-$ *только верный ответ*

4. Пусть корреспондент прав, и i-й шахматист выиграл n_i партий, и столько же свел вничью. Поскольку он сыграл 19 партий, то остальные $19 - 2n_i$ партий он проиграл. Так как партия, выигранная одним из участников, является проигранной для другого, то суммарное количество выигранных партий равно суммарному количеству проигранных: $n_1 + n_2 + \dots + n_{20} = (19 - 2n_1) + (19 - 2n_2) + \dots + (19 - 2n_{20})$. То есть, $3(n_1 + n_2 + \dots + n_{20}) = 19 \cdot 20$, откуда $n_1 + n_2 + \dots + n_{20} = \dfrac{19 \cdot 20}{3}$, но это невозможно, так как в левой части равенства стоит целое число, а в правой — не целое.

5. Через t часов с момента старта Гриша проедет $x(t)$ километров. Его средняя скорость составит $\dfrac{x(t)}{t}$ км/ч. Оставшиеся $100 - x(t)$ км Гриша, по мнению компьютера, будет двигаться с той же средней скоростью, то есть проедет этот участок за $\dfrac{100 - x(t)}{\frac{x(t)}{t}}$ ч, что по условию всегда составляет 2 ч. Тогда $\dfrac{100 - x(t)}{\frac{x(t)}{t}} = 2$, то есть, $x(t) = \dfrac{100t}{t+2}$, $t > 0$. Это и есть искомая зависимость.

Для построения графика преобразуем: $\dfrac{100t}{t+2} = \dfrac{100(t+2) - 200}{t+2} = 100 - \dfrac{200}{t+2}$, $t > 0$. Графиком функции $x(t) = 100 - \dfrac{200}{t+2}$, где $t > 0$, является часть гиперболы $x(t) = -\dfrac{200}{t}$, смещённой на 2 влево и на 100 вверх. Схематичный график зависимости пройденного расстояния от времени приведён на рисунке.



$\pm$ *верно найдена формула зависимости, но график не построен или построен с ошибками*

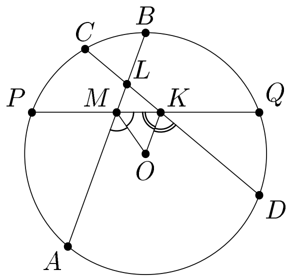
$\mp$ *график построен по точкам или из общих соображений, но формула не найдена*

6. Докажем вспомогательное утверждение: через точку внутри окружности, отличную от центра, можно провести не более двух хорд равной длины.

«Алгебраическое доказательство». Пусть через точку Z проходят три хорды длины a. Для каждой из них произведение отрезков, на которые их делит точка Z, постоянно и равно, допустим, m. Расмотрим одну из хорд. Пусть точка Z делит эту хорду на отрезки длины x_1 и x_2. Тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$, следовательно, числа x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - ax + m = 0$. Корнями того же уравнения будут длины отрезков, на которые точка Z разбивает остальные две хорды. Но у этого уравнения только два корня, а это означает, что каждая из хорд точкой Z разбивается в точности на отрезки длиной x_1 и x_2. Это значит, что окружность с центром Z радиуса x_1 имеет с данной окружностью по крайней мере три общие точки. Тогда она обязана с ней совпадать, но Z — не центр исходной окружности. Противоречие.

«Геометрическое доказательство». Равные хорды одной окружности опираются на равные дуги, поэтому они переводятся друг в друга поворотом вокруг центра O этой окружности. Следовательно, эти хорды равноудалены от точки O, поэтому, касаются некоторой окружности с центром O. Из данной точки к данной окружности можно провести не более двух касательных.

Теперь обратимся к нашей задаче (см. рисунок). Рассмотрим симметрию относительно прямой OM. При этой симметрии окружность перейдёт сама в себя, а хорда AB — в некоторую хорду той же длины, проходящую через точку M. Этой хордой, в силу доказанного утверждения, является хорда QP. Из симметрии следует равенство углов: $\angle OMA = \angle OMQ = \alpha$. Аналогично, рассматривая симметрию относительно OK, получим, что $\angle OKP = \angle OKD = \beta$. Тогда $\angle KOM = 180^\circ - \alpha - \beta$ и $\angle KLB = \angle LMK + \angle LKM = 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 360^\circ - 2(\alpha+\beta) = 2\angle KOM$, что и требовалось.



∓ *используется, но не доказано вспомогательное утверждение*

10 класс

1. Ответ: да, может.

Из условия следует, что температура по Фаренгейту выражается через температуру по Цельсию следующим образом: $T_F = 1{,}8T_C + 32^\circ$. Если $T_F = T_C = x$, то $x = 1{,}8x + 32$, то есть, $x = -40$.

Заметим, что корень уравнения можно было и не находить. Достаточно указать, что графики линейных функций с неравными угловыми коэффициентами пересекаются.

\+ *значение* -40 *найдено подбором и сделана проверка*

± *значение* -40 *указано, но нет обоснования или проверки*

2. Ответ: $\dfrac{p}{2}$.

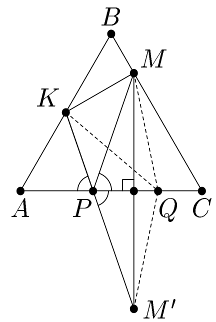
Пусть $f(x) = ax^2 + b_1x + c_1$; x_1, x_2 — его корни, $g(x) = ax^2 + b_2x + c_2$; x_3, x_4 — его корни. Тогда, по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b_1}{a}$; $x_3 + x_4 = -\dfrac{b_2}{a}$. По условию, $x_1+x_2+x_3+x_4 = -\dfrac{b_1+b_2}{a} = p$. Так как $f(x)+g(x) = 2ax^2 + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2)$, то сумма корней этого трехчлена равна: $-\dfrac{b_1+b_2}{2a} = \dfrac{p}{2}$.

∓ *ход решения верный, но допущена ошибка при применении теоремы Виета (или в формуле корней квадратного уравнения)*

∓ *только верный ответ*

3. Ответ: $AP : PC = 2 : 3$.

Так как отрезок KM зафиксирован, то периметр треугольника PKM наименьший из возможных тогда и только тогда, когда длина ломаной KPM — наименьшая из возможных (см. рисунок). Для того, чтобы построить такую точку P достаточно рассмотреть точку M', симметричную точке M относительно прямой AC. Тогда P — точка пересечения KM' и AC. Действительно, длина ломаной KPM равна $KP + PM = KP + PM' = KM'$. Для любой точки Q отрезка AC, отличной от P, $KQ + QM = KQ + QM' > KM'$. Так как $\angle MPC = \angle M'PC = \angle KPA$, то треугольники MPC и KPA подобны по двум углам. Следовательно, $AP : CP = AK : CM = \dfrac{1}{2} : \dfrac{3}{4} = 2 : 3$.



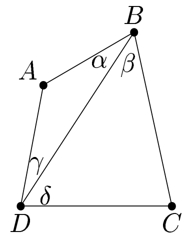
4. Ответ: p — любое нечетное простое число.

Пусть p — нечетное, то есть, $p = 2t+1$, где t — натуральное число. Тогда условие задачи выполняется для $m = t^2$.

Осталось рассмотреть случай $p = 2$. Пусть для некоторого m $\sqrt{m} + \sqrt{m+2}$ — натуральное число. Тогда $\sqrt{m+2} = y - \sqrt{m}$, то есть, $m + 2 = y^2 - 2y\sqrt{m} + m$. Следовательно, $\sqrt{m} = \frac{2-y^2}{2y}$, то есть, $\sqrt{m}$ — рациональное число. Тогда $\sqrt{m}$ — целое число. В этом случае $\sqrt{m+2}$ также должен быть целым числом. Но квадратов натуральных чисел, различающихся на 2, не существует.

+/2 *верный ответ и разобран случай нечетного* p

∓ *только верный ответ*



5. Ответ: параллелограмм или трапеция.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (см. рисунок). Проведем диагональ BD и введем обозначения: $\angle ABD = \alpha$; $\angle CBD = \beta$; $\angle ADB = \gamma$; $\angle CDB = \delta$. Тогда $\angle BAD = 180^\circ - (\alpha+\gamma)$, $\angle BCD = 180^\circ - (\beta+\delta)$.

Тогда, по условию $\sin(\alpha+\gamma) + \sin(\beta+\delta) = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\gamma+\delta)$. Применяя формулу преобразования суммы синусов в произведение, получаем: $2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)\times \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)$. Разделив обе части равенства на выражение, отличное от нуля, получим: $\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)$. Тогда по формуле разности косинусов $-2\sin\dfrac{\alpha-\delta}{2}\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}=0$. Следовательно, $\alpha=\delta$ или $\beta=\gamma$, это означает, что хотя бы две стороны данного четырехугольника параллельны.

$\mp$ *только верный ответ или верный ответ с проверкой*

6. Ответ: 3.

Первый способ. Выберем плоскость проекции так, чтобы она проходила через центр куба. Сечением куба этой плоскостью является правильный шестиугольник $MNKLPQ$ (см. рис. 1). Проекцией куба на эту плоскость является шестиугольник $A_1'B_1'B'C'D'D_1'$ (см. рис. 2), вершины которого являются центрами правильных треугольников, построенных на сторонах шестиугольника $MNKLPQ$, поэтому полученный шестиугольник также является правильным, причем вершины A и C_1 куба проектируются в его центр. Проекцией грани AA_1B_1B является параллелограмм $A'A_1'B_1'B'$. Его площадь в три раза меньше площади проекции куба.

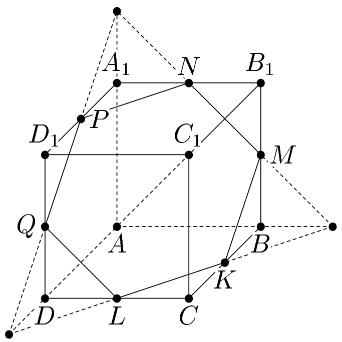


Рис. 1

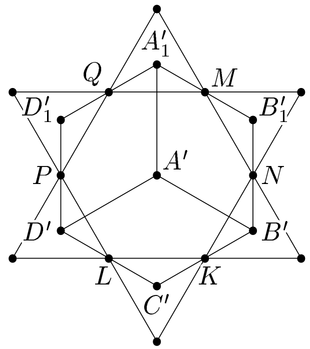


Рис. 2

Второй способ. Грани $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1 и CDD_1C_1 образуют одинаковый угол с диагональю AC_1 (см. рис. 1), поэтому они образуют равные углы и с плоскостью, перпендикулярной этой диагонали. Тогда проекции этих граней на плоскость, перпендикулярную диагонали AC_1, равны. Таким образом, проекция куба выглядит так, как показано на рисунке 3, следовательно, ее площадь равна 3.

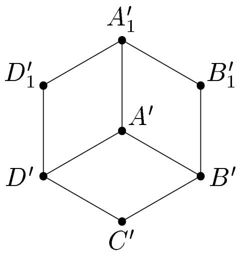


Рис. 3

$\mp$ *верный ответ*

Статистика решения задач

8 класс

1 задача

Округ	+	±	+/2	∓	–	0	ИТОГО
ЦАО	65	24	4	77	144	36	350
ЮАО	76	18	47	137	78	40	396
ЮВАО	91	20	13	73	131	29	357
ВАО	77	16	23	91	127	23	357
СВАО	27	5	2	28	48	17	127
ЗАО	62	20	22	64	156		324
СЗАО	72	21	30	47	73	33	276
ЮЗАО	123	12	57	92	318	5	607
САО	19	24	1	9	101		154
Зеленоград	18	15	6	5	13		57
ВСЕГО	630	175	205	623	1189	183	3005

2 задача

Округ	+	±	+/2	∓	–	0	ИТОГО
ЦАО	22	19	2	17	170	120	350
ЮАО	40	12	29	88	112	115	396
ЮВАО	28	13	13	60	188	55	357
ВАО	37	19	29	41	164	67	357
СВАО	13	3	6	8	56	41	127
ЗАО	43	10	10	40	221		324
СЗАО	33	12	4	21	101	105	276
ЮЗАО	111	18	42	100	332	4	607
САО	43	6	3	22	61		135
Зеленоград	16	6	8	9	18		57
ВСЕГО	386	118	146	406	1423	507	2986

3 задача

Округ	+	±	+/2	∓	–	0	ИТОГО
ЦАО	62	9	4	69	119	87	350
ЮАО	75	14	12	88	118	89	396
ЮВАО	78	16	5	64	147	47	357
ВАО	98	25	11	64	133	26	357
СВАО	32	4	6	22	43	20	127
ЗАО	64	15	10	55	180		324
СЗАО	82	27	1	34	73	59	276
ЮЗАО	72	29	17	46	419	24	607
САО	2				133		135
Зеленоград	18	10	4	5	20		57
ВСЕГО	583	149	70	447	1385	352	2986

4 задача

Округ	+	±	+/2	∓	–	0	ИТОГО
ЦАО	5	2	0	5	165	173	350
ЮАО	6	5	15	122	126	122	396
ЮВАО	3	1	4	24	231	94	357
ВАО	4	4	2	14	176	157	357

СВАО	0	0	0	0	83	44	127
ЗАО	13	1	4	18	288		324
СЗАО	4	2	2	4	87	177	276
ЮЗАО	9	12	9	11	474	92	607
САО		1	12	17	105		135
Зеленоград	4	0	1	4	48		57
ВСЕГО	48	28	49	219	1783	859	2986

5 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	27	9	11	59	143	101	350
ЮАО	15	6	31	134	115	95	396
ЮВАО	37	21	17	62	174	46	357
ВАО	27	19	24	57	183	47	357
СВАО	5	4	13	22	52	31	127
ЗАО	15	13	18	46	232		324
СЗАО	38	0	38	42	94	64	276
ЮЗАО	12	7	7	8	168	405	607
САО		1	18	17	99		135
Зеленоград	5	3	4	14	31		57
ВСЕГО	181	83	181	461	1291	789	2986

6 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	25	12	1	31	247	34	350
ЮАО	27	17	35	105	165	47	396
ЮВАО	22	12	7	36	234	46	357
ВАО	32	20	7	37	230	31	357
СВАО	7	3	2	8	95	12	127
ЗАО	21	7	3	29	264		324
СЗАО	35	0	0	0	203	38	276
ЮЗАО	18	4	4	11	169	401	607
САО	10	2	2	5	116		135
Зеленоград	11	2	6	9	29		57
ВСЕГО	208	79	67	271	1752	609	2986

9 класс

1 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	226	27	2	37	141	12	435
ЮАО	211	69	48	71	77	18	494
ЮВАО	165	48	28	53	119	34	447
ВАО	173	61	20	56	114	5	429
СВАО	71	3	2	2	110	0	188
ЗАО	94	34	25	24	135		312
СЗАО	132	8	1	13	111	3	268
ЮЗАО	162	92	7	21	208	3	493
САО	43	9		8	38		98
Зеленоград	32	11	6	3	0		52
ВСЕГО	1309	362	139	288	1053	75	3216

2 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	136	26	2	37	222	12	435
ЮАО	137	45	32	81	77	122	494
ЮВАО	114	21	9	46	161	96	447
ВАО	111	17	15	60	79	147	429
СВАО	44	3	0	2	91	48	188
ЗАО	63	5	10	33	201		312
СЗАО	72	9	9	22	51	105	268
ЮЗАО	159	105	3	62	163	1	493
САО	36	4	1	3	54		98
Зеленоград	30	3	1	3	15		52
ВСЕГО	902	238	82	349	1114	531	3216

3 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	32	13	4	50	271	65	435
ЮАО	26	14	30	192	190	42	494
ЮВАО	37	10	22	91	231	56	447
ВАО	18	18	16	129	246	2	429
СВАО	10	1	0	0	160	17	188
ЗАО	17	9	4	57	225		312
СЗАО	26	6	5	27	171	33	268
ЮЗАО	72	21	7	38	240	115	493
САО	3		1	1	93		98
Зеленоград	12	1	5	12	22		52
ВСЕГО	253	93	94	597	1849	330	3216

4 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	37	19	3	57	241	78	435
ЮАО	18	13	36	263	102	62	494
ЮВАО	36	23	20	109	180	79	447
ВАО	12	2	2	141	182	90	429
СВАО	5	3	5	7	140	28	188
ЗАО	5	6	2	73	226		312
СЗАО	8	2	7	24	193	34	268
ЮЗАО	18	7	5	12	242	209	493
САО	1	1		3	93		98
Зеленоград	5	0	3	8	36		52
ВСЕГО	145	76	83	697	1635	580	3216

5 задача

Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	14	10	0	23	233	155	435
ЮАО	5	20	5	173	167	124	494
ЮВАО	6	6	3	35	257	140	447
ВАО	1	2	2	34	278	112	429
СВАО	1	4	1	2	137	43	188
ЗАО	2	1	0	10	299		312

СЗАО	5	3	1	18	148	93	268
ЮЗАО	15	9	1	14	102	352	493
САО		2	1	2	93		98
Зеленоград	2	5	1	1	43		52
ВСЕГО	51	62	15	312	1757	1019	3216
6 задача							
Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	1	3	0	1	128	302	435
ЮАО	2	1	3	46	271	171	494
ЮВАО	2	0	3	17	225	200	447
ВАО	0	3	2	15	244	165	429
СВАО	3	0	1	0	90	94	188
ЗАО	1	0	0	4	307		312
СЗАО	0	0	2	5	56	205	268
ЮЗАО	0	3	0	4	11	475	493
САО					98		98
Зеленоград	2	0	0	4	46		52
ВСЕГО	11	10	11	96	1476	1612	3216

10 класс

1 задача							
Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	167	28	3	27	169	74	468
ЮАО	92	41	21	113	136	70	473
ЮВАО	148	23	7	51	132	64	425
ВАО	125	26	7	47	192	42	439
СВАО	86	11	4	27	60	25	213
ЗАО	73	15	7	27	172		294
СЗАО	93	29	8	35	106	13	284
ЮЗАО	88	47	9	11	300	17	472
САО	47	6		4	79		136
Зеленоград	30	4	1	19	19		73
ВСЕГО	949	230	67	361	1365	305	3277
2 задача							
Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	146	15	5	15	115	172	468
ЮАО	114	9	26	34	98	192	473
ЮВАО	133	16	12	45	105	114	425
ВАО	26	6	5	47	231	124	439
СВАО	57	4	9	26	37	80	213
ЗАО	79	8	11	20	176		294
СЗАО	93	5	13	24	41	108	284
ЮЗАО	86	33	6	10	308	29	472
САО	49	1	3	8	75		136
Зеленоград	39	1	1	8	24		73
ВСЕГО	822	98	91	237	1210	819	3277

3 задача							
Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	19	5	1	13	339	129	506
ЮАО	7	3	24	79	207	153	473
ЮВАО	11	6	8	47	261	92	425
ВАО	7	3	13	67	320	29	439
СВАО	3	0	1	26	125	58	213
ЗАО	5	0	5	37	247		294
СЗАО	3	1	9	20	184	67	284
ЮЗАО	11	6	1	7	152	295	472
САО	1	1		3	131		136
Зеленоград	1	2	5	16	49		73
ВСЕГО	68	27	67	315	2015	823	3277
4 задача							
Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	11	2	6	29	266	154	468
ЮАО	9	5	19	145	198	97	473
ЮВАО	20	13	18	58	204	112	425
ВАО	11	23	26	62	277	40	439
СВАО	3	3	4	27	100	76	213
ЗАО	7	5	13	29	240		294
СЗАО	4	5	13	59	120	83	284
ЮЗАО	26	17	9	12	202	206	472
САО			12	11	113		136
Зеленоград	9	3	12	17	32		73
ВСЕГО	100	76	132	449	1752	768	3277
5 задача							
Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	9	11	9	58	267	114	468
ЮАО	8	7	18	151	178	111	473
ЮВАО	12	19	30	143	119	102	425
ВАО	13	14	25	139	209	39	439
СВАО	1	0	4	71	96	41	213
ЗАО	4	7	6	68	209		294
СЗАО	3	0	10	92	138	41	284
ЮЗАО	7	9	2	7	14	433	472
САО			1	26	109		136
Зеленоград	3	0	1	27	42		73
ВСЕГО	60	67	106	782	1381	881	3277
6 задача							
Округ	+	±	+/2	∓	−	0	ИТОГО
ЦАО	6	7	2	14	138	301	468
ЮАО	1	0	7	23	207	235	473
ЮВАО	9	2	10	19	187	198	425
ВАО	32	5	11	20	343	28	439
СВАО	2	1	1	11	44	154	213

ЗАО	1	1	1	2	289		294
СЗАО	11	11	0	14	54	194	284
ЮЗАО	4	0	0	3	7	458	472
САО	6		3	3	124		136
Зеленоград	2	1	3	5	62		73
ВСЕГО	74	28	38	114	1455	1568	3277

11 класс

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + 4\sin^2 y - 4 = 0, \\ \cos x - 2\cos^2 y - 1 = 0. \end{cases}$

2. Остап Бендер и Киса Воробьянинов разделили между собой выручку от продажи слонов населению. Остап подумал: если бы я взял денег на 40 % больше, то доля Кисы уменьшилась бы на 60 %. А как изменилась бы доля Воробьянинова, если бы Остап взял себе денег на 50 % больше?

3. Найдите все такие функции $f(x)$, что $f(2x+1) = 4x^2 + 14x + 7$.

4. Найдите все такие натуральные числа, которые можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1.

5. Из точки, не лежащей в плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и три наклонные, проекции которых на данную плоскость равны a, b и c. Найдите длину перпендикуляра, если наклонные образуют с плоскостью углы, сумма которых равна $90°$.

6. Двое играют на доске 8×8 по следующим правилам. Каждый своим ходом закрашивает одну клетку, причем каждая клетка может быть закрашена только один раз. Проигрывает тот, после чьего хода образуется полностью закрашенный квадрат 2×2. Кто выиграет: начинающий или его партнер и как нужно играть, чтобы выиграть?

7. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$; $\angle A = \angle B = 20°$; $\angle C = 30°$. Продолжение стороны AD пересекает BC в точке M, а продолжение стороны CD пересекает AB в точке N. Найдите угол $\angle AMN$.

Решения задач и примерные критерии проверки

1. Ответ: $x = 0$, $y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Запишем второе уравнение в виде $\cos x = 2\cos^2 y + 1$. Тогда левая часть не превосходит единицы, а правая — не меньше единицы. Следовательно, равенство возможно тогда и только тогда, когда $\cos y = 0$ и $\cos x = 1$. Тогда $|\sin y| = 1$, и из первого уравнения следует, что $x = 0$.

$\mp$ *верный ход рассуждений, но допущена ошибка в решении тригонометрического уравнения*

$\mp$ *приведен верный ответ, но его обоснование ошибочно или отсутствует (в частности, вывод о том, что $x = 0$ сделан только на основании построенных графиков)*

2. Ответ: доля Воробьянинова уменьшилась бы на 75%.

Пусть Остап взял себе x рублей, а Киса взял себе y рублей, тогда, по условию, $0,4x = 0,6y$. Отсюда получим, что $0,5x = 0,75y$. Следовательно, если бы доля Остапа увеличилась на 50%, то доля Воробьянинова уменьшилась бы на 75%.

$\pm$ *верный ход рассуждений, но допущена арифметическая ошибка*

$\mp$ *без обоснований записана пропорция* $\frac{40}{60} = \frac{50}{x}$ *(либо пропорция, ей равносильная) и получен верный ответ*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$-$ *приведен верный ответ с неверным обоснованием, в том числе, когда неверно понято условие задачи*

3. Ответ: $f(x) = x^2 + 5x + 1$.

Пусть $t = 2x+1$, тогда $x = \frac{t-1}{2}$. Следовательно, $f(t) = 4\cdot\frac{(t-1)^2}{4} + 14\cdot\frac{t-1}{2} + 7 = (t-1)^2 + 7(t-1) + 7 = t^2 + 5t + 1$.

Возможно также решение, основанное на выделении квадрата двучлена в данном трехчлене (неявная замена переменной).

$\mp$ *верный ответ получен исходя из предположения, что $f(x)$ — квадратный трехчлен, которое не доказано*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

4. Ответ: все натуральные числа, кроме 1, 2, 3, 4 и 6.

Рассмотрим сначала нечетные числа. Очевидно, что числа 1 и 3 указанным способом представить нельзя. Пусть N — нечетное и $N \geq 5$. Тогда $N = 2k + 1 = k + (k+1)$, где k — натуральное и $k \geq 2$. Так как любые два последовательных натуральных числа взаимно просты, то все указанные N удовлетворяют условию.

Рассмотрим четные числа. Непосредственной проверкой убеждаемся, что числа 2, 4 и 6 нельзя представить в указанном виде. Остальные четные числа можно разбить на две группы: числа, кратные 4, то есть $N = 4k$, и числа, не кратные 4, то есть $N = 4k + 2$ (k — натуральное и $k \geq 2$). В первом случае: $N = 4k = (2k+1) + (2k-1)$, причем НОД$(2k+1; 2k-1) =$НОД$(2k-1; 2) = 1$. Во втором случае: $N = 4k+2 = (2k+3) + (2k-1)$, причем НОД$(2k+3; 2k-1) =$НОД$(2k-1; 4) = 1$.

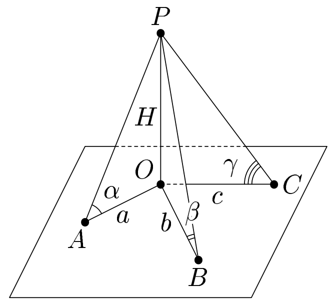
Для нечетных чисел, начиная с 5, возможно и другое представление, удовлетворяющее условию: при $k \geq 2$ $N = 2k+1 = 2 + (2k-1)$.

$\pm$ *верный ответ и верный ход рассуждений, но отсутствует доказательство того, что нечетные числа, отличающиеся на 2 или на 4, — взаимно простые*

$\pm$ *верно и полностью рассмотрены все общие случаи, но в ответе присутствуют какие-то из чисел 1, 2, 3, 4, 6.*

$\mp$ *доказано только для нечетных чисел*

$\mp$ *приведен только верный ответ*



5. Ответ: $\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$.

Пусть PO — перпендикуляр к данной плоскости; PA, PB и PC — данные наклонные (см. рисунок). Тогда $OA = a$; $OB = b$; $OC = c$. Введем также обозначения: $PO = H$; $\angle PAO = \alpha$; $\angle PBO = \beta$; $\angle PCO = \gamma$. По условию $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Из прямоугольных треугольников POA, POB и POC получим: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{\alpha}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{b}$; $\operatorname{tg}\gamma = \frac{H}{c}$. Кроме того, $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(90° - (\alpha+\beta)) = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$.

Подставив значение тангенсов, получим уравнение: $\frac{H}{c} = \frac{1 - \frac{H^2}{ab}}{\frac{H}{a} + \frac{H}{b}}$. Его решение: $H = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$.

$\pm$ *уравнение составлено верно, но при его решении допущена вычислительная ошибка, не повлиявшая на размерность ответа и на его симметричность относительно переменных a, b и c*

$\mp$ *уравнение составлено верно, но оно не решено или в его решении есть ошибки, которые привели несимметричному ответу или ответу другой размерности*

$-$ *приведен только верный ответ*

6. В авторском решении обнаружена ошибка. Решение задачи жюри неизвестно. Если вы считаете, что придумали решение этой задачи, присылайте его на адрес *okrug@mccme.ru*.

7. Ответ: $30°$.

Первый способ. Проведем отрезок AC, тогда ABC — равнобедренный треугольник с углом $80°$ при основании. Через точку M проведем прямую, параллельную AC, до пересечения со стороной AB в точке P (см. рисунок 1). Пусть отрезки AM и CP пересекаются в точке K. Так как $\angle KAC = 60°$, то треугольник KAC — равносторонний, тогда треугольник KPM — также равносторонний. В треугольнике ANC: $\angle ACN = \angle ACB - \angle DCB = 50°$, $\angle ANC = 180° - \angle CAB - \angle ACN = 50°$, поэтому, он равнобедренный. Следовательно, $AN = AC = AK$. Получим, что треугольник ANK — равнобедренный с углом $20°$ при вершине A, поэтому, $\angle MKN = 100° = \angle MPN$. Таким образом, в тупоугольных треугольниках MKN и MPN: сторона MN — общая, $MK = MP$ и равны тупые углы MKN и MPN. Следовательно, эти треугольники равны, тогда $\angle KMN = \angle PMN = 0,5\angle PMA = 30°$.

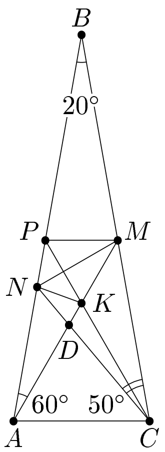


Рис. 1

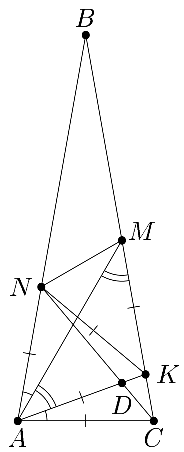


Рис. 2

Второй способ. Проведя отрезок AC, рассмотрим треугольник ANC. Так как $\angle ACN = \angle ACB - \angle DCB = 50°$ и $\angle ANC = 180° - \angle CAB - \angle ACN = 50°$, то $AN = AC$. Проведем луч AK так, чтобы угол CAK был равен $20°$ (см. рис. 2). Тогда $\angle ACK = \angle AKC = 80°$, следовательно, треугольник AKC — равнобедренный ($AK = AC$).

Рассмотрим треугольник ANK. В этом треугольнике $\angle NAK = 60°$ и $AN = AK$, следовательно, он — равносторонний, то есть, $AN = AK = NK$. $\angle AMK$ — внешний для треугольника AMB, поэтому $\angle AMK = 40° = \angle MAK$. Следовательно, треугольник АКМ - также равнобедренный ($AK = MK$). Поскольку $MK = AK = NK$, то треугольник NKM — равнобедренный, тогда $\angle KNM = \angle NMK = (180° - \angle NKM) = 70°$. Следовательно, $\angle AMN = 70° - 40° = 30°$.

Третий способ. Докажем подобие треугольников CBN и MAN (см. рис. 2). Так как $\angle CBN = \angle MAN = 20°$, то достаточно проверить, что $\dfrac{CB}{MA} = \dfrac{BN}{AN}$. Пусть $AB = BC = a$, тогда из равнобедренного треугольника ABC получим, что $AC = 2a\sin 10°$, а из равнобедренного треугольника AMB получим, что $MA = \dfrac{a}{2\cos 20°}$. Треугольник ANC — также равнобедренный ($\angle ACN = \angle ACB - \angle DCB = 50°$, $\angle ANC = 180° - \angle CAB - \angle ACN = 50°$), поэтому, $AN = AC$, тогда $BN = AB - AN = a(1 - 2\sin 10°)$. Таким образом, проверяемое равенство равносильно равенству $\dfrac{a}{\dfrac{a}{2\cos 20°}} = \dfrac{a(1-2\sin 10°)}{2a \cdot \sin 10°}$, которое, в свою очередь, равносильно равенству $4\sin 10° \cos 20° = 1 - 2\sin 10°$. Полученное тригонометрическое тождество можно доказать различными способами. Например, заменим его на равносильное, умножив обе части на $\cos 10°$. Получим: $\sin 40° = \cos 10° - \sin 20°$. Это равенство выполняется, так как $\sin 40° + \sin 20° = 2\sin 30° \cos 10° = \cos 10°$.

Из доказанного подобия треугольников CBN и MAN следует, что $\angle AMN = \angle BCN = 30°$.

Четвертый способ. Проведем отрезок AC, тогда ABC — равнобедренный треугольник с углом $20°$ при вершине. Рассмотрим правильный восемнадцатиугольник $A_1A_2\ldots A_{18}$, вписанный в окружность с центром B. Пусть $A \equiv A_{18}$ и $C \equiv A_{17}$, тогда рассматриваемый треугольник ABC совпадет с треугольником $A_{18}BA_{17}$ (см. рис. 3).

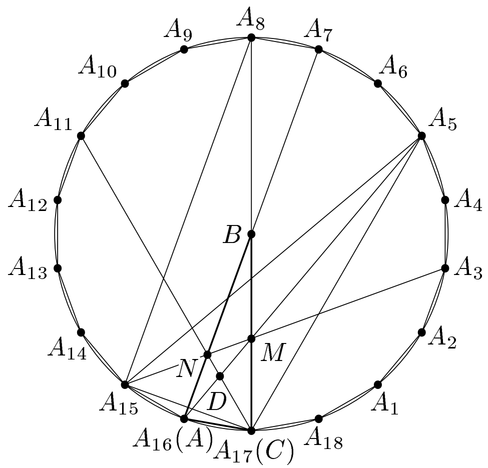


Рис. 3

Так как $\angle A_5CA_8 = \dfrac{\cup A_5A_8}{2} = 30°$, то диагональ $A_{17}A_5$ пересекает AB в данной точке N. Так как диагонали $A_{17}A_5$ и A_1A_{13} симметричны относительно диаметра $A_{18}A_9$, то A_1A_{13} проходит через точку N. Так как $\angle A_9AA_{11} = \dfrac{\cup A_9A_{11}}{2} = 20°$, то диагональ $A_{11}A_{18}$ пересекает

BC в данной точке M. Докажем, что через точку M проходит также и диагональ A_1A_{13}. Рассмотрим треугольник $A_1A_{11}A_{17}$ и используем теорему Чевы в форме синусов:

$$\frac{\sin\angle A_1A_{11}A_{18}}{\sin\angle A_{11}A_1A_{13}}\cdot\frac{\sin\angle A_8A_{17}A_{11}}{\sin\angle A_{17}A_{11}A_{18}}\cdot\frac{\sin\angle A_{13}A_1A_{17}}{\sin\angle A_1A_{17}A_8}=$$
$$=\frac{\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}=\frac{\sin 30^\circ\cdot\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=1.$$

Следовательно, диагонали A_1A_{13}, A_8A_{17} и $A_{11}A_{18}$ пересекаются в одной точке. Тогда $\angle AMN=\angle A_{18}MA_1=\dfrac{\cup A_1A_{18}+\cup A_{11}A_{13}}{2}=30^\circ$.

+/2 *на основании метрических теорем получен ответ, выражающий искомый угол через обратные тригонометрические функции громоздких тригонометрических выражений и ошибок при этом не допущено*

∓ *верный ответ получен исходя из верно указанных, но не доказанных фактов (например, подобие треугольников)*

− *приведен только верный ответ или приведено «вычислительное» решение, содержащее ошибку*

Статистика решения задач

Всего участников: 5381 человек.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
+!	1	0	0	0	0	0	1
+	1036	2140	1210	59	627	0	27
+.	11	17	32	0	5	0	0
±	88	139	145	38	34	0	5
+/2	0	1	0	0	1	0	61
∓	825	606	498	348	92	2	32
−.	10	3	2	1	2	2	2
−	2239	1727	1704	1892	2128	3898	3203
0	1171	748	1790	3043	2492	1479	2050

n	Количество человек, решивших ровно n задач	Диплом
6	8	I
5	56	I
4	270	II
3	461	III
2	756	
1	1310	
0	2520	

Московская региональная олимпиада школьников Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)

1. При раскопках древнего города нашли глиняные таблички с надписями на неизвестном языке. Мнения исследователей о дате написания и содержании табличек разделились. Один предположил, что это рецепты блюд правителя второго тысячелетия до нашей эры. Другой — что это долговые расписки, но, заведомо, не второго тысячелетия до нашей эры. Третий же утверждал, что это поэма первого тысячелетия до нашей эры. Спустя несколько лет удалось расшифровать записи, и оказалось, что каждый исследователь угадал точно либо только содержание табличек, либо только их возраст. Что было на табличках, и каков их возраст?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=-2,\\ x^2+y^2+z^2=4,\\ x^3+y^3+z^3=4.\end{cases}$$

3. Плоскость окрашена в два цвета — белый и черный, причем имеются и точки белого, и точки черного цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии 2 друг от друга.

4. В первенстве по хоккею участвуют 7 команд. Каждые две из них должны сыграть между собой один матч. Докажите, что в любой момент состязаний найдутся две команды, сыгравшие одинаковое количество матчей.

5. Считая известной формулу для объема пирамиды $V=\dfrac{1}{3}Sh$ (S — площадь основания пирамиды, h — длина высоты пирамиды), найти отношение объемов пирамид с вершинами A_1; A_2; B; C и A_2; A_3; B; C, где A_1; A_2; A_3 лежат на одной прямой, и $A_1A_2=A_2A_3$.

6. Докажите, что $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}-\dots-\dfrac{1}{1998}+\dfrac{1}{2000}<\dfrac{1}{5}$.

Ответы и краткие указания к решениям

1. Ответ: на табличках первого тысячелетия были рецепты блюд для правителя.

Пусть таблички второго тысячелетия, тогда второй и третий исследователи ошиблись в дате, т. е. правильно указали содержание, но они противоречат друг другу. Таким образом, содержание правильно указал первый исследователь.

2. Ответ: $(-2; 0; 0)$, $(0; -2; 0)$, $(0; 0; -2)$.

Возможен следующий путь решения: возведем в куб первое уравнение и вычтем из него третье. Разложив полученное выражение на множители и приравняв каждый множитель к нулю, получим: $(x+y)(x+z)(y+z) = 0$. Если $x + y = 0$, то $z = -2$ и из второго уравнения получаем, что $x = y = 0$.

3. Можно рассмотреть равносторонний треугольник со стороной 2. Две из его вершин удовлетворяют условию.

4. Предположив противное, получим, что есть команды, сыгравшие 0 игр, 1 игру, 2 игры, 3 игры, 4 игры, 5 игр и 6 игр. Но, если нашлась команда, не сыгравшая ни одной игры, то никакая другая команда не смогла бы сыграть 6 игр.

5. Две пирамиды имеют одну и ту же высоту. Кроме того, основания пирамид имеют одну и ту же высоту и одинаковую длину основания.

6. Сгруппируем второе слагаемое с третьим, четвертое с пятым и т. д., заключим их в скобки. Вследствие убывания абсолютных величин членов суммы получим, что каждая скобка отрицательна. Вычислим сумму первого слагаемого и двух скобок. Итоговая сумма заведомо меньше этого числа.

Московская региональная олимпиада школьников МПГУ им. В. И. Ленина

1. Из бочки вина перелили ложку вина в (неполный) стакан с чаем. А потом такую же ложку получившейся смеси чая и вина перелили из стакана в бочку. Чего стало больше: чая в бочке или вина в стакане?

2. Найдите сумму углов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 семиугольной звездочки (рис. 1).

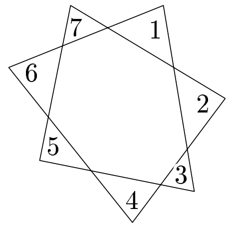


Рис. 1

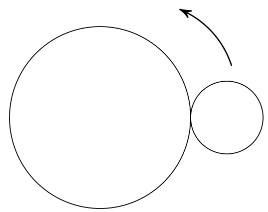


Рис. 2

3. Нарисуйте траекторию движения точки расположенной на окружности, радиуса r, катящейся по другой окружности, радиуса R, если $r = \frac{2}{5}R$ (рис. 2).

4. Найдите остаток от деления числа $10^{10} + 10^{10^2} + \dots + 10^{10^{10}}$ на 7.

5. Найдите все целые решения уравнения $x^2 - 5xy + 4y^2 = 7$.

6. Найдите все значения параметра а, при которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

имеет только одно решение.

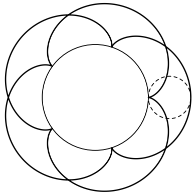
7. Докажите, что у любого многогранника имеются, по крайней мере, две грани с одинаковым числом ребер. Приведите пример многогранника, у которого нет трех граней с одинаковым числом ребер.

Ответы и краткие указания к решениям

1. Ответ: одинаково.

2. Ответ: 540°.

3. Ответ: см. рисунок.



4. Ответ: остаток равен 5.

Заметим, что 1000 при делении на 7 равноостаточно с числом -1. Поэтому 10^{10} равноостаточно с числом -10. Последующие слагаемые также равноостаточны с числом -10 и, значит, вся сумма равноостаточна с числом -100, которое, в свою очередь, равноостаточно с числом 5. Таким образом, искомый остаток равен 5.

5. Ответ: $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(9,2)$, $(-9,-2)$.

6. Ответ: $a=0$.

Заметим, что если пара (x,y) является решением, то и пара $(-x,y)$ также является решением. Поэтому, если данная система имеет единственное решение, то оно должно иметь вид $(0,y)$. Подставив $(0,y)$ в систему, получим $\begin{cases} 1=y+a, \\ y^2=1 \end{cases}$. Отсюда следует, что $y=1$ или $y=-1$, и соответственно $a=0$ или $a=2$. Рассмотрим сначала случай $a=0$. Исходная система перепишется в виде $\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$ Легко видеть, что пара $(0,1)$ является решением. Покажем, что других решений нет. Действительно, из второго уравнения следует, что $|x|\le 1$. Поэтому $x^2\le|x|$ и, следовательно, y, выражаемое из первого уравнения, больше или равно 1. Но из второго уравнения следует, что $|y|\le 1$. Это возможно только в случае $y=1$ и $x=0$. Пусть теперь $a=2$. В этом случае имеем систему $\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+2, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что пары $(1,0)$ и $(-1,0)$ являются ее решениями. Таким образом, исходная система имеет единственное решение только в случае $a=0$.

7. Рассмотрим грань с наибольшим числом ребер n. Ее окружают n граней с числом ребер 3, 4, ..., n. Среди них обязательно найдутся две грани с одинаковым числом ребер. Примером многогранника, у которого нет трех граней с одинаковым числом ребер, является треугольная призма с одним отрезанным углом. У него две треугольные, две четырехугольные и две пятиугольные грани.

Московская региональная олимпиада школьников «МАТИ» — РГТУ им. К.Э. Циолковского[2]

1. В книжный магазин привезли несколько одинаковых коробок с книгами, которые переложили на полки. Получилось девять полных полок и еще две книги осталось. Когда книги продали, привезли другое количество таких же коробок с книгами, которые переложили на полки. Получилось шесть полных полок, а на седьмой полке осталось место для одной книги. Сколько книг было в одной коробке?

2. Найти углы треугольника α, β и γ, удовлетворяющие уравнению $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\dfrac{3}{2}$.

3. При каких значениях b неравенство $x^2+b\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ выполняется для всех допустимых значений x ?

4. Найти наименьшее натуральное число n, при котором уравнение $\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dots+\dfrac{1}{(x+2(n-1))(x+2n)}=\dfrac{1}{40}$ разрешимо в целых числах.

5. Из районных команд была создана сборная команда города по гандболу из 7 игроков. Будем считать, что два спортсмена сборной знакомы друг с другом, если они ранее какое-то время выступали за одну команду. На первом тренировочном сборе выяснилось, что среди этих семи игроков двое знакомы с пятью игроками, двое знакомы с тремя игроками, один знаком с двумя игроками и двое знакомы с одним игроком. Найти наибольшее количество спортсменов сборной города, любые два из которых не являются знакомыми.

6. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найти отношение площади треугольника MBN к площади четырехугольника $AMNC$, если в $AMNC$ можно вписать окружность, и его диагональ AN – это диаметр, а диагональ MC видна из центра описанной окружности под углом $120°$.

Ответы:

1. Ответ: 23.

2. Ответ: $\alpha=\beta=\gamma=60°$.

3. Ответ: $b\leqslant\dfrac{3-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$.

4. Ответ: $n=5$; $x_1=10$; $x_2=-20$.

5. Ответ: 4 спортсмена.

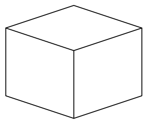
6. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

[2]Один из типовых вариантов

Московская региональная олимпиада школьников
Академия ФСБ[3]

1. (2 балла) В арифметической прогрессии, все члены которой являются целыми числами, второй член равен 4, а сумма квадратов третьего и четвертого членов меньше 16. Чему может быть равен первый член прогрессии ?

2. (3 балла) Можно ли расположить числа от 1 до 7 в вершинах фигуры так, что все числа в вершинах попарно различны, а сумма чисел в вершинах каждого из трех четырехугольников равна 14?



3. (3 балла) Решить неравенство $\dfrac{8}{9}\dfrac{3^x}{3^x-2^x} \le 1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

4. (4 балла) Четырехугольник $PQRT$ вписан в окружность. Длины его сторон PQ и RT равны соответственно 9 и 6, а длины диагоналей PR и QT равны соответственно 8 и 10. Найти отношение площадей треугольника PQR и четырехугольника $PQRT$.

5. (5 баллов) Решить уравнение $x-|x-|x+1||=\sqrt{5-|2-|6-x||}$.

6. (5 баллов) Решить уравнение $\dfrac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3 x}{2-\cos^{-2}x}=\dfrac{4+2\cos\dfrac{6x}{5}}{\cos 3x+\cos x}$.

7. (5 баллов) Решить уравнение $x^5+(x-1)^5+\dots+(x-2006)^5=0$.

[3]Один из типовых вариантов

Рекомендации по проведению и организации проверки работ учащихся на окружном туре 69 Московской математической олимпиады

1. Окружной тур олимпиады для учащихся 5–11 классов проводится **по единым текстам**, составленным методической комиссией. Тексты заданий для учащихся, а также тексты с их решениями и ориентировочными критериями проверки методисты окружных научно-методических центров получают в МИОО (кроме 11 классов). Они организуют размножение этих материалов в количестве, необходимом для проведения олимпиады.этих материалов в количестве, необходимом для проведения олимпиады.

2. Этот и последующий (городской) туры олимпиады являются открытыми, то есть, в них может принять участие любой желающий школьник. Информация о проведении городского тура олимпиады размещена на листочках с текстами заданий для учащихся. На любом этапе олимпиады каждый школьник имеет право писать либо работу, составленную для его параллели, либо (по желанию школьника) — для более старшей.

3.1. Окружной тур для учащихся **5–7** классов проводится **21 января, в субботу**, причем каждая школа может организовать для своих учащихся проведение олимпиады на своей территории, получив необходимые материалы у методистов ОНМЦ.

3.2. На решение задач участникам олимпиады **5–7** классов рекомендуется выделить **1,5 — 2 часа** (90 — 120 минут).

3.3. Проверка работ учащихся 5–7 классов осуществляется силами школьных учителей математики. Школьное жюри самостоятельно определяет победителей и призеров по каждой из параллелей (в рамках своей школы), организует разбор задач, показ работ и награждение победителей и призеров.

3.4. Отчет о проведении тура для 5–7 классов сдается методистам ОНМЦ в установленные ими сроки.

Проведение этого этапа олимпиады можно также организовать по «кустам» (объединению нескольких школ).

4.1. Окружной тур для учащихся **8–11** классов проводится **29 января, в воскресенье**. Для его проведения в каждом учебном округе выделяется одна или несколько базовых школ и приглашаются учителя для дежурства в аудиториях во время проведения олимпиады. Инструкция для дежурного по аудитории прилагается.

4.2. Учащиеся **8–11** классов пишут работу **4 часа** (240 минут).

4.3. Для размещения учащихся по аудиториям рекомендуется заранее в достаточном количестве заготовить карточки участников. Для этого необходимо заблаговременно собрать сведения от школ по количеству предполагаемых участников в каждой из параллелей. Примерный образец карточки участника:

Кабинет №
Школа №
Класс
Фамилия
Имя

Номер кабинета, номер школы и класс проставляется организаторами олимпиады, остальное — заполняется школьниками. В этом случае, организаторы олимпиады будут иметь возможность распределить по разным кабинетам учащихся, представляющих одну и ту же школу. Если нет возможности рассадить школьников за парты по одному, то имеет смысл в каждом кабинете проводить олимпиаду для двух параллелей, посадив за одну парту учащихся различных параллелей.

4.4. Для ответов на вопросы по условиям задач рекомендуется выделить по одному **консультанту** в каждом из мест проведения олимпиады из числа ответственных членов окружного жюри. В случае возникновения затруднений по комментированию условий задач можно обратиться к представителю методической комиссии, который будет дежурить в день проведения олимпиады, по телефону 241-12-37. В некоторых округах представители методической комиссии будут участвовать в проведении олимпиады.

5.1. Проведение олимпиады **для 11 классов** организуют методисты округов (в одной из школ округа) и некоторые ВУЗЫ. Полный список мест проведения (и условий регистрации, где она необходима) публикуется на сайте **www.mccme.ru** и **www.mioo.ru**

5.2. Участники олимпиады **для 11 классов** должны иметь с собой паспорт. Работы на олимпиаде 11 классов оформляются в соответствии со специальными правилами.

5.3. Варианты и инструкции по оформлению работ привезёт ответственный представитель городского оргкомитета в день проведения олимпиады. Он же увезёт все работы учеников **11 класса** для централизованной проверки сразу же по окончании олимпиады.

6.1. Для **проверки работ учащихся 8–10 классов** в каждом из округов формируется жюри из числа учителей математики, которым руководит председатель (член методической комиссии олимпиады или методист ОНМЦ). Рекомендуется также привлекать к работе студентов математических факультетов ВУЗов.

6.2. Для проверки работ школьников в каждой из параллелей организуется отдельная комиссия. Работу каждой комиссии координирует учитель — старший по параллели, назначаемый председателем жюри. Старший по параллели является консультантом во всех трудных случаях, возникающих при проверке работ, и арбитром — в спорных.

6.3. Перед началом проверки в каждой параллели проводится сбор всех проверяющих, на котором осуществляется разбор задач и инструктаж по проверке работ учащихся. Учителя, отсутствовавшие на разборе и инструктаже, могут допускаться к работе только в качестве ассистентов или для оказания технической помощи.

Решения задач олимпиады и критерии проверки работ, разработанные методической комиссией, могут раздаваться проверяющим не ранее, чем все участники олимпиады закончат работу!

6.4. Работы учащихся распределяются координатором между проверяющими для *первой проверки*. При *первой проверке* каждая работа проверяется одним учителем, который отмечает ошибки в тексте работы, делает, если это необходимо, письменные комментарии и оценивает каждое задание по следующей системе:

«+» — задание решено верно и полностью;

«±» — верное решение, содержащее несущественные неточности или пробелы в рассуждениях (не рассмотрен какой-то из случаев, отсутствует строгое доказательство использованного неочевидного утверждения и нет ссылки на его известность, и т. п.);

«+/2» — в работе ученика имеется значительная часть верного решения либо верное решение с существенными пробелами или ошибками в рассуждениях;

«∓» — неверное решение, содержащее здравые идеи, или решение отсутствует, но есть верные утверждения, начато «движение» в верном направлении, либо «голый» правильный ответ в заданиях, требующих обоснования;

«−» — полностью неверное решение;

0 — запись решения и ответа отсутствует.

5.5. Оценки, приведенные выше, проверяющий выносит на титульный лист работы на строчку первой проверки и разборчиво указывает свою фамилию. Следует учесть, что решения задач, распространенные методической комиссией, написаны *для учителей*. Учащиеся (как и учителя), возможно, смогут найти и другие верные решения. Приведенные критерии не претендуют на полноту и могут быть изменены по решению комиссии, осуществляющей проверку работ. При проверке работ просьба обращать основное внимание на сущность решения, на понимание школьниками математической стороны задачи, а не на детали оформления. Не допускается снижение оценок за исправления, помарки, неразборчивость почерка, цвет использованной пасты, отсутствие полей и т. п. Грамотно сославшись на факт, школьник имеет право пользоваться им без доказательства («по принципу Дирихле получим...», «используя теорему косинусов,...» и т. д.).

Внимание! Осуществление *первой проверки* двумя учителями возможно, *но не заменяет второй проверки.*

6.6. После *первой проверки* работы сдаются координатору. Он раздает протоколы и работы для *второй проверки* таким образом, чтобы эта проверка осуществлялась не тем учителем, который проводил *первую проверку.* При *второй проверке*: в случае, если второй проверяющий согласен с оценкой решения задачи, выставленной первым, то он заполняет соответствующую строчку на титульном листе работы; если же не согласен, то оба проверяющих совместно обсуждают оценку решения этой задачи и второй проверяющий выставляет согласованную оценку (и свою фамилию в соответствующей графе). Если же двум проверяющим не удалось согласовать оценку, то окончательное решение принимает координатор. Второй проверяющий заносит результаты проверки в протокол. Проверенные работы вместе с протоколом сдаются координатору.

6.7. Возможна (но не обязательна!) система перевода оценок в баллы, которая осуществляется при *второй проверке.* В этом случае, второй проверяющий переводит оценки в баллы, которые заносит в соответствующую строчку на титульном листе и в протокол вместо оценок. Тогда, после того, как второй проверяющий заполнил свою строчку на титульном листе и в протоколе, он подсчитывает сумму баллов, набранную учащимся, которую также проставляет на титульный лист и в протокол. Эта система особо удобна для дальнейшей статистической компьютерной обработки результатов.

6.8. Перевод оценки *первой проверки* в баллы осуществляется для каждой задачи по следующей схеме:

«$+$» — 4 балла;

«$\pm$» — 3 балла;

«$+/2$» — 2 балла;

«$\mp$» — 1 балл;

«$-$» или «0» — 0 баллов.

6.9. Работы учащихся с суммой не менее **9 баллов** (или имеющие **не менее трех «верхних» плюсов**) отсортировываются координатором и передаются председателю жюри для осуществления *третьей проверки.* Для ее проведения создается отдельная комиссия из числа наиболее опытных проверяющих.

Первые две проверки рекомендуется проводить в день олимпиады. Третья, а, при необходимости, и *четвертая* проверки могут осуществляться как в день олимпиады, так и в последующие дни.

7.1. Критерии успешности выступления и определения призовых мест устанавливаются окружным жюри в зависимости от общих результатов олимпиады в данном округе. По различным параллелям эти критерии могут быть разными. (Например, на одной из олимпиад прошлых лет второе место присуждалось в 8 классе — за четыре задачи, а в 10 классе — за две с половиной).

Обращаем внимание на то, что в рамках одной параллели школьник, получивший большее количество баллов, не может получить меньшую награду! (Школьники, получившие одинаковые оценки по задачам не могут быть награждены по разному!)

7.2. Окончательное решение по списку победителей и призеров окружного тура олимпиады выносится окружным жюри. Критерии определения призеров и результаты выступления всех школьников должны быть доведены до сведения всех школ, чьи ученики были участниками олимпиады. Окружные методические центры самостоятельно определяют порядок награждения победителей и призеров окружного тура олимпиады.

7.3. Ответственный за проведение олимпиады в округе присылает **отчет** по электронной почте по адресу okrug@mccme.ru либо сдает его (в электронном виде вместе с бумажной копией) в Центральный Оргкомитет по адресу Большой Власьевский переулок, дом 11, комната 303 (для А. Д. Блинкова, Е. С. Горской или В. Д. Арнольда) **до 22 февраля 2006 года**.

6.4. Отчет представляет собой заполненные электронные таблицы, шаблоны которых методисты ОНМЦ получают вместе с другими материалами олимпиады.

6.5. После статистической обработки представленных отчетов все материалы окружного тура будут доступны для всеобщего обозрения.

Благодарим за работу!

Кабинет №_____

ИНСТРУКЦИЯ ДЛЯ ДЕЖУРНОГО УЧИТЕЛЯ НА ОКРУЖНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ (8–10 классы)

1. Внимательно прочитайте, пожалуйста, настоящую инструкцию. От правильности Ваших действий зависит успешность проведения олимпиады.

2. Ваша работа начинается в 9.50 и заканчивается после того, как все работы учащихся из вашего кабинета сданы Вами в оргкомитет олимпиады.

3. В вашем кабинете выполняют задания олимпиады учащиеся разных параллелей. Проверьте по карточкам участников, все ли они пришли в нужный кабинет, и рассадите их так, чтобы все ученики одной из параллелей сидели на первом варианте, а другой параллели – на втором. Если ученики одной школы оказались сидящими за одной партой или друг за другом, то рассадите их!

4. Напишите на доске образец титульного листа работ учащихся:

69 Московская математическая олимпиада

Окружной тур 29 февраля 2006 года

Работа ученика (цы) ____ класса школы №_

Фамилия, Имя

Домашний адрес (с индексом), телефон

Фамилия, имя, отчество *своего* учителя математики.

Кабинет №_

Результаты проверки:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	Фамилия, И. О. проверяющего

5. Задания в каждый кабинет принесут организаторы олимпиады. Раздайте задания и напишите на доске время начала работы. Продолжительность работы — 4 часа (240 минут) с момента раздачи заданий.

6. Никаких пояснений по содержанию заданий Вы давать не должны; это сделают, в случае необходимости, консультанты, назначенные организаторами олимпиады.

7. К 11.00. соберите карточки участников, разложив их по параллелям.

8. Работа выполняется без перемен. Дисциплина — как на экзаменах! Запрещены любые контакты между учащимися и использование литературы. Мобильные телефоны школьников должны быть выключены. Выход учеников из класса, если это необходимо, по одному. Все листы ученика в этом случае кладутся на учительский стол. Школьник, закончивший работу досрочно, сдает работу и отправляется на первый этаж. Проверка этих работ в Ваши обязанности не входит.

9. Тексты заданий школьники имеют право не сдавать.

10. После того как собраны все работы учащихся, распределите их по параллелям. Внимание! Количество собранных работ должно точно соответствовать количеству учеников, работавших в вашем кабинете, то есть, ученик сдает подписанную работу независимо от количества решенных им задач.

11. Собранные работы, карточки участников, оставшиеся тексты заданий и настоящую инструкцию Вы сдаете в оргкомитет.

Дежурные учителя:

Фамилия	Имя	Отчество	№ школы

Благодарим за работу!

Оглавление