7 класс

1. У двузначного числа первая цифра вдвое больше второй. Если к этому числу прибавить квадрат его первой цифры, то получится квадрат некоторого целого числа. Найдите исходное двузначное число.

Ответ: 21.

Первая цифра в два раза больше второй только у следующих двузначных чисел: 21, 42, 63 и 84. Проверкой убеждаемся, что условию задачи удовлетворяет только число 21.

$+$ *верный ответ с обоснованием*

$\mp$ *верный ответ*

2. Петя тратит $\frac{1}{3}$ своего времени на игру в футбол, $\frac{1}{5}$ — на учебу в школе, $\frac{1}{6}$ — на просмотр кинофильмов, $\frac{1}{70}$ — на решение олимпиадных задач, и $\frac{1}{3}$ — на сон. Можно ли так жить?

Ответ: нет, так жить нельзя.

Поскольку $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}>\frac{1}{3}$, то, сумма данных дробей $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{70}+\frac{1}{3}>1$, что противоречит здравому смыслу.

$+$ *верный ответ с обоснованием*

$-$ *только верный ответ*

3. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой из них находилось ровно 3 из отмеченных точек.

Ответ: например, см. рис. 7.3.

Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной 1. Построим на стороне AB во внешнюю сторону и на стороне CD во внутреннюю сторону равносторонние треугольники ABE и CDF. Точки A, B, C, D, E и F — искомые.

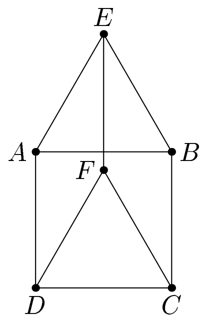

Рис. 7.3

4. В магическом квадрате суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и на обеих диагоналях равны. Можно ли составить магический квадрат 3×3 из первых девяти простых чисел? *Число называется простым, если у него ровно два делителя — единица и само число.*

Ответ: нельзя.

Пусть первые девять простых чисел как-то расставлены в клетках квадрата. Среди них есть ровно одно четное число — 2. Сумма чисел в строке, содержащей двойку, — четная (сумма двух нечетных и одного четного чисел). В строках, не содержащих двойку, сумма чисел нечетна, следовательно суммы чисел в каких-то двух строках разные и получить магический квадрат нельзя.

$-$ *только верный ответ*

5. На физическом кружке учитель поставил следующий эксперимент. Он разложил на чашечные весы 16 гирек массами 1, 2, 3, …, 16 грамм так, что одна из чаш перевесила. Пятнадцать учеников по очереди выходили из класса и забирали с собой по одной гирьке, причем после выхода каждого ученика весы меняли свое положение и перевешивала противоположная чаша весов. Какая гирька могла остаться на весах?

Ответ: на весах осталась гиря массой 1 грамм.

Поскольку в каждый момент времени массы на чашах весов отличались хотя бы на 1 грамм, то для того, чтобы перевесила противоположная чаша, необходимо забрать гирю массой не менее двух грамм. Следовательно, выходя из класса, ни один ученик не мог забрать гирю массой 1 грамм.

Заметим, что описанная в условии ситуация действительно возможна. Например, учитель положил на одну чашу весов все гири с нечетными массами, а на другую чашу — гири с четными массами. А каждый ученик, выходя из класса, забирал гирю с наибольшей массой.

$\mp$ *только верный ответ или верный ответ с примером*