8 класс

1. Решите уравнение: $|x - 2005| + |2005 - x| = 2006$.

Ответ: 1002; 3008.

Первый способ. Используя равенство модулей противоположных чисел, получим, что $|x - 2005| = 1003$. Отсюда $x - 2005 = \pm 1003$, то есть $x = 1002$ или $x = 3008$.

Второй способ. Если $x \geqslant 2005$, то $2(x - 2005) = 2006$, откуда $x = 3008$.
Если $x < 2005$, то $2(2005 - x) = 2006$, откуда $x = 1002$.

$\pm$ *верный ответ с проверкой*
$\mp$ *только верный ответ*
$\mp$ *рассмотрен один случай и получен один ответ*

2. Боковая сторона трапеции равна одному из оснований и вдвое меньше другого. Докажите, что другая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей трапеции.

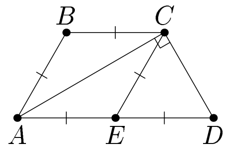

Рис. 8.2.1

Первый способ. Пусть $ABCD$ — трапеция, $AB = BC = \dfrac{1}{2}AD$. Рассмотрим точку E — середину AD (см. рис. 8.2.1). Тогда $ABCE$ — параллелограмм, так как AE и BC равны и параллельны. Поэтому $EC = AB = \dfrac{1}{2}AD$. Следовательно, в треугольнике ACD медиана CE равна половине стороны AD, к которой она проведена. Поэтому, $\angle ACD = 90°$.

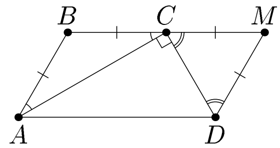

Рис. 8.2.2

Второй способ. Достроим трапецию $ABCD$ до параллелограмма $ABMD$ (см. рис. 8.2.2). Тогда $\angle ABC + \angle CMD = 180°$. Поскольку треугольники ABC и CMD — равнобедренные, то $\angle BCA = 90° - \dfrac{\angle ABC}{2}$ и $\angle MCD = 90° - \dfrac{\angle CMD}{2}$, следовательно, $\angle BCA + \angle MCD = 180° - \dfrac{\angle ABC + \angle CMD}{2} = 90°$.

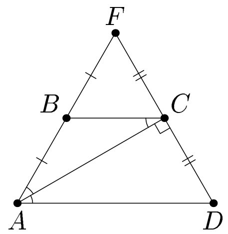

Рис. 8.2.3

Третий способ. Достроим трапецию до треугольника AFD (см. рис. 8.2.3). Поскольку $BC : AD = 1 : 2$, то и $BF : AF = FC : FD = 1 : 2$, следовательно, BC — средняя линия этого треугольника. Также $\angle CAD = \angle BCA = \angle BAC$, то есть, AC — биссектриса и медиана треугольника AFD, следовательно, она является и высотой.

3. На вопрос о возрасте его детей математик ответил: «У нас с женой трое детей. Когда родился наш первенец, суммарный возраст членов семьи был равен 45 годам, год назад, когда родился третий ребёнок — 70 годам, а сейчас суммарный возраст детей — 14 лет». Сколько лет каждому ребенку, если известно, что у всех членов семьи дни рождения в один и тот же день?

Ответ: 8 лет, 5 лет, 1 год.

Из условия задачи следует, что третьему ребенку 1 год. Пусть год назад первому и второму ребенку было x и y лет соответственно. В это же время суммарный возраст родителей был равен $45 + 2x$. По условию, суммарный возраст семьи в это время равняется 70 годам, следовательно, $70 - 45 = 3x + y$. Сейчас суммарный возраст детей — 14 лет, поэтому $(x + 1) + (y + 1) + 1 = 14$. Решая систему уравнений, получим $x = 7$, $y = 4$. Следовательно, первому ребенку сейчас 8 лет, второму — 5 лет.

$\pm$ *верно составлена система уравнений, но в процессе ее решения допущена арифметическая ошибка*
$\mp$ *только верный ответ или ответ, полученный из предположения о конкретных возрастах родителей*

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1. M и K — основания перпендикуляров, опущенных из точки B на прямые AA_1 и CC_1. Докажите, что $MK \parallel AC$.

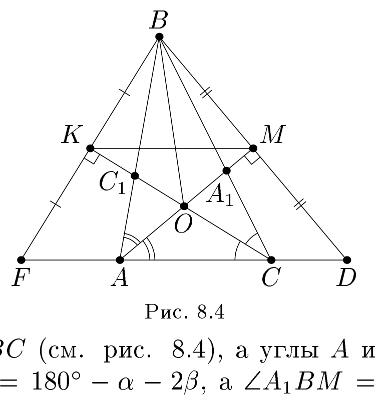

Рис. 8.4

Первый способ. Продолжим BM и BK до пересечения с AC в точках D и F соответственно (см. рис. 8.4). Так как AM — биссектриса и высота треугольника ABD, то этот треугольник — равнобедренный. Следовательно, M — середина DB. Аналогично, K — середина BF. Следовательно, MK — средняя линия треугольника BDF, поэтому $MK \parallel DF$, то есть $MK \parallel AC$.

В приведенном способе решения не существенно, где располагаются точки K и M — вне треугольника ABC или внутри него.

Второй способ. Пусть O — точка пересечения биссектрисс треугольника ABC (см. рис. 8.4), а углы A и C треугольника ABC равны 2α и 2β соответственно. Тогда $\angle BA_1M = \angle OA_1C = 180° - \alpha - 2\beta$, а $\angle A_1BM = 90° - (180° - \alpha - 2\beta) = \alpha + 2\beta - 90°$. Поскольку $\angle OBC = 90° - \alpha - \beta$, то $\angle OBM = \angle OBC + \angle A_1BM = 90° - \alpha - \beta + \alpha + 2\beta - 90° = \beta = \angle OCA$. Четырехугольник $KBMO$ — вписанный (так как сумма его противоположных углов равна $180°$), следовательно, $\angle OKM = \angle OBM = \beta$, следовательно, $KM \parallel AC$.

5. Маша задумала натуральное число и нашла его остатки при делении на 3, 6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.

Ответ: 17.

Первый способ. Остаток при делении числа на 3 не превосходит 2, при делении на 6 — не превосходит 5, при делении на 9 — не превосходит 8. Так как сумма этих остатков равна $15 = 2 + 5 + 8$, они равны соответственно 2, 5 и 8.

Дальнейшее рассуждение можно проводить по-разному.

1) Так как задуманное число дает остаток 8 при делении на 9, то при делении на 18 оно может давать остаток 8 или остаток 17. В первом случае остаток при делении на 6 равен 2, что противоречит условию. Во втором случае условие задачи выполняется.

2) Задуманное число, увеличенное на 1, делится на 3, 6 и 9, следовательно, оно делится и на 18. Следовательно, задуманное Машей число при делении на 18 дает остаток 17.

Второй способ. По остатку от деления числа на 18 можно определить остатки от деления этого числа на 3, 6 и 9. Таким образом, для решения задачи достаточно перебрать все возможные остатки при делении на 18, и для каждого из них проверить сумму остатков при делении на 3, 6 и 9. Перебор можно оформить в виде таблицы:

остаток при делении на 18	остаток при делении на 9	остаток при делении на 6	остаток при делении на 3
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	0
4	4	4	1
5	5	5	2
6	6	0	0
7	7	1	1
8	8	2	2
9	0	3	0
10	1	4	1
11	2	5	2
12	3	0	0
13	4	1	1
14	5	2	2
15	6	3	0
16	7	4	1
17	8	5	2

Из таблицы видно, что при делении на 18 может получиться только остаток 17.

$+/2$ *доказано только то, что остатки при делении на* 3, 6 *и* 9 *равны* 2, 5 *и* 8 *соответственно.*

$\mp$ *верный ответ без объяснений*

6. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 5×9. В левом нижнем углу стоит фишка. Коля и Серёжа по очереди передвигают ее на любое количество клеток либо вправо, либо вверх. Первым ходит Коля. Выигрывает тот, кто поставит фишку в правый верхний угол. Кто выигрывает при правильной игре?

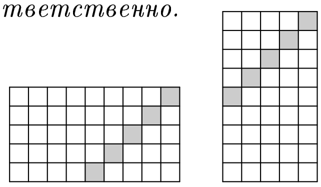

Рис. 8.6

Ответ: выигрывает Коля.

Каждым своим ходом Коля ставит фишку на одну из клеток отмеченной диагонали (см. рис. 8.6). Сережа своим ходом ее оттуда убирает. Поскольку они ходят только вправо или вверх, то когда-нибудь игра закончится.

Задачу можно также решать с конца при помощи анализа выигрышных и проигрышных позиций.

$+$ *приведено верное рассуждение (достаточно рассмотреть один случай расположения прямоугольника).*

$-$ *только верный ответ*