9 класс

1. Решите уравнение $x+\frac{x}{x}+\frac{x}{x+\frac{x}{x}}=1$.

Ответ: -2.

На области определения уравнение можно привести к виду $x+1+\frac{x}{x+1}=1$. Умножим обе части уравнения на $x+1$. После упрощения получим: $x^2+2x=0$, то есть, $x=0$ или $x=-2$. Корнем уравнения является только $x=-2$.

$\mp$ *только верный ответ*

$-$ *включение* 0 *во множество корней*

2. Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса треугольника, проведённая из вершины третьего угла, вдвое длиннее, чем высота, проведенная из той же вершины.

Пусть ABC — данный треугольник, $\angle B=\alpha$, $\angle A=120^\circ+\alpha$. Тогда $\angle C==60^\circ-2\alpha$. Если CL — биссектриса данного треугольника, то $\angle CLA=\angle LCB++\angle LBC=(30^\circ-\alpha)+\alpha=30^\circ$. Пусть CH — высота треугольника ABC, тогда в треугольнике CLH катет CH, лежащий против угла в 30°, в два раза меньше, чем гипотенуза CL.

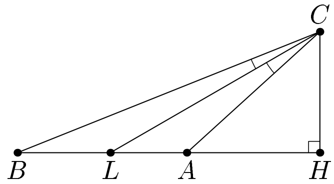


Рис. 9.2

3. Сравните без помощи калькулятора числа: $\sqrt{2006}+\sqrt{2005+\sqrt{2006}}$ и $\sqrt{2005}+\sqrt{2006+\sqrt{2005}}$.

Ответ: первое число больше.

Первый способ. Рассмотрим разность между данными числами:

$$(\sqrt{2006}+\sqrt{2005+\sqrt{2006}})-(\sqrt{2005}+\sqrt{2006+\sqrt{2005}})=(\sqrt{2006}-\sqrt{2005})-(\sqrt{2006+\sqrt{2005}}-\sqrt{2005+\sqrt{2006}})=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2006}+\sqrt{2005}}-\frac{1+\sqrt{2005}-\sqrt{2006}}{\sqrt{2005+\sqrt{2006}}+\sqrt{2006+\sqrt{2005}}}>0,$$

так как первая дробь больше второй. Действительно, числитель первой дроби больше числителя второй, а знаменатель — меньше.

Второй способ. Пусть $n=2005$, тогда требуется сравнить следующие числа: $A=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}$ и $B=\sqrt{n}+\sqrt{n+1+\sqrt{n}}$. Поскольку оба числа положительны, то достаточно сравнить их квадраты:

$$A^2=2n+1+\sqrt{n+1}+2\sqrt{(n+1)n+(n+1)\sqrt{n+1}},$$
$$B^2=2n+1+\sqrt{n}+2\sqrt{n(n+1)+n\sqrt{n}}.$$

Поскольку $\left(\sqrt{(n+1)n+(n+1)\sqrt{n+1}}\right)^2=n(n+1)+(n+1)\sqrt{n+1}>(n+1)n+n\sqrt{n}=\left(\sqrt{n(n+1)+n\sqrt{n}}\right)^2$, то и $\sqrt{(n+1)n+(n+1)\sqrt{n+1}}>\sqrt{n(n+1)+(n)\sqrt{n}}$. Также $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$, следовательно, квадрат первого числа больше квадрата второго, то есть, $A>B$.

$-$ *только верный ответ*

4. 20 шахматистов сыграли турнир в один круг (каждый сыграл с каждым по одной партии). Корреспондент «Спортивной газеты» написал в своей заметке, что каждый участник этого турнира выиграл столько же партий, сколько и свёл вничью. Докажите, что корреспондент ошибся.

Пусть корреспондент прав, и i-ый шахматист выиграл n_i партий, и столько же свел вничью. Поскольку он сыграл 19 партий, то остальные $19-2n_i$ партий он проиграл. Так как партия, выигранная одним из участников, является проигранной для другого, то суммарное количество выигранных партий равно суммарному количеству проигранных: $n_1+n_2+\dots+n_{20}=(19-2n_1)+(19-2n_2)+\dots+(19-2n_{20})$. То есть, $3(n_1+n_2+\dots+n_{20})=19\cdot 20$, откуда $n_1+n_2+\dots+n_{20}=\frac{19\cdot 20}{3}$, но это невозможно, так как в левой части равенства стоит целое число, а в правой — не целое.

5. Гриша едет по маршруту длиной 100 км. В его автомобиле имеется компьютер, дающий прогноз времени, оставшегося до прибытия в конечный пункт. Это время рассчитывается исходя из предположения, что средняя скорость автомобиля на оставшемся участке пути будет такой же, как и на уже пройденном. Сразу же после старта компьютер показал «2 часа» и всё дальнейшее время показывал именно это число (компьютер исправен). Найдите $x(t)$ — зависимость пути, который проехал Гриша, от времени с момента старта. Постройте график этой зависимости.

Через t часов с момента старта Гриша проедет $x(t)$ километров. Его средняя скорость составит $\frac{x(t)}{t}$ км/ч. Оставшиеся $100-x(t)$ км Гриша, по мнению компьютера, будет двигаться с той же средней скоростью, то есть проедет этот участок за $\dfrac{100-x(t)}{\frac{x(t)}{t}}$ ч, что по условию всегда составляет 2 ч. Тогда $\dfrac{100-x(t)}{\dfrac{x(t)}{t}}=2$, то есть, $x(t)=\dfrac{100t}{t+2}$, $t>0$. Это и есть искомая зависимость.

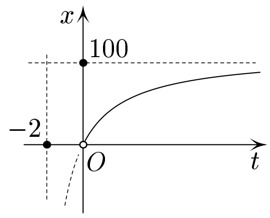


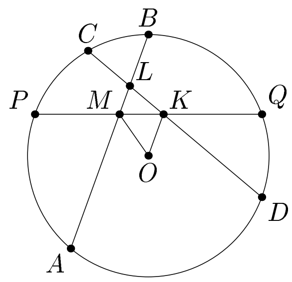
Рис. 9.5

Для построения графика преобразуем: $\dfrac{100t}{t+2}=\dfrac{100(t+2)-200}{t+2}=100-\dfrac{200}{t+2}$, $t>0$. Графиком функции $x(t)=100-\dfrac{200}{t+2}$, где $t>0$, является часть гиперболы $x(t)=-\dfrac{200}{t}$, смещённой на 2 влево и на 100 вверх. Схематичный график зависимости пройденного расстояния от времени приведён на рис. 9.5.

$\pm$ *верно найдена формула зависимости, но график не построен или построен с ошибками*

$\mp$ *график построен по точкам или из общих соображений, но формула не найдена*

6. В окружности с центром O проведены три равные хорды AB, CD и PQ (см. рисунок). Докажите, что $\angle MOK=\dfrac{1}{2}\angle BLD$.



Докажем вспомогательное утверждение: через точку внутри окружности, отличную от центра, можно провести не более двух хорд равной длины.

«Алгебраическое доказательство». Пусть через точку Z проходят три хорды длины a. Для каждой из них произведение отрезков, на которые их делит точка Z, постоянно и равно, допустим, m. Расмотрим одну из хорд. Пусть точка Z делит эту хорду на отрезки длины x_1 и x_2. Тогда $\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_1\cdot x_2=m \end{cases}$, следовательно, числа x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-ax+m=0$. Корнями того же уравнения будут длины отрезков, на которые точка Z разбивает остальные две хорды. Но у этого уравнения только два корня, а это означает, что каждая из хорд точкой Z разбивается в точности на отрезки длиной x_1 и x_2. Это значит, что окружность с центром Z радиуса x_1 имеет с данной окружностью по крайней мере три общие точки. Тогда она обязана с ней совпадать, но Z — не центр исходной окружности. Противоречие.

«Геометрическое доказательство». Равные хорды одной окружности опираются на равные дуги, поэтому они переводятся друг в друга поворотом вокруг центра O этой окружности. Следовательно, эти хорды равноудалены от точки O, поэтому, касаются некоторой окружности с центром O. Из данной точки к данной окружности можно провести не более двух касательных.

Теперь обратимся к нашей задаче (см. рис. 9.6). Рассмотрим симметрию относительно прямой OM. При этой симметрии окружность перейдёт сама в себя, а хорда AB — в некоторую хорду той же длины, проходящую через точку M. Этой хордой, в силу доказанного утверждения, является хорда QP. Из симметрии следует равенство углов: $\angle OMA=\angle OMQ=\alpha$. Аналогично, рассматривая симметрию относительно OK, получим, что $\angle OKP=\angle OKD=\beta$. Тогда $\angle KOM=180^\circ-\alpha-\beta$ и $\angle KLB=\angle LMK+\angle LKM=180^\circ-2\alpha+180^\circ-2\beta=360^\circ-2(\alpha+\beta)=2\angle KOM$, что и требовалось.

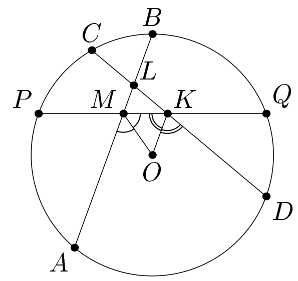


Рис. 9.6

$\mp$ *используется, но не доказано вспомогательное утверждение*