10 класс

1. Один градус шкалы Цельсия равен $1,8$ градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов как по Цельсию, так и по Фаренгейту?

Ответ: да, может.

Из условия следует, что температура по Фаренгейту выражается через температуру по Цельсию следующим образом: $T_F = 1,8T_C + 32^\circ$. Если $T_F = T_C = x$, то $x = 1,8x + 32$, то есть, $x = -40$.

Заметим, что корень уравнения можно было и не находить. Достаточно указать, что графики линейных функций с неравными угловыми коэффициентами пересекаются.

$+$ *значение -40 найдено подбором и сделана проверка*

$\pm$ *значение -40 указано, но нет обоснования или проверки*

2. Даны квадратные трехчлены f и g с одинаковыми старшими коэффициентами. Известно, что сумма четырех корней этих трехчленов равна p. Найдите сумму корней трехчлена $f + g$, если известно, что он имеет два корня.

Ответ: $\dfrac{p}{2}$.

Пусть $f(x) = ax^2 + b_1x + c_1$; x_1, x_2 — его корни, $g(x) = ax^2 + b_2x + c_2$; x_3, x_4 — его корни. Тогда, по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b_1}{a}$; $x_3 + x_4 = -\dfrac{b_2}{a}$. По условию, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b_1 + b_2}{a} = p$. Так как $f(x) + g(x) = 2ax^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$, то сумма корней этого трехчлена равна: $-\dfrac{b_1 + b_2}{2a} = \dfrac{p}{2}$.

$\mp$ *ход решения верный, но допущена ошибка при применении теоремы Виета (или в формуле корней квадратного уравнения)*

$\mp$ *только верный ответ*

3. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка K — середина стороны AB, точка M лежит на стороне BC, причем $BM : MC = 1 : 3$. На стороне AC выбрана точка P так, что периметр треугольника PKM — наименьший из возможных. В каком отношении точка P делит сторону AC?

Ответ: $AP : PC = 2 : 3$.

Так как отрезок KM зафиксирован, то периметр треугольника PKM наименьший из возможных тогда и только тогда, когда длина ломаной KPM — наименьшая из возможных (см. рис. 9.3.). Для того, чтобы построить такую точку P достаточно рассмотреть точку M', симметричную точке M относительно прямой AC. Тогда P — точка пересечения KM' и AC. Действительно, длина ломаной KPM равна $KP+PM = KP+PM' = KM'$. Для любой точки Q отрезка AC, отличной от P, $KQ + QM = KQ + QM' > KM'$. Так как $\angle MPC = \angle M'PC = \angle KPA$, то треугольники MPC и KPA подобны по двум углам. Следовательно, $AP : CP = AK : CM = \dfrac{1}{2} : \dfrac{3}{4} = 2 : 3$.

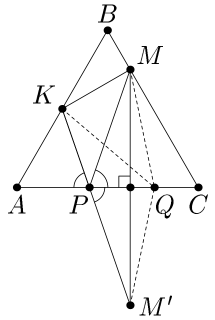

Рис. 10.3

4. Найдите все простые числа p, для каждого из которых существует натуральное число m такое, что $\sqrt{m} + \sqrt{m+p}$ — также натуральное число.

Ответ: p — любое нечетное простое число.

Пусть p — нечетное, то есть, $p = 2t + 1$, где t — натуральное число. Тогда условие задачи выполняется для $m = t^2$.

Осталось рассмотреть случай $p = 2$. Пусть для некоторого m $\sqrt{m} + \sqrt{m+2}$ — натуральное число. Тогда $\sqrt{m+2} = y - \sqrt{m}$, то есть, $m + 2 = y^2 - 2y\sqrt{m} + m$. Следовательно, $\sqrt{m} = \frac{2-y^2}{2y}$, то есть, $\sqrt{m}$ — рациональное число. Тогда $\sqrt{m}$ — целое число. В этом случае $\sqrt{m+2}$ также должен быть целым числом. Но квадратов натуральных чисел, различающихся на 2, не существует.

$+/2$ *верный ответ и разобран случай нечетного p*

$\mp$ *только верный ответ*

5. Укажите все выпуклые четырехугольники, у которых суммы синусов противолежащих углов равны.

Ответ: параллелограмм или трапеция.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 9.5). Проведем диагональ BD и введем обозначения: $\angle ABD = \alpha$; $\angle CBD = \beta$; $\angle ADB = \gamma$; $\angle CDB = \delta$. Тогда $\angle BAD = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$, $\angle BCD = 180^\circ - (\beta + \delta)$.

Тогда, по условию $\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\beta+\delta) = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\gamma+\delta)$. Применяя формулу преобразования суммы синусов в произведение, получаем: $2\sin\Big(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\Big)\cdot\cos\Big(\dfrac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{2}\Big) = 2\sin\Big(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\Big)\cos\Big(\dfrac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\Big)$. Разделив обе части равенства на выражение, отличное от нуля, получим: $\cos\Big(\dfrac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{2}\Big) = \cos\Big(\dfrac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\Big)$. Тогда по формуле разности косинусов $-2\sin\dfrac{\alpha-\delta}{2}\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2} = 0$. Следовательно, $\alpha = \delta$ или $\beta = \gamma$, это означает, что хотя бы две стороны данного четырехугольника параллельны.

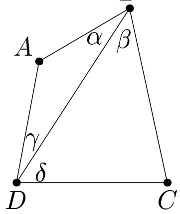

Рис. 10.5

$\mp$ *только верный ответ или верный ответ с проверкой*

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь ортогональной проекции грани AA_1B_1B на плоскость, перпендикулярную диагонали AC_1, равна 1. Найдите площадь ортогональной проекции куба на эту плоскость.

Ответ: 3.

Первый способ. Выберем плоскость проекции так, чтобы она проходила через центр куба. Сечением куба этой плоскостью является правильный шестиугольник $MNKLPQ$ (см. рис. 10.6.1). Проекцией куба на эту плоскость является шестиугольник $A_1'B_1'B'C'D'D_1'$ (см. рис. 10.6.2), вершины которого являются центрами правильных треугольников, построенных на сторонах шестиугольника $MNKLPQ$, поэтому полученный шестиугольник также является правильным, причем вершины A и C_1 куба проектируются в его центр. Проекцией грани AA_1B_1B является параллелограмм $A'A_1'B_1'B'$. Его площадь в три раза меньше площади проекции куба.

Второй способ. Грани $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1 и CDD_1C_1 образуют одинаковый угол с диагональю AC_1 (см. рис. 10.6.1), поэтому они образуют равные углы и с плоскостью, перпендикулярной этой диагонали. Тогда проекции этих граней на плоскость, перпендикулярную диагонали AC_1, равны. Таким образом, проекция куба выглядит так, как показано на рисунке 10.6.3, следовательно, ее площадь равна 3.

$\mp$ *верный ответ*

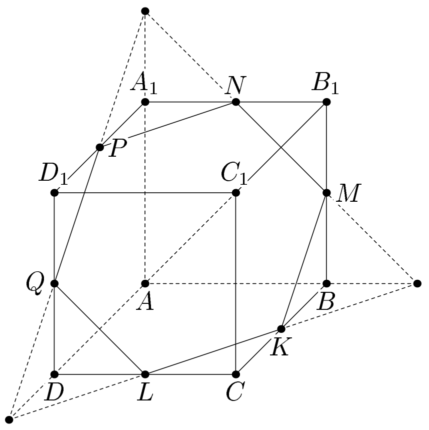

Рис. 10.6.1

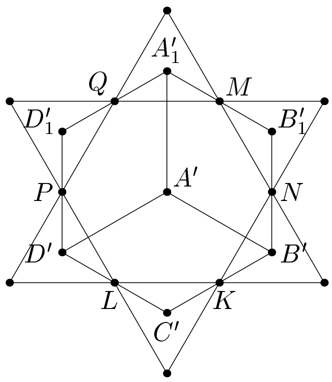

Рис. 10.6.2

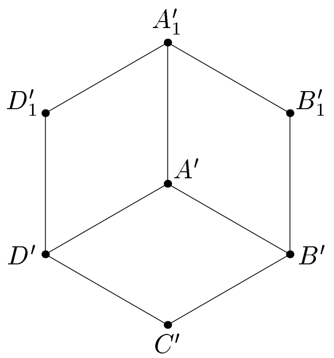

Рис. 10.6.3