Динамика стандартного отображения Чирикова

Д.В.Трещев

Я хочу рассказать о некоторых проблемах теории гамильтоновых систем. Гамильтоновы системы — это дифференциальные уравнения специального вида. Но мы рассмотрим их дискретный вариант, который представляют (в простейшей ситуации) двумерные отображения, сохраняющие площадь. Обсуждать я буду только одно отображение — стандартное отображение Чирикова, на примере которого удобно продемонстрировать основные достижения и проблемы.

Сначала немного истории. Б. В. Чириков — новосибирский физик, в конце 50-х годов заинтересовавшийся проблемой неустойчивости электронных пучков в магнитных ловушках. Следуя обычной физической идеологии, вместо того, чтобы пытаться описать явление во всех деталях, он предложил простейшую модель, ухватывающую суть происходящего. Такой моделью оказалось отображение T_ε цилиндра

$$\mathcal{Z} = \{(x, y) : x \bmod 2\pi \text{ — угловая координата}\}$$

на себя, сопоставляющее точке $(x, y) \in \mathcal{Z}$ точку $T_\varepsilon(x, y) = (X, Y) \in \mathcal{Z}$, где

$$X = x + y + \varepsilon \sin x, \quad Y = y + \varepsilon \sin x.$$

Здесь ε — вещественный параметр, от значения которого, как мы увидим далее, зависит степень хаотичности динамики. Цилиндр $\mathcal{Z}$ называется фазовым пространством рассматриваемой динамической системы.

Динамикой в данном случае называют свойства траекторий, то есть последовательностей точек $(x_k, y_k) \in \mathcal{Z}$ таких, что для любого целого k

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = T_\varepsilon(x_k, y_k).$$

В настоящее время отображение T_ε считается одной из концептуально важнейших моделей в гамильтоновой динамике с двумя степенями свободы. Основная причина состоит в том, что формулы, задающие систему очень просты, тогда как все основные динамические эффекты, встречающиеся в более общих системах этого типа, есть и здесь.

Далее мне захочется рисовать картинки. При этом удобно развернуть цилиндр на плоскость Oxy. Из плоскости получается цилиндр, если отождествить точки[1]

[1] то есть считать все эти точки одной точкой

вида $(x + 2\pi k, y)$ с целыми k. Поэтому любую точку цилиндра $\mathcal{Z}$ можно считать расположенной в полосе $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

Прежде, чем обсуждать динамику, отметим, что T_ε обладает важным свойством: оно сохраняет площади. Имеется в виду следующее. Пусть Φ — какая-нибудь фигура[2] на цилиндре $\mathcal{Z}$. Подействовав на каждую точку фигуры Φ отображением T_ε, получим новую фигуру $T_\varepsilon(\Phi)$. Оказывается, площади фигур Φ и $T_\varepsilon(\Phi)$ всегда совпадают.

Сохранение площади сразу вытекает из того, что определитель матрицы Якоби, построенной по T_ε, равен 1. Но мы обойдемся элементарными методами. Заметим, что T_ε является композицией отображений P_ε и Q цилиндра $\mathcal{Z}$ на себя:

$$T_\varepsilon = Q \circ P_\varepsilon$$

(сначала P_ε, затем Q), где

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(x, y) &= (\hat{x}, \hat{y}), \qquad \hat{x} = x, \quad \hat{y} = y + \varepsilon \sin x, \\ Q(\hat{x}, \hat{y}) &= (X, Y), \qquad X = \hat{x} + \hat{y}, \quad Y = \hat{y}. \end{aligned}$$

Оба отображения P_ε и Q сохраняют площади. Действительно, Q переводит любой квадрат со сторонами параллельными осям координат в параллелограмм той же площади. При этом любую фигуру Φ можно с произвольной точностью приблизить объединением таких квадратов.

В случае отображения P_ε ситуация чуть сложнее, но аналогичная: «параллелограмм»-образ получится с парой кривых сторон. Подумайте, почему и здесь площадь сохранится.

Перейдем к обсуждению динамики. Сначала замечу, что почти для любого из присутствующих не составит труда посмотреть на траектории T_ε с помощью компьютера. Для этого полезно заметить, что при желании переменную y также можно считать угловой. Действительно, отображение T_ε «уважает» не только сдвиг переменной x на 2π, но и аналогичный сдвиг переменной y в том смысле, что для любых целых k и n

$$T_\varepsilon(x + 2\pi k, y + 2\pi n) = (X + 2\pi k, Y + 2\pi k + 2\pi n)$$

(сдвиг переменных X и Y тоже имеет вид $2\pi\cdot$(целое число)). Поэтому можно попросить компьютер нарисовать на экране квадрат

$$\mathcal{S} = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\},$$

задать начальную точку $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}$ и нарисовать ее, вычислить точку $(x_1, y_1) = T_\varepsilon(x_0, y_0)$ и нарисовать ее, и т.д. Если очередная точка (x_n, y_n) оказалась вне квадрата, ее надо вернуть[3] в $\mathcal{S}$ сдвигом переменной x и/или y на $2\pi k$ с целым k. В свое время я с большим интересом разглядывал получающиеся при этом траектории.

---

[2] точнее, измеримое множество

[3] Грамотный человек заметит, что мы заменили (некомпактное) фазовое пространство $\mathcal{Z}$ на (компактное) $\mathbb{T}^2$, где $\mathbb{T}^2 = \{(x, y) \bmod 2\pi\}$ — двумерный тор.

Что же все-таки происходит? Сначала положим $\varepsilon = 0$. В этом случае имеется закон сохранения (математики говорят: первый интеграл), то есть функция на фазовом пространстве, постоянная на траекториях. Такой функцией является y. Поэтому любая траектория расположена на кривой

$$l_c = \{(x, y) \in \mathcal{Z} : y = c = \mathrm{const}\}.$$

Так как переменная x угловая, эти кривые являются окружностями. Кривая l_c поворачивается на угол c. Если число c/π рациональное, то траектория периодична, то есть замкнется через конечное число шагов. Если c/π иррационально, траектория всюду плотно «замотает» окружность l_c. Такие кривые l_c называются нерезонансными.

Это, в определенном смысле, полное описание динамики при $\varepsilon = 0$. В случае $\varepsilon \neq 0$ ситуация сильно усложняется. Надеяться на существование первого интеграла не приходится. (Такие вещи понимал уже Пуанкаре чуть более 100 лет назад.) Это связано с тем, что траектории (во всяком случае, некоторые из них) перестают ложиться на гладкие кривые типа окружностей l_c и начинают демонстрировать хаотическое поведение.

Впрочем, хаос возникает постепенно. Согласно теории Колмогорова-Арнольда-Мозера (60-е годы XX века) при малых (то есть, близких к нулю) значениях параметра ε многие из нерезонансных кривых l_c в слегка деформированном виде будут существовать как инвариантные кривые для T_ε. Понимать это надо следующим образом. При малых ε на цилиндре $\mathcal{Z}$ имеется много кривых $l_{c,\varepsilon}$, которые

— определены не для всех c, но для многих,

— близки[4] к кривым l_c,

— инвариантны относительно T_ε, то есть состоят из траекторий,

— каждая из этих траекторий заматывает свою кривую всюду плотно.

Кривые $l_{c,\varepsilon}$ хорошо видны при численном счете на компьютере. Траектории, расположенные на них, принято считать регулярными.

Хаотические траектории на экране компьютера выглядят как «облака», более или менее плотно заполненные точками. Можно доказать, что если ε мало и начальные условия берутся наугад, то вероятность попасть на одну из регулярных траекторий существенно выше, чем вероятность попасть на хаотическую траекторию.

Когда ε растет, кривые $l_{c,\varepsilon}$ разрушаются и хаоса становится больше. При больших ε в численном эксперименте видно, как одна траектория зарисовывает почти без дыр весь квадрат $\mathcal{S}$.

Хаотические траектории можно построить и аналитически, без помощи компьютера. Особенно просто это можно сделать при больших ε. Но здесь имеется одно весьма неприятное обстоятельство. Дело в том, что все известные к настоящему времени методы построения хаотических траекторий в применении к отображению T_ε и аналогичным системам дают метрически тощее хаотическое множество. Имеется в виду следующее. При произвольном ε рассмотрим множество точек, лежащих

[4] то есть $l_{c,\varepsilon} \to l_c$ при $\varepsilon \to 0$

на хаотических траекториях: траекториях, которые мы можем построить всеми доступными к настоящему времени аналитическими методами. Получится некоторое подмножество цилиндра $\mathcal{Z}$ (или квадрата $\mathcal{S}$). Оказывается, это хаотическое множество всегда имеет меру нуль в том смысле, что его площадь (как фигуры на $\mathcal{Z}$ или $\mathcal{S}$) равна нулю.

Это не противоречит тому факту, что хаотических траекторий бесконечно много[5]. Но это противоречит нашей физической интуиции. Хаоса при больших ε должно быть много! На эту же мысль наводит разглядывание результатов компьютерного счета. А может быть компьютеру в этом вопросе нельзя доверять? Ведь он считает с конечной точностью...

Все-таки специалисты верят в то, что верна следующая

Гипотеза. При $\varepsilon \neq 0$ хаос в стандартном отображении Чирикова и системах такого типа живет на множествах положительной меры (площади).

Одной из важнейших проблем гамильтоновой динамики в настоящее время является доказательство или опровержение этой гипотезы.

[5] Легко доказать, что они даже образуют несчетное множество.