

LXX Московская математическая олимпиада
11 класс

1. Круглая мишень разбита на 20 секторов, которые нумеруются по кругу в каком-либо порядке числами $1, 2, \dots, 20$. Если секторы занумерованы, например (как при игре в дартс), в следующем порядке

$1, 20, 5, 12, 9, 14, 11, 8, 16, 7, 19, 3, 17, 2, 15, 10, 6, 13, 4, 18,$

то *наименьшая из разностей* между номерами соседних (по кругу) секторов равна $12 - 9 = 3$ (из большего числа вычитается меньшее). Может ли указанная величина при нумерации в другом порядке быть больше 3? Каково наибольшее возможное значение этой величины?

2. Значение a подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2 \cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2 \cos ax + 4$$

равно 2007. Сколько корней при *той же* a имеет второе уравнение?

3. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.

4. Точка O лежит в основании $A_1A_2 \dots A_n$ пирамиды $SA_1A_2 \dots A_n$, причем $SA_1 = SA_2 = \dots = SA_n$ и $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \dots = \angle SA_nO$. При каком наименьшем значении n отсюда *следует*, что SO — высота пирамиды?

5. Квадрат состоит из $n \times n$ клеток: две противоположные угловые клетки — черные, а остальные — белые. Какое наименьшее количество белых клеток достаточно перекрасить в черный цвет, чтобы после этого с помощью *преобразований*, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать черными все клетки этого квадрата?

6. Точки A', B' и C' — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH — его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M , отличную от H , то $\angle ABM = \angle CBV'$.

7. Миша мысленно расположил внутри данного круга единичного радиуса выпуклый многоугольник, содержащий центр круга, а Коля пытается угадать его периметр. За *один шаг* Коля указывает Мише какую-либо прямую и узнает от него, пересекает ли она многоугольник. Имеет ли Коля возможность наверняка угадать периметр многоугольника:

- а) через 3 шага с точностью до 0,3;
- б) через 2007 шагов с точностью до 0,003?

Москва, 4 марта 2007 г.

Заккрытие олимпиады состоится в Главном здании МГУ 18 марта 2007 г.

Все результаты и актуальная информация — см. сайт <http://www.mccme.ru>.

LXX Московская математическая олимпиада
11 класс

1. Круглая мишень разбита на 20 секторов, которые нумеруются по кругу в каком-либо порядке числами $1, 2, \dots, 20$. Если секторы занумерованы, например (как при игре в дартс), в следующем порядке

$1, 20, 5, 12, 9, 14, 11, 8, 16, 7, 19, 3, 17, 2, 15, 10, 6, 13, 4, 18,$

то *наименьшая из разностей* между номерами соседних (по кругу) секторов равна $12 - 9 = 3$ (из большего числа вычитается меньшее). Может ли указанная величина при нумерации в другом порядке быть больше 3? Каково наибольшее возможное значение этой величины?

2. Значение a подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2 \cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2 \cos ax + 4$$

равно 2007. Сколько корней при *той же* a имеет второе уравнение?

3. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.

4. Точка O лежит в основании $A_1A_2 \dots A_n$ пирамиды $SA_1A_2 \dots A_n$, причем $SA_1 = SA_2 = \dots = SA_n$ и $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \dots = \angle SA_nO$. При каком наименьшем значении n отсюда *следует*, что SO — высота пирамиды?

5. Квадрат состоит из $n \times n$ клеток: две противоположные угловые клетки — черные, а остальные — белые. Какое наименьшее количество белых клеток достаточно перекрасить в черный цвет, чтобы после этого с помощью *преобразований*, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать черными все клетки этого квадрата?

6. Точки A', B' и C' — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH — его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M , отличную от H , то $\angle ABM = \angle CBV'$.

7. Миша мысленно расположил внутри данного круга единичного радиуса выпуклый многоугольник, содержащий центр круга, а Коля пытается угадать его периметр. За *один шаг* Коля указывает Мише какую-либо прямую и узнает от него, пересекает ли она многоугольник. Имеет ли Коля возможность наверняка угадать периметр многоугольника:

- а) через 3 шага с точностью до 0,3;
- б) через 2007 шагов с точностью до 0,003?

Москва, 4 марта 2007 г.

Заккрытие олимпиады состоится в Главном здании МГУ 18 марта 2007 г.

Все результаты и актуальная информация — см. сайт <http://www.mccme.ru>.