Департамент образования города Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской обл.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXX

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

(Московская региональная олимпиада школьников)

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Издательство МЦНМО
Москва, 2007

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу

119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11,
Московская математическая олимпиада,

по адресу электронной почты mmo@mccme.ru
или по телефону (495) 241–12–37.

☞ Материалы данной книги размещены на странице

http://www.mccme.ru/olympiads/mmo/

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

☞ Сопредседатели оргкомитета 70 ММО:

вице-президент Московского математического общества,
академик РАН *В.А.Васильев*,
вице-президент РАН, директор МИАН им. В. А. Стеклова,
академик РАН *В.В.Козлов*,
президент Российского Союза ректоров, ректор МГУ
им. М. В. Ломоносова, академик РАН *В.А.Садовничий*.

☞ Сборник подготовили:

В.Б.Алексеев, В.Д.Арнольд, А.В.Бегунц, А.Д.Блинков, Т.И.Голенищева-Кутузова, Е.С.Горская, Е.А.Горский, Г.Г.Гусев, С.А.Дориченко, А.И.Ефимов, А.А.Заславский, П.И.Захаров, Т.В.Караваева, А.К.Ковальджи, О.Н.Косухин, А.А.Кустарёв, С.В.Маркелов, Л.Э.Медников, Г.А.Мерзон, Н.М.Нетрусова, Г.Ю.Панина, В.С.Панфёров, М.А.Раскин, И.В.Раскина, И.Н.Сергеев, А.С.Трепалин, Б.Р.Френкин, А.В.Хачатурян, А.В.Шаповалов, И.В.Ященко.

☞ Проведение олимпиады и издание осуществлены при поддержке

Департамента образования г. Москвы,
Московского института открытого образования,
Научно-методического центра «Школа нового поколения»,
фирмы «НИКС»,
компании «Яндекс».

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. По двум телевизионным каналам одновременно начали показывать один и тот же фильм. На первом канале фильм разбили на части по 20 минут каждая и вставили между ними двухминутные рекламные паузы. А на втором канале фильм разбили на части по 10 минут каждая и вставили между ними минутные рекламные паузы. На каком канале фильм закончится раньше? (*И. В. Раскина, Т. В. Караваева*)

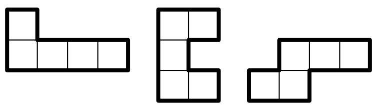
2. В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

(*А. В. Хачатурян*)

3. Волк с тремя поросятами написал детектив «Три поросенка–2», а потом вместе с Красной Шапочкой и ее бабушкой кулинарную книгу «Красная Шапочка–2». В издательстве выдали гонорар за обе книжки поросенку Наф-Нафу. Он забрал свою долю и передал оставшиеся 2100 золотых монет Волку. Гонорар за каждую книгу делится поровну между ее авторами. Сколько денег Волк должен взять себе? (*А. Д. Блинков*)

4. В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трех улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города. (*Г. Ю. Панина*)

5. Нарисуйте, как из данных трех фигурок, использовав каждую ровно один раз, сложить фигуру, имеющую ось симметрии. (*С. В. Маркелов*)



6. Кощей Бессмертный похитил у царя трех дочерей. Отправился Иван-царевич их выручать. Приходит он к Кощею, а тот ему и говорит:

«Завтра поутру увидишь пять заколдованных девушек. Три из них — царевы дочери, а еще две — мои. Для тебя они будут неотличимы, а сами друг дружку различать смогут. Я подойду к одной из них и стану у нее спрашивать про каждую из пятерых: „Это царевна?“. Она может отвечать и правду, и неправду, но ей дозволено назвать царевнами ровно двоих (себя тоже можно называть). Потом я так же опрошу каждую из остальных девушек, и они тоже должны будут назвать царевнами ровно двоих. Если после этого угадаешь, кто из них и вправду царевны, отпущу тебя восвояси невредимым. А если еще и догадаешься, которая царевна старшая, которая средняя, а которая младшая, то и их забирай с собой».

Иван может передать царевнам записку, чтобы научить их, кого назвать царевнами. Может ли он независимо от ответов Кощеевых дочерей: а) вернуться живым, б) увезти царевен с собой? (*И. В. Раскина*)

7 класс

1. Даша и Таня живут в одном подъезде. Даша живет на 6 этаже. Выходя от Даши, Таня пошла не вниз, как ей было нужно, а вверх. Дойдя до последнего этажа, Таня поняла свою ошибку и пошла вниз на свой этаж. Оказалось, что Таня прошла в полтора раза больше, чем если бы она сразу пошла вниз. Сколько этажей в доме?

(*Т. И. Голенищева-Кутузова, И. В. Ященко*)

2. См. задачу 2 для 6-го класса.

3. У Алены есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания. Когда Алена садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алена говорила по телефону ровно половину времени поездки?

(*А. В. Хачатурян*)

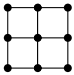
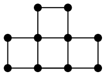
4. На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4. Отметьте еще два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площади 6 клеток.

(*Т. И. Голенищева-Кутузова, И. В. Ященко*)

5. См. задачу 5 для 6-го класса.

6. Буратино ходит по улицам города, на одном из перекрестков которого зарыт клад. На каждом перекрестке ему по радио сообщают, приблизился он к кладу или удалился (по сравнению с предыдущим перекрестком). Радио либо всегда говорит правду, либо всегда лжет (но Буратино не знает, лжет оно или нет).

Сможет ли Буратино точно узнать, где закопан клад, если план города имеет вид:

а) , б)  ?

(Перекрестки отмечены точками.)

(*Т. И. Голенищева-Кутузова*)

8 класс

1. За первый год население некоторой деревни возросло на n человек, а за второй — на 300 человек. При этом за первый год население увеличилось на 300%, а за второй — на n%. Сколько жителей стало в деревне? (*Б. Р. Френкин*)

2. Дано натуральное число N. Для того чтобы найти целое число, ближайшее к $\sqrt{N}$, воспользуемся следующим способом: найдем среди квадратов натуральных чисел число a^2, ближайшее к числу N; тогда a и будет искомым числом. Обязательно ли этот способ даст правильный ответ? (*А. В. Хачатурян*)

3. В футбольном чемпионате участвовали 16 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу, за победу давалось 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0. Назовем команду успешной, если она набрала хотя бы половину от наибольшего возможного количества очков. Какое наибольшее количество успешных команд могло быть в турнире?

(*А. Д. Блинков*)

4. В треугольник ABC с прямым углом C вписана окружность, касающаяся сторон AC, BC и AB в точках M, K и N соответственно. Через точку K провели прямую, перпендикулярную отрезку MN. Она пересекла катет AC в точке X. Докажите, что $CK = AX$. (*М. А. Волчкевич*)

5. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель ее туда передвигает, не сообщая Фуксу. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока сам не скажет «стоп». Может ли Фукс добиться того, чтобы после «стопа» каждая карта наверняка оказалась не там, где была вначале? (*Л. Э. Медников, А. В. Шаповалов*)

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны, M — середина стороны AD. Известно, что угол BMC равен 90°. Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$. (*М. А. Волчкевич*)

9 класс

1. Номер нынешней олимпиады (70) образован последними цифрами года ее проведения, записанными в обратном порядке. Сколько еще раз повторится такая ситуация в этом тысячелетии? (*А. А. Заславский*)

2. На параболе $y=x^2$ выбраны четыре точки A, B, C, D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D, если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно. (*Н. Н. Андреев, А. Д. Блинков*)

3. Найдите все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии. (*Б. Р. Френкин*)

4. Выпуклая фигура F обладает следующим свойством: любой правильный треугольник со стороной 1 можно параллельно перенести так, что все его вершины попадут на границу F. Обязательно ли F — круг? (Фигура называется выпуклой, если отрезок, соединяющий любые две ее точки, целиком принадлежит фигуре.) (*С. В. Маркелов*)

5. В однокруговом футбольном турнире играли $n>4$ команд. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за проигрыш 0. Оказалось, что все команды набрали поровну очков.

а) Докажите, что найдутся 4 команды, имеющие поровну побед, поровну ничьих и поровну поражений.

б) При каком наименьшем n могут не найтись 5 таких команд? (*А. А. Заславский*)

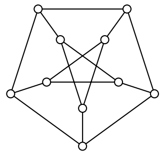
6. Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами 120°. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке. (*А. А. Заславский*)

10 класс

1. На сторонах единичного квадрата отметили точки K, L, M и N так, что прямая KM параллельна двум сторонам квадрата, а прямая LN — двум другим сторонам квадрата. Отрезок KL отсекает от квадрата треугольник периметра 1. Треугольник какой площади отсекает от квадрата отрезок MN?

(*С. А. Дориченко, Р. Г. Женодаров, С. И. Токарев*)

2. Можно ли покрасить 15 отрезков, изображенных на рисунке, в 3 цвета так, чтобы никакие 2 отрезка одного цвета не имели общего конца? (*И. А. Пушкарёв*)



3. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что x^2+x+1 является натуральной степенью y, а y^2+y+1 — натуральной степенью x? (*В. А. Сендеров, Б. Р. Френкин*)

4. См. задачу 5 для 8-го класса.

5. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в O. X — произвольная точка внутри треугольника ABC, такая, что $\angle XAB = \angle XBC = \varphi$, а P — такая точка, что $PX \perp OX$, $\angle XOP = \varphi$, причем углы $\angle XOP$ и $\angle XAB$ одинаково ориентированы. Докажите, что все такие точки P лежат на одной прямой.

(*А. А. Заславский*)

6. С ненулевым числом разрешается проделывать следующие операции: $x \mapsto \dfrac{1+x}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1-x}{x}$. Верно ли, что из каждого ненулевого рационального числа можно получить каждое рациональное число с помощью конечного числа таких операций? (*А. В. Петухов*)

11 класс

1. Круглая мишень разбита на 20 секторов, которые нумеруются по кругу в каком-либо порядке числами $1, 2, \ldots, 20$.

Если секторы занумерованы, например (как при игре в дартс), в следующем порядке

$$1, 20, 5, 12, 9, 14, 11, 8, 16, 7, 19, 3, 17, 2, 15, 10, 6, 13, 4, 18,$$

то наименьшая из разностей между номерами соседних (по кругу) секторов равна $12 - 9 = 3$ (из большего числа вычитается меньшее). Может ли указанная величина при нумерации в другом порядке быть больше 3? Каково наибольшее возможное значение этой величины? (*И. Н. Сергеев*)

2. Значение a подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2\cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2\cos ax + 4$$

равно 2007. Сколько корней при том же a имеет второе уравнение? (*В. Б. Алексеев*)

3. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения. (*А. В. Бегунц*)

4. В основании $A_1A_2\ldots A_n$ пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$ лежит точка O, причем $SA_1 = SA_2 = \ldots = SA_n$ и $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \ldots = \angle SA_nO$. При каком наименьшем значении n отсюда следует, что SO — высота пирамиды? (*И. Н. Сергеев*)

5. Квадрат состоит из $n \times n$ клеток: две противоположные угловые клетки — черные, а остальные — белые. Какое наименьшее количество белых клеток достаточно перекрасить в черный цвет, чтобы после этого с помощью преобразований, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать черными все клетки этого квадрата?

(*В. Б. Алексеев*)

6. Точки A', B' и C' — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH — его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M, отличную от H, то $\angle ABM = \angle CBB'$. (*В. П. Филимонов*)

7. Миша мысленно расположил внутри данного круга единичного радиуса выпуклый многоугольник, содержащий центр круга, а Коля пытается угадать его периметр. За один шаг Коля указывает Мише какую-либо прямую и узнает от него, пересекает ли она многоугольник. Имеет ли Коля возможность наверняка угадать периметр многоугольника:

а) через 3 шага с точностью до 0,3;

б) через 2007 шагов с точностью до 0,003? (*О. Н. Косухин*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. Ответ: на первом канале.

На первом канале между началом каждой части и началом следующей проходит 22 минуты. За это время на втором канале пройдут две части по 10 минут и две минутные рекламные паузы. Следовательно, началу каждой части на первом канале соответствует тот же момент фильма на втором.

Когда на первом канале начнется последняя часть, до конца фильма останется 20 минут, рекламы уже не будет. На втором же канале покажут две части по 10 минут с минутной рекламной паузой, поэтому на первом канале фильм закончится на одну минуту раньше.

2. Ответ: тройка.

Разложим число 2007 на простые множители:

$$2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223.$$

Отсюда можно было бы сделать вывод, что отметки Вовочки — это две двойки и три тройки. Но на самом деле надо еще доказать, что нет других вариантов отметок. Посмотрим, как еще можно разложить 2007 на множители: $2007 = 9 \cdot 223 = 3 \cdot 669$. Поскольку отметки 9 не бывает, эти разложения числа 2007 не могли возникнуть из Вовочкиных отметок. Так как троек у Вовочки больше, чем двоек, и последняя отметка, как ни переставляй множители, — тройка, можно надеяться, что тройку в четверти он получит.

3. Ответ: 700 золотых монет.

За книгу «Три поросенка–2» каждый автор должен получить четверть гонорара. Но так как Наф-Наф свою долю уже забрал, Волку причитается 1/3 остатка. За книгу «Красная шапочка–2» ему также полагается 1/3 гонорара. Поэтому всего он должен получить треть переданной ему суммы.

4. План города может быть, например, таким, как на рис. 1.

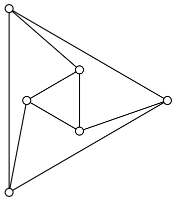


Рис. 1

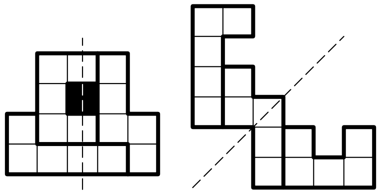


Рис. 2

5. Из предложенных фигурок можно сложить четыре различные фигуры, имеющие ось симметрии. Две из них приведены на рисунке. У одной из них ось симметрии вертикальная, а у другой проходит по диагонали. Это не случайно — ось симметрии фигуры, нарисованной по клеточкам, может быть либо параллельна сторонам клеток, либо идти под углом 45° к ним.

Попробуйте найти остальные два решения.

6. О т в е т: а) да; б) да.

а) Пусть все царевны назовут царевнами Кощеевых дочек (рис. 3, сверху). Тогда Кощеевых дочек назовут не менее трех раз, а царевен — не более чем дважды. Так Иван их и отличит.

Любое из решений пункта б), конечно, годится и для пункта а).

б) П е р в о е р е ш е н и е. Пусть старшая дочь назовет царевнами среднюю и младшую, младшая — среднюю и старшую, а средняя — себя и младшую (рис. 3, снизу). Тогда Иван сразу узнает среднюю царевну — это единственная девушка, которая назвала царевной себя, и ее назвали царевной по крайней мере еще две девушки. После этого

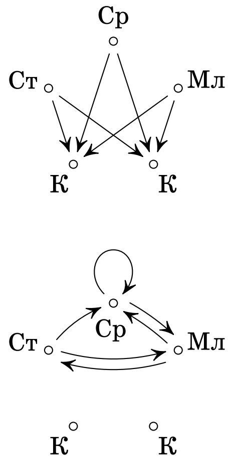


Рис. 3

Иван узнает младшую царевну (ее назвала средняя), а потом и старшую (ее назвала младшая).

Заметим, что Иван мог бы рассуждать и иначе. Три царевны называют друг друга по кругу: образуют «треугольник», в котором каждая девушка называет следующую. Поскольку ни одна из них не называет царевной дочерей Кощея, а тех всего две, то дочери Кощея не могут входить ни в какой подобный «треугольник». Так можно понять, какие из девушек царевны. Потом, используя остальные ответы, нетрудно установить и старшинство.

В т о р о е р е ш е н и е. Пусть та царевна, которая будет отвечать Кощею первой, назовет среднюю и младшую царевен, вторая по счету — старшую и младшую, последняя — старшую и среднюю. Тогда дочери Кощея — те две девушки, которых не назвали трое остальных. Ошибки быть не может, ведь каждую царевну называют как минимум двое. Теперь Иван знает, кто царевны, а старшинство определяется без труда.

7 класс

1. О т в е т: 7 этажей.

Пусть с шестого этажа Тане надо было спуститься на n этажей. Тогда Таня прошла «лишний путь» вверх до последнего этажа и обратно до шестого. Длина лишнего пути $1{,}5n - n = 0{,}5n$ этажей. Половину этого лишнего пути Таня шла вверх, а половину — вниз. Значит, вверх она поднялась на $n/4$ этажей.

Если она поднялась на один этаж ($n/4 = 1$), то Таня живет на 4 этажа ниже Даши и в доме 7 этажей. Если же $n/4$ равно 2 или больше, то Тане пришлось бы спуститься с шестого этажа минимум на 8 этажей вниз, что невозможно.

2. См. решение задачи 2 для 6-го класса.

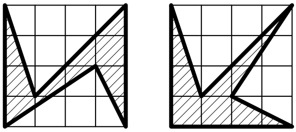
3. О т в е т: 11 часов 40 минут.

П е р в о е р е ш е н и е. Во время разговора энергия аккумулятора расходуется в $\frac{210}{6} = 35$ раз быстрее, чем в то время, когда разговор не ведется. Пусть Алена проговорила x часов. Тогда энергии аккумулятора осталось на $(6 - x)$ часов разговора или на $35 \cdot (6 - x)$ часов ожидания. По условию это время также равно x часов ожидания, поэтому $35\cdot(6-x)=x$, откуда $x=\frac{35\cdot 6}{36}=\frac{35}{6}$ часов, т. е. 5 ч 50 мин. И, значит, вся поездка продолжалась 11 ч 40 мин.

Второе решение. Если бы Алена говорила $210\cdot 6$ часов и молчала $210\cdot 6$ часов, то телефон бы полностью разрядился $210+6=216$ раз. Так как на на самом деле телефон разрядился один раз, Алена говорила $\frac{210\cdot 6}{216}$ часов и молчала $\frac{210\cdot 6}{216}$ часов, т. е. ехала она $2\cdot\frac{210\cdot 6}{216}$ часов. После сокращения получаем 11 часов 40 минут.

Примечание. Ответом в этой задаче является среднее гармоническое чисел 6 и 210 (*средним гармоническим* чисел a и b называется число $\frac{2}{1/a+1/b}=\frac{2ab}{a+b}$).

4. Ответ:



Можно попытаться найти решение, просто пробуя различные пары вершин внутри квадрата 4×4 и стараясь сделать получаемый шестиугольник поуже. При этом удобнее считать не площадь шестиугольника, а площадь оставшейся части квадрата — она должна быть равна 10 клеткам.

Для подсчета площади можно разбить оставшуюся часть на прямоугольные треугольники и вспомнить, что площадь прямоугольного треугольника, катеты которого идут по линиям сетки, равна половине площади прямоугольника со сторонами a и b (рис. 4, сверху) и равна $\frac{ab}{2}$ (эта формула верна и для произвольного прямоугольного треугольника). Те из вас, кто знает более общую формулу: площадь треугольника со стороной a и опущенной на нее высотой h равна $\frac{ah}{2}$ (рис. 4, снизу), могут сразу найти площадь произвольного треугольника, не разбивая его на прямоугольные.

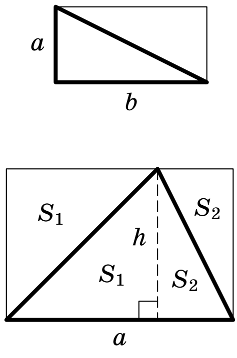


Рис. 4

5. См. решение задачи 5 для 6-го класса.

6. О т в е т: а) нет, не всегда; б) да, всегда сможет найти.

а) Всегда, когда Буратино приближается к перекрестку A, он удаляется от перекрестка C (рис. 5, *а*). Поэтому Буратино не сможет различить следующие две ситуации:

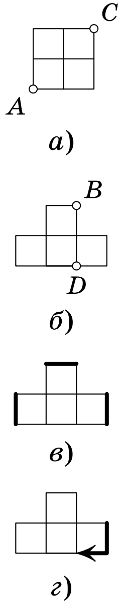


Рис. 5

1) клад закопан на перекрестке A, и радио говорит правду;

2) клад закопан на перекрестке C, и радио лжет.

б) Заметим, что если Буратино знает, что радио говорит правду, то он сможет найти клад. Действительно, двигаясь по улице BD сверху вниз (рис. 5, *б*), он найдет горизонтальную улицу, на которой лежит клад. Затем, двигаясь по этой горизонтальной улице слева направо, он найдет точное местоположение клада. Если же Буратино знает, что радио лжет, то он все равно сможет найти клад (действуя тем же способом, но заменяя указания радио на противоположные).

Теперь ему остается выяснить, лжет ли радио.

Пусть вначале Буратино предположит, что радио говорит правду, и попытается найти клад. Действуя, как описано выше, он найдет точку T, в которой может быть зарыт клад, либо (если сообщения радио будут противоречивы) поймет, что радио лжет.

Аналогично, предположив, что радио лжет, Буратино найдет точку L, в которой предположительно лежит клад, либо сможет установить, что радио говорит правду.

Итак, проделав это, Буратино либо уже установил, говорит ли радио правду, либо нашел две точки T и L, в одной из которых точно находится клад.

Рассмотрим на плане города три отрезка (рис. 5, *в*). Хотя бы на одном из них не лежит ни T, ни L. Поэтому Буратино может встать в один из концов этого отрезка и совершить переход в соседнюю точку, не лежащую на этом отрезке (рис. 5, *г*).

При этом он приблизится как к T, так и к L.

Таким образом Буратино определит, лжет ли радио, и узнает, где находится клад.

8 класс

1. Ответ: 500 человек.

Предположим, что сначала в деревне было x жителей. Тогда через год в деревне стало $x+n=x+\frac{300}{100}\cdot x=4x$ жителей, откуда $n=3x$. Ещё через год в деревне стало $4x+300=4x+\frac{n}{100}\cdot 4x$ жителей, откуда $300=\frac{4nx}{100}$. Так как $n=3x$, то $300=\frac{12x^2}{100}$, $4x^2=10000$ и $x=50$. Значит, в деревне сейчас $4x+300=500$ человек.

2. Ответ: да.

Число $\sqrt{N}$ лежит на числовой оси между какими-то подряд идущими натуральными числами b и $b+1$. Тогда число N лежит на числовой оси между b^2 и $(b+1)^2$. Середина отрезка $[b^2;\,(b+1)^2]$ — это полусумма его концов, т. е. число $b^2+b+1/2$. Так как это число нецелое, N не может попасть точно на середину.

Разберем два случая.

Пусть N лежит справа от середины, т. е. оно ближе к $(b+1)^2$. Тогда $N>b^2+b+1/2=(b+1/2)^2+1/4$, откуда $\sqrt{N}>b+1/2$, т. е. $\sqrt{N}$ ближе к $b+1$ (чем к b), и способ даст верный ответ: число $b+1$.

Пусть N лежит слева от середины, т. е. оно ближе к b^2. Тогда $N<b^2+b+1/2$ и, так как N — натуральное, $N\leqslant b^2+b=(b+1/2)^2-1/4$, откуда $\sqrt{N}<b+1/2$, т. е. $\sqrt{N}$ ближе к b (чем к $b+1$), и способ даст верный ответ: число b.

3. Ответ: 15.

Каждая команда сыграла 15 игр и поэтому могла набрать самое большее $15\cdot 3=45$ очков. Значит, команда успешная, если у нее не меньше 23 очков.

Пусть было n успешных команд. Тогда суммарное количество набранных очков не меньше $23n$. С другой стороны, в каждой игре разыгрывается не более 3 очков, а всего было сыграно $\frac{16\cdot 15}{2}$ игр; т. е. всего было разыграно не более $3\cdot\frac{16\cdot 15}{2}=360$ очков. Значит, $23n\leqslant 360$, откуда $n<16$.

Покажем, что в чемпионате могло быть 15 успешных команд. Пронумеруем команды. Пусть команда номер 16 проигрывает всем остальным. Расположим номера остальных команд (числа от 1 до 15) по кругу. Пусть каждая из этих команд выиграет у следующих по кругу 7 команд (а остальным проиграет). Тогда 15 команд выиграют по 8 игр и наберут по 24 очка.

4. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, тогда I лежит на биссектрисе угла A (рис. 6). Так как треугольник AMN равнобедренный, прямая IA является в нем не только биссектрисой, но и высотой, поэтому $IA \perp MN$. По условию $KX \perp MN$, а значит, IA и KX параллельны.

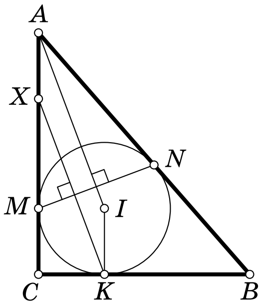


Рис. 6

Заметим, что $IK \perp BC$, откуда следует, что IK и AC параллельны. Значит, четырехугольник $AXKI$ — параллелограмм, т. е. $AX = KI$.

Но в прямоугольнике $KIMC$ стороны IK и IM равны (как радиусы вписанной окружности), а значит, $KIMC$ — квадрат, откуда $CK = KI = AX$.

5. О т в е т: может.

Фукс за 52 тура называет 52^2 карт — в каждом туре все карты по разу в одном и том же порядке, после чего говорит «стоп». Заметим, что всякий раз карты передвигаются в одном направлении: если передвинута карта a, то следующей будет передвинута карта b по другую сторону от свободного места (она будет названа раньше a). В каждом туре хотя бы одна карта сдвинется, значит, сдвигов не менее 52, и каждая карта со своего места уйдет. С другой стороны, каждая карта сдвинулась не более 52 раз, поэтому полный круг (53 хода) она сделать не успеет и на свое место не вернется.

Есть много других верных алгоритмов. Например, Фуксу достаточно назвать все карты в некотором определенном порядке 51 раз (докажите!).

К о м м е н т а р и й. В весеннем туре 28 Турнира городов (который проводился в один день с Московской олимпиадой) также была дана эта задача, но в ней был еще второй пункт: может ли Фукс добиться того, чтобы после «стопа» рядом со свободным местом наверняка не было туза пик?

О т в е т: нет.

Для любой последовательности названных Фуксом карт есть начальная позиция, которая в результате перейдет в позицию с тузом возле свободного места. Дело в том, что, назвав карту повторно, мы «откатываем назад» предыдущий ход. Назвав всю последовательность карт в обратном порядке, мы «откатаем» финальную позицию до исходной. Взяв за финальную любую позицию с тузом возле возле свободного места, откатаем ее. Получим исходную позицию, не выигрышную для данной последовательности карт.

6. О т в е т: 30°.

П е р в о е р е ш е н и е. Построим точку C_1 на прямой CM так, что $C_1M = CM$, и точку B_1 на прямой BM так, что $B_1M = BM$ (рис. 7). В четырехугольнике BCB_1C_1 диагонали точкой пересечения делятся пополам, поэтому это параллелограмм. Его диагонали BB_1 и CC_1 перпендикулярны, следовательно, это ромб. Значит, $BC_1 = BC = CB_1 = C_1B_1$. Так как $ACDC_1$ и $ABDB_1$ — параллелограммы, $AB = BC = CD = DB_1 = B_1C_1 = C_1A$.

Заметим, что треугольники CDB_1 и ABC_1 равносторонние, а значит, $\angle C_1AB = \angle CDB_1 = 60^\circ$.

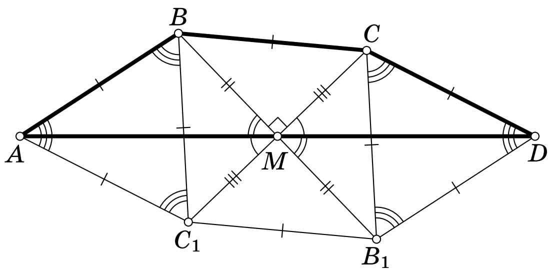


Рис. 7

Обозначим точку пересечения диагоналей за P (рис. 8), $\angle MBC$ за $\angle 1$, $\angle MCB$ за $\angle 2$, $\angle BCA$ за $\angle 3$, $\angle DBC$ за $\angle 4$. Сразу заметим, что $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$. Нам надо найти $\angle BPA = \angle 3 + \angle 4$ (внешний угол треугольника BPC).

Поскольку по условию $AB = BC$, получаем, что $\angle BAC = \angle 3$. При этом $\angle C_1BM = \angle CBM = \angle 1$, так как диагональ в ромбе является биссектрисой угла. Из треугольника ABC видно, что $180^\circ - 2\angle 1 - 2\angle 3 = \angle ABC_1 = 60^\circ$, т. е. $\angle 3 + \angle 1 = 60^\circ$. Аналогично

$\angle 4 + \angle 2 = 60^\circ$. Тогда $\angle 3 + \angle 4 = (\angle 3 + \angle 1) + (\angle 2 + \angle 4) - (\angle 1 + \angle 2) =$ $= 60^\circ + 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

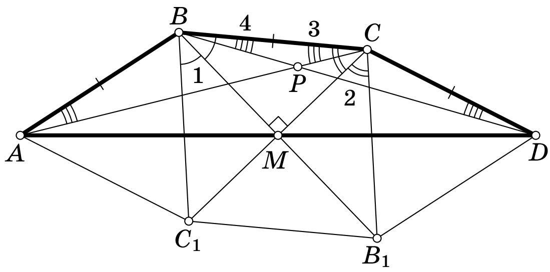


Рис. 8

В т о р о е   р е ш е н и е. Пусть O, K, L — середины отрезков BC, AC и BD соответственно, P — точка пересечения прямых AC и BD. Точки K, L различны (иначе $ABCD$ — ромб и $\angle BMC < \angle BPC = 90^\circ$). Поскольку углы BKC, BMC и BLC прямые (медианы в равнобедренных треугольниках являются высотами), точки K, M, L лежат на окружности с диаметром BC. Хорда KM равна $\frac{1}{2}CD = OC$ как средняя линия треугольника ACD, поэтому треугольник KOM равносторонний и $\angle MOK = 60^\circ$. Аналогично $\angle MOL = 60^\circ$, поэтому $\angle KOL = 120^\circ$. Вписанный угол KBL опирается на дугу KL или ее дополнение, поэтому равен 60° или 120°. В любом случае это означает, что в прямоугольном треугольнике BKP угол B равен 60° и поэтому $\angle BPK = 30^\circ$.

К о м м е н т а р и й. Доказательство в равной мере подходит для выпуклого и невыпуклого четырехугольника.

9 класс

1. О т в е т: два раза.

Пусть в каком-то году возникло описанное совпадение. Если номер олимпиады двузначный, то его сумма с числом, образованным последними двумя цифрами года, делится на 11 (сумма двух чисел, состоящих из цифр a и b, равна $11(a+b)$). Поскольку каждый год эта сумма увеличивается на 2, событие может повторяться не чаще, чем через 11 лет. И действительно, 81-я и 92-я олимпиады пройдут в 2018 и 2029 годах.

Если номер олимпиады трехзначный, то предпоследние цифры номера и года совпадают. Поэтому предпоследней цифрой их разности может быть только 0 или 9. Но разность года проведения олимпиады и ее номера всегда будет равна 1937 — противоречие.

Если номер олимпиады четырехзначный, то суммы цифр номера и года совпадают. Поскольку любое число дает такой же остаток при делении на 9, что и сумма его цифр, разность года и номера должна делиться на 9. Но остаток при делении на 9 числа 1937 равен 2 — противоречие.

Заметим, что и в дальнейшем такая ситуация наблюдаться не будет.

2. О т в е т: $\frac{ab}{c}$.

П е р в о е р е ш е н и е. Пусть l_0 — ордината точки пересечения прямых AB и CD. Тогда прямая AB задается уравнением вида $y = kx + l_0$, поэтому числа a, b являются корнями уравнения $x^2 - kx - l_0 = 0$. По теореме Виета их произведение равно $-l_0$. Аналогично произведение абсцисс точек C и D равно $-l_0$, и, следовательно, абсцисса точки D равна ab/c.

В т о р о е р е ш е н и е. Докажем, что $ab = cd$, где d — абсцисса точки D. Рассмотрим точки $A(a, a^2)$ и $B(b, b^2)$.

Возможны два случая.

1°. Точка P, в которой пересекаются AB и CD, лежит в верхней полуплоскости (рис. 9). Проведя перпендикуляры AA_1 и BB_1 к оси Ox, получим прямоугольную трапецию ABB_1A_1. Ее основания равны a^2 и b^2, а отрезок OP, параллельный основаниям, делит боковые стороны в отношении $OA_1 : OB_1 = |a| : |b| = \sqrt{a^2} : \sqrt{b^2}$. Следовательно, этот отрезок делит рассматриваемую трапецию на две подобные трапеции. Поэтому $a^2 : OP = OP : b^2$, откуда $OP = -ab$. Аналогичные рассуждения, проведенные для точек C и D, показывают, что $OP = -cd$.

2°. Точка P лежит в нижней полуплоскости (рис. 10). Проведем перпендикуляры AA_1 и BB_1 к оси Oy. Треугольники PBB_1 и PAA_1 подобны. Следовательно, $PA_1 : PB_1 = AA_1 : BB_1$, т. е. $\frac{OP + a^2}{OP + b^2} = \frac{a}{b}$, откуда $OP = ab$. Аналогичные рассуждения, проведенные для точек C и D, показывают, что $OP = cd$.

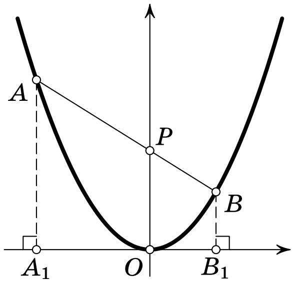


Рис. 9

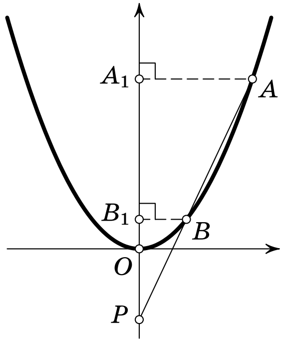


Рис. 10

К о м м е н т а р и й. Утверждение задачи является аналогом теоремы о произведении отрезков хорд окружности в так называемой геометрии Галилея, о которой можно прочитать в брошюре А. В. Хачатуряна «Геометрия Галилея» (М.: МЦНМО, 2005).

3. О т в е т: (2; 3), (3; 5; 7).

Пусть d — разность прогрессии.

Если $d=1$, то в прогрессии есть четные числа. Поскольку единственное четное простое число — это 2, получаем прогрессию (2; 3).

Если $d=2$, то три члена прогрессии (a, $a+2$ и $a+4$) дают при делении на 3 попарно различные остатки. Поэтому один из них делится на 3 и, будучи простым числом, равен 3. Отсюда получаем (3; 5; 7).

Пусть $d>2$. Последние $d-1$ членов прогрессии дают попарно различные остатки при делении на $d-1$. Поэтому один из них (обозначим его a) делится на $d-1$. Так как $d-1>1$ и a — простое число, то $a=d-1<d$. Но количество членов прогрессии больше d, поэтому $a-d$ принадлежит прогрессии и, значит, положительно — противоречие.

4. О т в е т. Нет.

Рассмотрим полукруг с центром O и радиусом 1. Данный треугольник можно параллельно перенести так, что одна из его вершин попадет в некоторую точку X, лежащую на прямой l, которая содержит диаметр полукруга, а две другие окажутся по ту же сторону от l, что и полукруг. Теперь после переноса на вектор XO одна вершина треугольника будет лежать в центре полукруга, а две другие на его окружности.

Условию задачи удовлетворяет и общая часть двух кругов единичного радиуса, расстояние между центрами которых также равно 1.

5. Если две команды набрали поровну очков, то разность между количествами ничьих у них кратна трем. Количество ничьих у команды находится в пределах от 0 до $n-1$. Поэтому количество групп, в каждой из которых команды имеют поровну выигрышей, ничьих и поражений, не превосходит $k=\left[\frac{n+2}{3}\right]$. Значит, найдется такая группа, состоящая не менее чем из трех команд. Предположим, что все группы состоят из трех или менее команд. Тогда групп ровно k (иначе $n<3k-2$ и $\left[\frac{n+2}{3}\right]<k$ — противоречие). Рассмотрим группы с наименьшим и наибольшим количеством ничьих.

Если $n=3k-2$, то у команд первой группы количество ничьих равно 0, а у команд второй $3k-3$. Значит, команды второй группы свели вничью все игры, в том числе с командами первой группы, у которых нет ничьих, — противоречие.

Если $n=3k-1$ и у команд первой группы по l ничьих, то у команд второй группы по $l+3k-3$ ничьих, т. е. по $1-l$ результативных встреч. Если $l=1$, то вторая группа может содержать только одну команду, так как две команды сыграли бы вничью с командой первой группы, у которой только одна ничья. Если же $l=0$, то первая группа может содержать лишь одну команду, так как две команды имели бы результативную игру с командой второй группы, у которой результативная игра только одна. Таким образом, одна из этих групп содержит лишь одну команду. Но тогда оставшиеся команды нельзя разбить на $k-1$ группу, каждая из которых содержит не более трех команд.

Если $n=3k$, то все группы должны содержать ровно по 3 команды. При этом если у команд первой группы по l ничьих, то у команд второй группы по $2-l$ результативных игр. Поэтому друг против друга команды этих групп проводят не более чем $3l+3(2-l)=6$ игр — противоречие.

б) Нетрудно составить турнир 10 команд, три из которых имеют по 1 победе и 8 ничьих, четыре — по 2 победы, 2 поражения и 5 ничьих, и еще три — по 3 победы, 4 поражения и 2 ничьих.

	1	1	1	1	1	1	3	1	1
1		1	1	1	1	1	1	3	1
1	1		1	1	1	1	1	1	3
1	1	1		0	1	1	0	3	3
1	1	1	3		1	1	0	0	3
1	1	1	1	1		3	3	0	0
1	1	1	1	1	0		3	3	0
0	1	1	3	3	0	0		3	0
1	0	1	0	3	3	0	0		3
1	1	0	0	0	3	3	3	0	

Докажем, что случай $n < 10$ невозможен. Так как не все команды имеют поровну побед, ничьих и поражений, найдутся команды, которые выиграли больше встреч, чем проиграли, и команды, которые проиграли больше, чем выиграли. Предположим сначала, что в каждой из этих групп команд количества побед и поражений отличаются на 1, т. е. в одной группе команды одержали x побед, потерпели $x - 1$ поражение и $n - 2x$ встреч завершили вничью, а в другой эти числа равны соответственно $y - 1$, y и $n - 2y$. Тогда, приравнивая набранные командами очки, получаем, что $x = y - 3$. Так как $n - 2y \geqslant 0$, то $n - 2x \geqslant 6$, а поскольку $x \geqslant 1$, получаем, что $n \geqslant 8$. Пусть теперь есть команды, у которых разность между количеством побед и поражений по модулю больше 1. Аналогичные рассуждения показывают, что существуют команды, завершившие вничью по крайней мере 9 встреч. Таким образом, неравенство $n \geqslant 8$ выполнено всегда, а случай $n < 10$ возможен, только когда разность между количеством побед и поражений у любой команды по модулю не превышает 1.

Предположим, что $n = 8$. Тогда, как показано выше, есть k команд, у которых побед на одну больше, чем поражений, k команд, у которых побед на одну меньше, чем поражений, и $8 - 2k$ команд, у которых побед и поражений поровну. При этом количество ничьих у команд первой группы на 6 больше, чем у команд второй. Это возможно в единственном случае, когда эти команды имеют одну победу и 6 ничьих. Соответственно, у команд второй группы по 3 победы и 4 поражения. Команды первой группы против команд второй проводят k^2 встреч, среди которых нет ничейных (команды второй группы вничью не играли), и не больше чем k результативных (по одной на каждую команду первой группы). Значит, $k^2 \leqslant k$, т. е. $k=1$ и $n-2k=8-2k>4$ (такой турнир существует). Аналогично доказывается, что $k \leqslant 2$ при $n=9$, и $n-2k=9-2k>4$.

6. Первое решение. Пусть T_a, T_b, T_c — точки, симметричные T относительно BC, CA, AB соответственно; T' — центр окружности, описанной около треугольника $T_aT_bT_c$. Так как $CT_a=CT=CT_b$, прямая CT' является серединным перпендикуляром к T_aT_b и биссектрисой угла T_aCT_b. Следовательно, прямые CT и CT' симметричны относительно биссектрисы угла C. Аналогично прямые BT и BT', AT и AT' симметричны относительно биссектрис соответствующих углов треугольника (рис. 11).

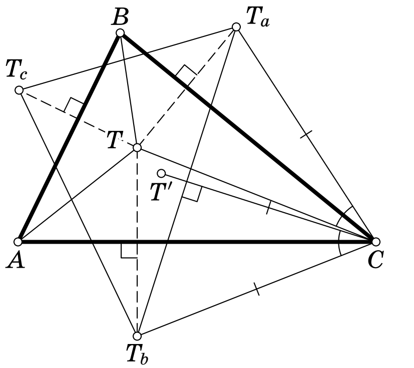


Рис. 11

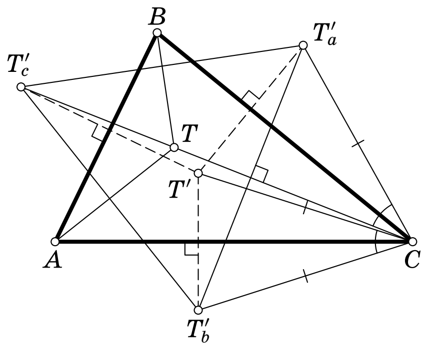


Рис. 12

Пусть теперь T'_a, T'_b, T'_c — точки, симметричные T' относительно BC, CA, AB. Рассуждая, как выше, получаем, что T — центр окружности, описанной около треугольника $T'_aT'_bT'_c$, а прямые AT, BT, CT является серединными перпендикулярами к его сторонам. Значит, углы этого треугольника равны 60°, т. е. треугольник правильный. Следовательно, точки T'_a, T'_b, T'_c лежат соответственно на прямых AT, BT, CT, а симметричные им прямые проходят через T' (рис. 12).

К о м м е н т а р и й. Описанный в решении способ получения точки T' по точке T применим к любой точке плоскости P, отличной от вершин треугольника. Соответствующая точка P' называется *изогонально сопряженной* точке P.

Точки T и T' называются соответственно *первой точкой Торричелли* и *первой точкой Аполлония* треугольника ABC. О свойствах этих точек и изогональном сопряжении можно подробнее прочитать в статье А. В. Акопяна и А. А. Заславского в № 11 «Математического просвещения».

В т о р о е р е ш е н и е. Определенная выше (см. первое решение) точка T'_c обладает следующими свойствами: $\angle T'_cAB = \angle TAC$, $\angle T'_cBA = \angle TBC$, т. е. прямые T'_cA и CA симметричны относительно биссектрисы угла TAB, а прямые T'_cB и CB — относительно биссектрисы угла TBA. Значит, точки T'_c и C изогонально сопряжены относительно треугольника TAB. Поскольку C лежит на биссектрисе угла ATB этого треугольника, T'_c тоже лежит на этой биссектрисе, т. е. прямая CT проходит через T'_c, а прямая, симметричная ей относительно AB, — через T'. Аналогично, через T' проходят две другие прямые.

Интересно, что утверждение задачи можно сформулировать так: если из точки T выпустить с равными скоростями три бильярдных шарика в направлениях, противоположных вершинам треугольника, то, отразившись от сторон треугольника, шарики столкнутся. Действительно, из первого решения видно, что пути, пройденные шариками до точки T', равны отрезкам TT'_a, TT'_b, TT'_c, являющимся радиусами окружности, описанной около треугольника $T'_aT'_bT'_c$.

10 класс

1. О т в е т: $\frac{1}{4}$.

П е р в о е р е ш е н и е. Обозначим вершины квадрата через A, B, C, D, так что L лежит на AB, M лежит на BC, N лежит на CD, K лежит на AD. Обозначим точку пересечения KM и LN через O. Обозначим длины отрезков AL и AK через x и y соответственно. Тогда по теореме Пифагора $1 - x - y = \sqrt{x^2 + y^2}$. Отсюда возведением в квадрат получаем $1 = 2x + 2y - 2xy$. Так как $AD \parallel LN \parallel BC$ и $AB \parallel KM \parallel CD$, то $OL = y$ и $OK = x$. Тогда $OM = 1 - x$ и $ON = 1 - y$. Значит, $NC = 1 - x$ и $MC = 1 - y$. Поэтому площадь треугольника NMC равна $\frac{1}{2}NC \cdot MC = \frac{1}{2}(1-x)(1-y) = \frac{1}{2}(1-x-y+xy) = \frac{1}{4}$.

В т о р о е   р е ш е н и е. Обозначим вершины квадрата так же, как в первом решении. Рассмотрим окружность ω, вписанную в квадрат. Пусть K', L' — точки ее касания со сторонами AD и AB соответственно. Это середины сторон AD и AB. Из того, что периметр треугольника AKL равен удвоенной длине отрезка AK', мы заключаем, что окружность ω является вневписанной для треугольника AKL. Из формулы, выражающей площадь треугольника через полупериметр, длину стороны и радиус вневписанной окружности, касающейся этой стороны, имеем, что $S_{AKL} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - KL\right)$. Значит,

$$S_{MNC} = \frac{1}{2}S_{MONC} = \frac{1}{2}(1 - S_{MKAB} - S_{NLAD} + 2S_{AKL}) = \\ = \frac{1}{2}\left(1 - AK - AL + \frac{1}{2} - KL\right) = \frac{1}{4}.$$

2. Пусть A, B, C, D, E — последовательные вершины внешнего пятиугольника, A', B', C', D', E' — соответствующие вершины внутренней звезды. Покажем, что каждому цвету, в который покрашена хотя бы одна сторона внешнего пятиугольника, отвечают два из образующих звезду отрезков того же цвета.

Из этого вытекает решение задачи: если на контуре пятиугольника встречаются только 2 цвета, то они чередуются, что невозможно из-за нечетности числа 5. Если же на контуре наблюдаются все три цвета, то отрезков, образующих звезду, обнаружится не менее 6 — хотя бы по два отрезка каждого цвета, а их всего 5.

Итак, рассмотрим произвольную сторону внешнего пятиугольника, скажем, AB (остальные случаи отличаются переобозначениями вершин). Пусть она синяя. Тогда отрезки AA' и BB' не синие. Остается проверить, что синими являются один отрезок звезды, примыкающий к вершине A', и один отрезок, примыкающий к вершине B'. Но два отрезка звезды, исходящих из вершины A', отличаются по цвету от отрезка AA' (который не синий) и, кроме того, различны по цвету. Значит, среди них есть синий. Точно так же рассматриваются отрезки звезды, исходящие из вершины B'.

К о м м е н т а р и й. Граф, описанный в задаче, — это знаменитый *граф Петерсона.*

3. О т в е т: таких чисел нет.

Если $x=y$, то $x^2+x+1=x^n$. В этом случае правая часть делится на x, а значит, и левая часть делится на x. Это возможно только при $x=1$. Но тогда имеем $3=1$ — противоречие.

Если $x\neq y$, то без ограничения общности можно считать, что $x>y$. Тогда $x^2>y^2+y+1$, значит, $y^2+y+1=x^1$. Итак, $(y^2+y+1)^2+(y^2+y+1)+1=y^n$. Раскрыв скобки, получим $y^4+2y^3+4y^2+3y+3=y^n$. Правая часть делится на y, значит, и левая тоже. Поэтому y — делитель 3. Но ни 1, ни 3 не годятся.

4. См. решение задачи 5 для 8-го класса.

5. Так как $\angle XAB=\angle XBC$, то все точки X лежат на одной окружности ω, проходящей через точки A и B. Опустим на прямую BP перпендикуляр OY. Из перпендикулярности PX и OX получаем, что точки Y, O, P, X лежат на одной окружности. Отсюда получаем равенства ориентированных углов $\angle BYX=\angle PYX=\angle POX=\angle BAX$. Значит, точка Y лежит на окружности ω. Поэтому все точки P лежат на прямой, проходящей через точку B и точку пересечения ω с окружностью, построенной на OB как на диаметре.

6. Обозначим наши операции через $f(x)=\dfrac{1+x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1-x}{x}$.

Докажем сначала, что, последовательно применяя их, мы можем получить операции, обратные к f и g.

Имеем $f(g(f(x)))=-x$ и $f(g(f(g(f(x)))))=\dfrac{1}{1+x}$ при $x\neq-1$. Поэтому

$$f(g(f(f(g(f(x))))))=x$$

при $x\neq-1$ и

$$f(g(f(g(f(g(x))))))=x$$

при $x\neq1$.

Далее, из 2 можно получить -2 (и наоборот). Кроме того, $f(-2)=1/2$, $g(1/2)=1$. Значит, можно получить 1 из 2.

Так как $g(-1)=-2$, а из -2 можно получить 2, можно получить 2 из -1.

Так как $g(2)=-1/2$ и $f(-1/2)=-1$, можно получить -1 из -2.

Итак, обратимость доказана.

Значит, достаточно доказать, что из единицы можно получить все положительные рациональные числа. Докажем это индукцией по сумме числителя и знаменателя несократимой дроби, представляющей наше рациональное число $\frac{m}{n}$.

База индукции для $m+n=2$ очевидна. Допустим, что при $m+n<k$ число $\frac{m}{n}$ можно получить из единицы. Докажем, что тогда и при $m+n=k$ число $\frac{m}{n}$ получается из единицы.

Если

$$m>n, \quad \text{то} \quad \frac{m}{n}=1+\frac{1}{\dfrac{n}{m-n}} \quad \text{и} \quad n+(m-n)=m<m+n,$$

поэтому число $\frac{n}{m-n}$ можно получить по предположению индукции. Если же

$$m<n, \quad \text{то} \quad \frac{m}{n}=\frac{1}{1+\dfrac{n-m}{m}} \quad \text{и} \quad (n-m)+m=n<m+n,$$

поэтому число $\frac{n-m}{m}$ можно получить по предположению индукции. Значит, в обоих случаях число $\frac{m}{n}$ можно получить из единицы, индукционный переход доказан.

11 класс

1. Ответ: может; наибольшее возможное значение равно 9.

Если секторы занумерованы в следующем порядке:

$$1, 11, 2, 12, 3, 13, 4, 14, 5, 15, 6, 16, 7, 17, 8, 18, 9, 19, 10, 20,$$

то наименьшая из разностей между соседними номерами равна 9. Эта величина не может быть больше 9, так как в противном случае при любой нумерации рядом (и слева, и справа) с сектором номер 10 может находиться только сектор с номером 20, что невозможно.

2. Ответ: 4014.

Преобразуем второе уравнение:

$$4^x + 4^{-x} = 2\cos ax + 4 \;\Leftrightarrow\; 4^x - 2 + 4^{-x} = 2(1+\cos ax) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (2^x - 2^{-x})^2 = 4\cos^2\frac{ax}{2} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{x/2} - 4^{-x/2} = 2\cos\frac{ax}{2}, \\ 4^{x/2} - 4^{-x/2} = -2\cos\frac{ax}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{x/2} - 4^{-x/2} = 2\cos\frac{ax}{2}, \\ 4^{-x/2} - 4^{x/2} = 2\cos\frac{ax}{2}. \end{array}\right.$$

Оба уравнения этой совокупности сводятся к первому уравнению из условия задачи заменами $x = 2y$ и $x = -2z$ соответственно. Поэтому каждое из этих двух уравнений имеет 2007 корней. Если эти уравнения имеют общий корень $x = x_0$, то $4^{x_0/2} - 4^{-x_0/2} = 0$ и $\cos\frac{ax_0}{2} = 0$, что невозможно. Следовательно, эти уравнения не имеют общих корней, а второе уравнение из условия задачи имеет $2\cdot 2007 = 4014$ корней.

3. Ответ: 6, 42, 1806.

Пусть $N = p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$ $(k\geqslant 2)$ — произведение нескольких различных простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, удовлетворяющее условию задачи. Поскольку по условию N кратно четному числу $p_2 - 1$, оно само четно и $p_1 = 2$. Число $N = p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$ имеет единственный делитель p_1 из интервала $(1, p_2)$, но $p_2 - 1$ также принадлежит этому интервалу, значит, $p_2 - 1 = p_1 = 2$. Таким образом, $p_2 = 3$, а N может принимать значение $2\cdot 3 = 6$.

Если $k\geqslant 3$, то по условию число $p_3 - 1$, принадлежащее интервалу (p_2, p_3), является делителем числа N. Этому интервалу может принадлежать единственный делитель N — число $p_1\cdot p_2 = 6$. Следовательно, $p_3 = p_1\cdot p_2 + 1 = 7$. Число $2\cdot 3\cdot 7 = 42$ удовлетворяет условию задачи.

Если $k\geqslant 4$, то по условию четное число $p_4 - 1$, принадлежащее интервалу (p_3, p_4), также является делителем N. Из четных делителей числа N этому интервалу могут принадлежать лишь числа $p_1\cdot p_3 = 14$ и $p_1\cdot p_2\cdot p_3 = 42$. Число $15 = p_1\cdot p_3 + 1$ является составным, значит, $p_4 = p_1\cdot p_2\cdot p_3 + 1 = 43$. Число $2\cdot 3\cdot 7\cdot 43 = 1806$ удовлетворяет условию задачи.

Если $k\geqslant 5$, то по условию четное число $p_5 - 1$, принадлежащее интервалу (p_4, p_5), также должно являться делителем N.

Из четных делителей числа N этому интервалу могут принадлежать лишь числа $p_1 \cdot p_4 = 86$, $p_1 \cdot p_2 \cdot p_4 = 258$, $p_1 \cdot p_3 \cdot p_4 = 602$ и $p_1 \cdot p_3 \cdot p_3 \cdot p_4 = 1806$. Каждое из чисел 87, 259, 603, 1807 является составным. Значит, у числа N не может быть более четырех различных простых делителей.

4. Ответ: $n = 5$.

По теореме синусов для треугольников SA_kO ($k = 1, 2, \dots, n$) имеем

$$\sin \angle SOA_k = \frac{SA_k}{SO} \sin \angle SA_kO.$$

Так как правая часть этого равенства не зависит от выбора $k = 1, 2, \dots, n$, величина $\sin \angle SOA_k$ также не зависит от этого выбора. Следовательно, при различном выборе k величина угла $\angle SOA_k$ может принимать не более двух различных значений, каждое из которых вместе с величинами длин SO, SA_k и угла $\angle SOA_k$ однозначно определяет треугольник SA_kO.

Если $n \geqslant 5$, то среди треугольников SA_kO ($k = 1, 2, \dots, 5$) есть по крайней мере три одинаковых. Пусть это, для определенности, треугольники SA_1O, SA_2O и SA_3O. Так как $OA_1 = OA_2 = OA_3$, точка O — центр описанной около треугольника $A_1A_2A_3$ окружности. Пусть SH — высота пирамиды $SA_1A_2A_3$. Тогда точка H также является центром описанной около $A_1A_2A_3$ окружности, т. е. $H = O$.

При $n = 4$ из условия не следует, что SO — высота пирамиды. Например, если $A_1A_2A_3A_4$ — равнобокая трапеция, O — точка пересечения ее диагоналей, H — центр описанной около нее окружности, то для пирамиды $SA_1A_2A_3A_4$, в которой SH является высотой к основанию, выполнены все условия задачи. Действительно, во-первых, $SA_1 = SA_2 = SA_3 = SA_4$ в силу равенства (по двум катетам) треугольников SHA_1, SHA_2, SHA_3 и SHA_4, а во-вторых, $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \angle SA_3O = \angle SA_4O$ в силу равенства (по трем сторонам) равнобедренных треугольников SA_1A_3 и SA_2A_4. При этом

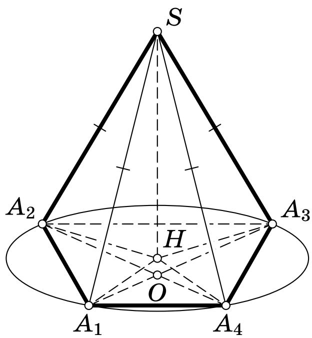


Рис. 13

$H \neq O$. При $n \leqslant 4$ из условия тем более не следует, что SO — высота пирамиды (соответствующий пример получается из предыдущего рассмотрением его части — пирамиды $SA_1A_2A_3$).

5. Ответ: $2n-4$.

Пусть из некоторой раскраски P можно указанными преобразованиями сделать полностью черный квадрат. Тогда те же преобразования в обратном порядке переведут полностью черный квадрат в раскраску P. При каждом из этих преобразований одинаково раскрашенные строки или противоположно раскрашенные строки (т. е. строки, соответствующие клетки которых раскрашены в разные цвета) переходят также в одинаково или противоположно раскрашенные. Следовательно, все строки раскраски P были одинаково или противоположно раскрашены. Наоборот, из каждой раскраски с этим свойством можно указанными преобразованиями сделать сначала все строки одинаковыми, а затем — и полностью черными. Каждая такая раскраска удовлетворяет одному из следующих условий.

1°. В каждой строке все клетки одного цвета. Тогда из условия задачи следует, что в первой и последней строках все клетки черные, т. е. всего черных клеток не менее $2n$.

2°. В каждой строке есть не менее двух черных клеток, т. е. всего черных клеток не менее $2n$.

3°. Существует строка, в которой ровно одна черная клетка. Тогда либо первая, либо последняя строка с ней не совпадает и, следовательно, противоположна ей, т. е. содержит $n-1$ черную клетку. В этом случае общее число черных клеток не меньше $(n-1)\cdot 1 + 1\cdot(n-1) = 2n-2$.

Таким образом, в любом случае в раскраске P должно быть не менее $2n-2$ черных клеток. Значит, число клеток, которые нужно предварительно перекрасить, должно быть не меньше $2n-4$. На рис. 14 изображен квадрат $n \times n$, все строки которого раскрашены одинаково или противоположно, а число предварительно перекрашенных в черный цвет клеток равно $2n-4$.

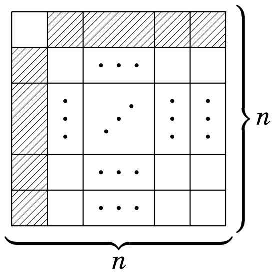


Рис. 14

6. Пусть γ_A и γ_C — окружности, описанные около треугольников AHC' и CHA' соответственно. Так как точки B и H симметричны относительно средней линии $A'C'$ треугольника ABC, то $C'H = C'B = C'A$; $A'H = A'B = A'C$, т. е. треугольники AHC' и CHA' равнобедренные. Поэтому $A'C'$ ($\parallel AC$) — общая касательная к окружностям γ_A и γ_C.

Пусть S — точка пересечения прямых HM и $A'C'$, тогда $SC'^2 = SM \cdot SH = SA'^2$, т. е. S — середина $A'C'$ и $\angle CBB' = \angle CBS$.

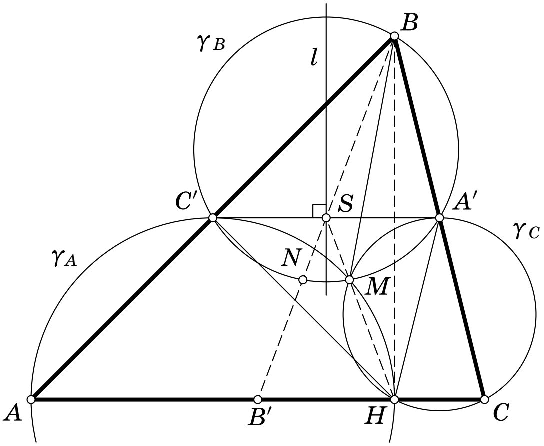


Рис. 15

Пусть γ_B — окружность, описанная вокруг треугольника $BA'C'$. Покажем, что точка M лежит на этой окружности. Действительно, если α, β, γ — углы треугольника ABC, то $\angle C'MA' = 2\pi - \angle C'MH - \angle A'MH = 2\pi - (\pi - \alpha) - (\pi - \gamma) = \alpha + \gamma = \pi - \beta$.

Пусть l — серединный перпендикуляр к $A'C'$. Окружность γ_B симметрична относительно l. Так как $\angle HSC' = \angle BSC' = \angle A'SB'$, отрезки SH и SB' симметричны относительно l. Значит, точка N, симметричная точке M относительно l, лежит на γ_B и на BB', а дуги $C'M$ и NA' равны. Вписанные углы $\angle C'BM$ и $\angle A'BN$ опираются на эти дуги, т. е. равны. Итак, $\angle ABM = \angle C'BM = \angle A'BN = \angle CBB'$.

7. Ответ: а) нет; б) да.

а) Первое решение. Пусть Коля указал три прямые l_1, l_2 и l_3. Без ограничения общности далее считаем, что эти прямые различны и каждая из них имеет с данным кругом хотя бы одну общую точку. Покажем, что найдутся два многоугольника, удовлетворяющие условиям задачи и пересекающие каждую из этих прямых, периметры которых отличаются более чем на 0,6.

Пусть A и B — середины двух дуг, высекаемых прямой l_1 на данной окружности (AB — диаметр данного круга). Пусть также C и D — отличные от A и B точки пересечения данной окружности с прямыми l_2 и l_3 соответственно. Многоугольник с вершинами A, B, C и D удовлетворяет условию задачи и пересекает каждую из прямых l_1, l_2 и l_3. Его периметр P_1 не превосходит суммы длин отрезков AC, CB, AD и DB, а значит, и периметра вписанного в данный круг квадрата, т. е. $P_1 \leqslant 4\sqrt{2} < 4 \cdot 1{,}42 = 5{,}68$. Добавляя к этому многоугольнику вершины на данной окружности, можно добиться того, что его периметр P_2 станет близок к 2π, именно, $P_2 > 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28$.

Коля не сможет «отличить» два указанных многоугольника, а значит, не сможет и наверняка угадать периметр с точностью до $0{,}3 < (P_2 - P_1)/2$.

В т о р о е р е ш е н и е. Предположим, что Коле удалось придумать способ наверняка угадать за 3 хода периметр многоугольника с точностью до 0,3. Для каждой из трех указанных Колей прямых Миша отвечает, пересекает ли эта прямая загаданный многоугольник. По предположению для каждого из 8 возможных наборов таких ответов Коля придуманным им способом определяет значение периметра с точностью до 0,3. Следовательно, настоящее значение периметра может принадлежать одному из 8 числовых отрезков суммарной длины не более $8 \cdot 0{,}6 = 4{,}8$. С другой стороны, периметр многоугольника из условия задачи может принимать любое значение из интервала $(0, 2\pi)$ длины $2\pi > 4{,}8$. Следовательно, среди них найдется такой многоугольник, угадать периметр которого с требуемой точностью Коле не удастся. Приходим к противоречию.

б) Построим систему координат Oxy с началом координат в центре O данного круга. Пусть q — натуральное число. Для любого $k = 0, 1, \ldots, q-1$ обозначим через Ox_k ось, повернутую против часовой стрелки вокруг точки O на угол $\varphi_k := \pi k/q$ $(Ox_0 \equiv Ox)$.

Для любого натурального p при каждом фиксированном $k = 0, 1, \ldots, q-1$ мы сможем найти приближенное значение $\hat{d}_k$ длины d_k ортогональной проекции $[a_k, b_k]$ ($a_k \leqslant 0 \leqslant b_k$) загаданного многоугольника на ось Ox_k с точностью до $1/2^p$. Для этого будем последовательно указывать прямые $l_{k,m}$ ($m = 1, 2, \ldots, p$), перпендикулярные оси Ox_k и пересекающие ее в точках с координатами $r_m/2^m$. Положим $r_1 = 1$ и $r_{m+1} = 2r_m + 1$, если прямая $l_{k,m}$ пересекла загаданный многоугольник, и $r_{m+1} = 2r_m - 1$ в противном случае. Тогда величина $r_{p+1}/2^{p+1}$ равна b_k с точностью до $1/2^{p+1}$. Аналогично, за оставшиеся p попыток определим с той же точностью величину a_k.

Покажем, что величина $2\sin\frac{\pi}{2q} \cdot \sum\limits_{k=0}^{q-1} \hat{d}_k$ при правильном выборе p и q определяет с требуемой точностью периметр P загаданного многоугольника. Пусть N — количество его сторон. Обозначим их Δ_j ($j = 1, 2, \ldots, N$), через $|\Delta_j|$ обозначим их длины, а через $D_{j,k}$ — длины их ортогональных проекций на ось Ox_k. Каждая точка интервала (a_k, b_k) является ортогональной проекцией ровно двух точек границы загаданного многоугольника. Значит, $\sum\limits_{j=1}^{N} D_{j,k} = 2d_k$. Положим

$$\Lambda_j := \sum_{k=0}^{q-1} D_{j,k} = \sum_{k=0}^{q-1} |\Delta_j| \cos\vartheta_{k,j} = |\Delta_j| \sum_{k=0}^{q-1} \cos(\psi_j + \varphi_k),$$

где $\vartheta_{k,j} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — величины углов между стороной Δ_j и осью Ox_k ($k = 0, 1, \ldots, q-1$; считаем знак величины угла положительным, если кратчайший поворот, переводящий сторону Δ_j в параллельный оси Ox_k отрезок, происходит против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае), а $\psi_j \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{q}\right)$ — меньшая из этих величин. Имеем

$$2\Lambda_j \sin\frac{\pi}{2q} = |\Delta_j| \sum_{k=0}^{q-1} 2\sin\frac{\pi}{2q}\cos(\psi_j + \varphi_k) =$$

$$= |\Delta_j| \sum_{k=0}^{q-1} \left(\sin\left(\psi_j + \varphi_k + \frac{\pi}{2q}\right) - \sin\left(\psi_j + \varphi_k - \frac{\pi}{2q}\right)\right) =$$

$$= |\Delta_j| \cdot \left(\sin\left(\psi_j + \frac{(2q-1)\pi}{2q}\right) - \sin\left(\psi_j - \frac{\pi}{2q}\right)\right) = 2|\Delta_j| \cdot \sin\left(\psi_j + \frac{(2q-1)\pi}{2q}\right).$$

Так как $\psi_j \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{q}\right)$, мы получаем, что $\left|1 - q - \frac{2q\psi_j}{\pi}\right| \leqslant 1$ и

$$\left||\Delta_j| - \Lambda_j \sin\frac{\pi}{2q}\right| = |\Delta_j| \cdot \left|1 - \sin\left(\psi_j + \frac{(2q-1)\pi}{2q}\right)\right| =$$

$$= |\Delta_j| \cdot \left(\cos\left(\frac{\psi_j}{2} + \frac{(2q-1)\pi}{4q}\right) - \sin\left(\frac{\psi_j}{2} + \frac{(2q-1)\pi}{4q}\right)\right)^2 =$$

$$= 2\,|\Delta_j| \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\psi_j}{2} + \frac{(2q-1)\pi}{4q}\right)\right) =$$

$$= 2\,|\Delta_j| \cdot \sin^2\left(\frac{(1-q)\pi}{4q} - \frac{\psi_j}{2}\right) \leqslant 2\,|\Delta_j| \cdot \left(\frac{(1-q)\pi}{4q} - \frac{\psi_j}{2}\right)^2 =$$

$$= 2\,|\Delta_j| \cdot \frac{\pi^2}{16q^2}\left(1 - q - \frac{2q\psi_j}{\pi}\right)^2 \leqslant \frac{\pi^2|\Delta_j|}{8q^2}.$$

Отсюда и из неравенства $P < 2\pi$ следует, что

$$\left|P - \sin\frac{\pi}{2q}\sum_{j=1}^{N}\Lambda_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{N}\left(|\Delta_j| - \Lambda_j \sin\frac{\pi}{2q}\right)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{N}\frac{\pi^2|\Delta_j|}{8q^2} = \frac{\pi^2 P}{8q^2} < \frac{\pi^3}{4q^2}.$$

Значит,

$$\left|P - 2\sin\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} d_k\right| = \left|P - \sin\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{j=1}^{N} D_{j,k}\right| =$$

$$= \left|P - \sin\frac{\pi}{2q}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{q-1} D_{j,k}\right| = \left|P - \sin\frac{\pi}{2q}\sum_{j=1}^{N}\Lambda_j\right| < \frac{\pi^3}{4q^2}.$$

Отсюда получаем

$$\left|P - 2\sin\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1}\hat{d}_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|P - 2\sin\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} d_k\right| + 2\sin\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1}|d_k - \hat{d}_k| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi^3}{4q^2} + \frac{\pi}{q} \cdot \frac{q}{2^p} = \frac{\pi^3}{4q^2} + \frac{\pi}{2^p}.$$

Полагая $p = 11$ и $q = 90$, получаем $\left|P - 2\sin\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1}\hat{d}_k\right| < \frac{\pi^3}{32000} + \frac{\pi}{2000} < 0{,}003$ (так как $\pi < \sqrt{10} < 3{,}2$). При этом для определения величин $\hat{d}_k$ мы потратили $2p \cdot q = 1980 < 2007$ попыток.

К о м м е н т а р и й. Предложенный в решении способ приближенного нахождения периметра выпуклого многоугольника с помощью длин его ортогональных проекций на различные прямые приводит нас к важной формуле современного анализа. Формула Фавара

$$P = \int_0^\pi l(\varphi)\, d\varphi$$

позволяет находить точные значения периметра P произвольной выпуклой фигуры с помощью интеграла от длины $l(\varphi)$ ее ортогональной проекции на прямую, образующую угол φ с осью Ox.

Например, эта формула позволяет нам установить интересный факт, что всякая выпуклая фигура, длина ортогональной проекции которой на любую прямую равна d (такие фигуры называются *фигурами постоянной ширины*), имеет тот же периметр, что и круг такого диаметра.

[1] Фавар (Favard J.). Définition de la longueur et de l’aire. — C. R. Acad. Sci. Paris. 1932. V. 194. P. 344–346.

[2] Гарднер М. Математические досуги, гл. 23. Кривые постоянной ширины. — М.: «Мир», 2000.

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс (1139 работ)

Баллы	Задача						
	1	2	3	4	5	6а	6б
0	546	616	835	910	686	839	1112
1	149	70	97	17	4	15	2
2	284	387	148	36	0	137	3
3	17	13	7	2	1	27	14
4	143	53	2	4	1	121	6
5			50	3	1		2
6				167	2		
7					444		

7 класс (835 работ)

Баллы	Задача						
	1	2	3	4	5	6а	6б
0	486	454	647	433	646	815	827
1	39	11	19	116	0	2	0
2	23	38	32	67	0	0	1
3	109	294	29	0	3	4	2
4	178	38	8	1	0	14	0
5			19	0	0		5
6			81	218	2		
7					184		

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс (595 работ)

Оценка	Задача					
	1	2	3	4	5	6
0	50	90	82	351	146	310
–	142	463	349	176	279	279
–.	94	7	36	2	26	0
∓	38	12	46	3	89	4
+/2	0	3	30	0	20	0
±	14	3	6	6	20	0
+.	10	1	6	6	2	0
+	247	16	40	51	13	2

9 класс (591 работа)

Оценка	Задача						
	1	2	3	4	5а	5б	6
0	58	153	254	162	339	406	423
–	232	266	211	394	246	184	168
∓	144	37	100	6	6	1	0
+/2	75	7	1	1	0	0	0
±	20	26	6	9	0	0	0
+	62	102	19	19	0	0	0

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

10 класс (733 работы)

Оценка	Задача					
	1	2	3	4	5	6
0	120	53	283	211	509	399
−	179	316	413	316	223	319
−.	53	1	1	0	0	8
∓	1	28	14	87	1	3
+/2	0	0	0	24	0	0
±	3	32	3	31	0	2
+.	19	2	1	0	0	0
+	358	301	18	64	0	2

11 класс (1018 работ)

Оценка	Задача							
	1	2	3	4	5	6	7а	7б
−	190	846	428	813	672	958	943	997
−.	15	74	196	75	85	35	40	15
∓	197	50	255	32	224	11	18	5
±	235	30	41	58	13	3	8	1
+.	48	2	45	19	4	4	1	0
+	333	16	53	21	20	7	8	0

П Р И Г Л А Ш Е Н И Е
на устную олимпиаду по геометрии

1 апреля 2007 года состоится пятая устная олимпиада по геометрии для школьников Москвы и Московской области. Она проводится в рамках Третьей Всероссийской олимпиады по геометрии памяти И. Ф. Шарыгина и в ней могут принять участие ученики 8–11 классов. Олимпиада рассчитана на школьников, успешно выступивших в городской математической олимпиаде, а также на школьников, увлекающихся геометрией.

Призеры олимпиады будут награждены дипломами оргкомитета и математической литературой. Победители олимпиады — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур Всероссийской олимпиады по геометрии И. Ф. Шарыгина, который состоится ориентировочно 30 июля – 1 августа 2007 года в г. Дубне под Москвой.

Олимпиада будет проходить в помещении школы № 444 по адресу: ул. Нижняя Первомайская, д. 14. Проезд: метро Первомайская (выход к Первомайской улице, последний вагон из центра), далее перейти ул. Первомайскую и идти по 9-й Парковой улице, повернуть с нее направо на Нижнюю Первомайскую (всего около 5 минут). Начало олимпиады в 10^{30}.

Участников просят иметь при себе: сменную обувь, письменные принадлежности, бумагу для записей, удостоверение личности или справку из школы.

Так как ожидается большое количество участников, то желающих принять участие в олимпиаде просим до 28 марта зарегистрироваться по телефонам: 465–23–52; 465–60–52 или по электронной почте по адресу sch444.edu@mtu-net.ru, указав свою фамилию, имя, школу и класс.

Материалы олимпиад прошлых лет можно посмотреть на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

ДЛЯ ЗАМЕТОК

LXX Московская математическая олимпиада.
Задачи и решения

Формат бумаги 60×90 $^1/_{16}$. Объём 2,5 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 3000 экз. Заказ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241–05–00.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

Департамент образования города Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской обл.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXX

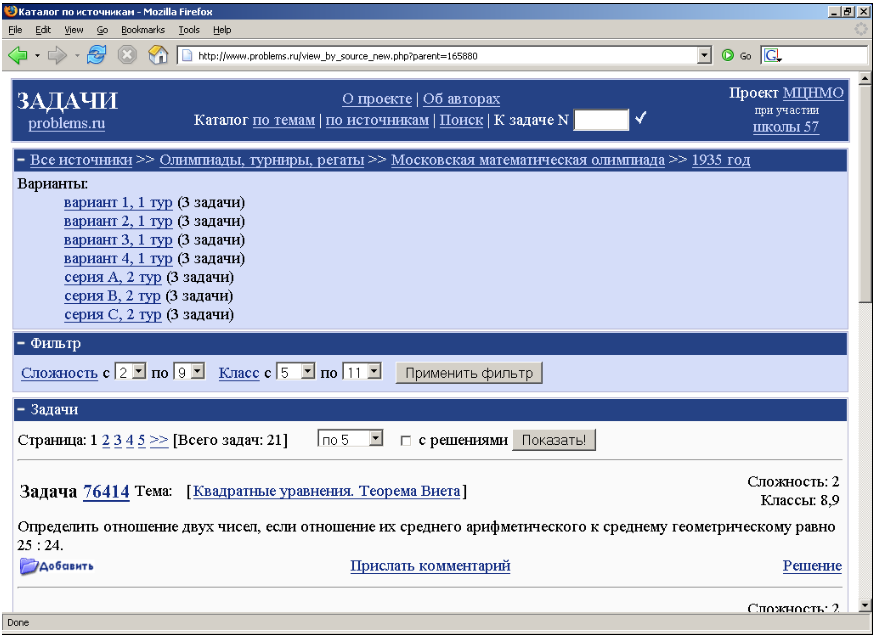
МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

(Московская региональная олимпиада школьников)

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Издательство МЦНМО
Москва, 2007

Все задачи Московских математических олимпиад и других математических соревнований на сайте `problems.ru`



Все книге по математике в магазине «Математическая книга» в МЦНМО

В магазине представлен наиболее полный ассортимент книг издательства МЦНМО. Эти книги продаются по издательским ценам. Здесь также можно найти книги по математике ведущих издательств, таких как «Мир», Физматлит, УРСС, «Факториал», «Регулярная и хаотическая динамика», бюро «Квантум», Фонд математического образования и просвещения.

В отделе школьной литературы представлен широкий ассортимент книг для школьников, учителей, руководителей математических кружков. В отделе вузовской и научной литературы можно найти учебники и научные монографии ведущих российских и зарубежных математиков. В магазине также имеются отделы «Книга — почтой» и букинистический.

Адрес магазина: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Проезд до ст. м. «Смоленская» или «Кропоткинская». Телефон для справок: 241–72–85.

Магазин работает ежедневно кроме воскресенья с 11^{30} до 20^{00}.

E-mail: biblio@mccme.ru http://biblio.mccme.ru/

И Н Ф О Р М А Ц И Я   О   Н А Б О Р Е

в московские специализированные школы и классы на 2007/2008 учебный год*

Школа, адрес, тел., адрес в Интернете	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 2 ул. Фотиевой, 18 137–17–69 http://www.sch2.ru/ 137–69–31 http://www.school2.ru/	7 и 8 физ.-матем., 8 прогр.; *добор* в 10 и 9	Приём заявлений с 31 января; вступительные испытания с 16 марта
№ 57 М. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 291–85–72 291–54–58 http://www.sch57.msk.ru/	8 матем., 9 матем., 9 гум.	матем. по средам в 16^{00} с 4 апр.; гум. по понед. в 16^{00} с 2 апр.
№ 91 ул. Поварская, 14 290–35–58 http://www.91.ru/	8 матем.; *добор* в 9 матем.	5, 9, 12, 16 и 19 апр. в 16^{00} (не менее 4 собесед.)
№ 179 ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 692–48–51 692–01–05 http://www.179.ru/	8, 9, 10 самоопред. (профил. гр.: ист.-фил., матем., ест.-научн.), 9 матем., 10 ист.-фил., 6 изобр; *добор* в 7, 9, 10 изобрет., 10 матем., 10 ист.-фил.	четверг и суббота в 17^{00} с 10 марта
№ 192 Ленинский просп., 34-А 137–33–55 137–72–85 http://www.sch192.ru/ mail@sch192.ru	5 ест.-научный, 7 био.-хим., физ.-матем., 9 физ.-хим., 10 физ.-хим., физ.-матем.; *добор* в 6 подготов. к лицейск., 8, 9, 10 био.-хим., 8, 9 физ.-матем.	март–май по пятницам в 16^{00}
№ 218 Дмитровское ш., 5а 976–19–85 sch218.edu@mtu-net.ru http://www.mccme.ru/schools/218/	7 разноур. обуч. (матем. и рус. яз.), 8 индив. уч. планы с возможн. углубл. и расшир. изучения матем., физ., информ., рус. и ин. языков, литерат.; *добор* в 9 и 10 (+ углубл. биол. и хим.), широкий выбор спецкурсов	запись на собеседование с 15 марта по телефону *Окончание на 3-й странице обложки*

* Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно. Обучение в школах (классах) бесплатное.

Окончание. Начало на 4-й странице обложки

Школа, адрес, тел., адрес в Интернете	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 444 465–60–52 Ниж. Первомайская ул., 14 http://schools.keldysh.ru/sch444/	8 матем.-инф.-физ., 9 матем.-инф.-физ.; *добор* в 10 матем.	март
№ 654 ул. Юных Ленинцев, 35, к. 2 179–08–11 179–73–04 178–85–04 http://www.co654.ru http://www.schools.keldysh.ru/co654/	8, 9, 10: физ.-матем., информ.-технол., био-хим., филолог., эк.-геогр., соц.-гум.	заявления с 1 марта; вступительные испытания в апреле–мае
№ 1101 ул. Акад. Варги, 34 339–77–39 http://sch1101.mosedu.ru	7 матем.-информ., 7 экон.-геогр.	собеседования по средам с 1 марта в 15^{00}
№ 1514 ул. Крупской, 12 131–80–38 131–80–33 http://www.1514.ru	9 культуролог.; *добор* в 8 матем., гум., 10 матем., гум., культуролог.	с февраля по субботам в 15^{30}
№ 1537 ул. Проходчиков, 9 188–17–74 lit1537@mail.ru http://lit1537.ru	8 матем., 10 матем.	конец марта
№ 1543 ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 433–16–44 434–26–44 http://www.1543.ru	8 матем., физ.-хим., био., гум.	апрель
СУНЦ МГУ 445–11–08 Кременчугская ул., 11 priem@pms.ru http://www.pms.ru	10 физ.-матем., комп.-информ., хим., био., 11 физ.-матем.	в Москве в апреле, в других городах с марта по май
«Интеллектуал» 445–52–10 Кременчугская ул., 13 http://intellectual3.narod.ru http://pa-int.narod.ru/pr.html	5, 7 с углуб. изучением ряда предм. (физ.-матем., био.-хим. и гум.); *добор* в 6, 8, 9, 10.	запись на экзамены с февраля, экзамены в конце марта – начале апреля.

Более подробная информация о наборе в эти и другие школы — на сайте http://www.mccme.ru