8 класс

1. Про числа a и b известно, что $a = b + 1$. Может ли оказаться так, что $a^4 = b^4$?

Ответ: да, может.

Пусть $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, тогда $a^4 = b^4 = \frac{1}{16}$.

Можно доказать, что этот пример — единственный (от учащихся это не требуется). Действительно, $a^4 = b^4 \Leftrightarrow |a| = |b|$. *Случай* $a = b$ *невозможен, случай* $a = -b$ *даёт указанный пример.*

$+$ *приведен верный пример*

$-$ *приведен только ответ «может»*

2. Обозначим две какие-нибудь цифры буквами A и X. Докажите, что шестизначное число $XAXAXA$ делится на 7 без остатка.

$\overline{XAXAXA} = \overline{XA} \cdot 10000 + \overline{XA} \cdot 100 + \overline{XA} = \overline{XA} \cdot 10101$. Так как $10101 = 7 \cdot 1443$, то $XAXAXA$ делится на 7 без остатка.

$+$ *верное обоснованное решение*

$-$ *приведен только конкретный пример*

3. В 8 «Г» классе хватает двоечников, но Вовочка учится хуже всех. Педсовет решил, что либо Вовочка должен к концу четверти исправить двойки, либо его исключат. Если Вовочка исправит двойки, то в классе будет 24% двоечников, а если его выгонят, то двоечников станет 25%. Какой процент двоечников в 8 «Г» сейчас?

Ответ: 28%.

Пусть сейчас в классе n учеников, из которых k двоечников. Если Вовочка исправит двойки, то двоечников станет $k-1$, поэтому $\frac{k-1}{n} = 0,24$. Если же Вовочку выгонят, то двоечников также станет $k-1$, а учеников в классе будет $n-1$. Поэтому $\frac{k-1}{n-1} = 0,25$. Разделив почленно первое уравнение на второе, получим, что $\frac{n-1}{n} = 0,96 \Leftrightarrow n = 25$. Тогда $k - 1 = 0,24 \cdot 25 = 6$, то есть $k = 7$. Следовательно, сейчас процент двоечников в классе составляет $\frac{7}{25} \cdot 100\% = 28\%$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верно найдено количество двоечников, но не найден их процент*

$+/2$ *верно и обоснованно найдено количество учеников в классе, но ответ в задаче не получен*

$\mp$ *числа* n *и* k *найдены «подбором»*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

4. Прямоугольный лист бумаги $ABCD$ согнули так, как показано на рисунке. Найдите отношение $DK : AB$, если C_1 — середина AD.

Ответ: $\frac{DK}{AB} = \frac{1}{3}$.

Из условия следует, что треугольники BC_1K и BCK равны, значит, $BC_1 = BC$. Тогда в прямоугольном треугольнике BAC_1 катет, противолежащий углу ABC_1, равен половине гипотенузы, то есть $\angle ABC_1 = 30^\circ$. Следовательно, $\angle AC_1B = 60^\circ$, тогда $\angle DC_1K = 30^\circ$.

Поэтому $DK = \frac{1}{2}C_1K = \frac{1}{2}CK = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}AB$.

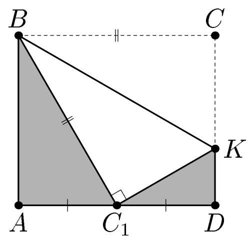


Рис. 8.4

$+$ *верное обоснованное решение*

$-$ *приведен только ответ*

5. Шестнадцать футбольных команд из шестнадцати стран провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по одному матчу. Могло ли оказаться так, что каждая команда сыграла во всех странах, кроме своей родины?

Ответ: нет, не могло.

Предположим, что такое возможно. Поскольку каждая команда провела 15 матчей и играла в каждой стране, кроме своей, то в каждой чужой стране она провела ровно по одной игре. Тогда в каждой стране побывало по одному разу ровно 15 команд. Но в каждом матче участвуют две команды, поэтому количество команд, сыгравших в каждой стране, должно быть чётным. Полученное противоречие показывает, что указанная ситуация невозможна.

Решение должно включать три «ключевых» момента: 1) *каждая команда сыграла по разу в каждой стране*; 2) *каждая страна принимала все команды по одному разу*; 3) *количество участников матчей должно быть четным*

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *в рассуждениях отсутствует хотя бы один из трех «ключевых» моментов*

$-$ *приведен только ответ*

6. На сторонах AB и CA равностороннего треугольника ABC выбраны точки P и R соответственно так, что $AP = CR$. Точка M — середина отрезка PR. Докажите, что $BR = 2AM$.

На отрезке BC отметим точку Q такую, что $CQ = CR$ (см. рис. 8.6). Тогда треугольник CQR — равнобедренный с углом 60°, то есть равносторонний. Следовательно, $\angle CRQ = \angle CAB = 60^\circ$, поэтому $RQ || AB$.

Аналогично, треугольник PBQ — равносторонний и $PQ||AC$. Следовательно, $PQRA$ — параллелограмм. Так как M — середина диагонали PR этого параллелограмма, то она же является и серединой диагонали AQ, следовательно, $AQ = 2AM$. Кроме того, $ARQB$ — равнобокая трапеция ($QR||AB$, $AR = BQ$), значит, ее диагонали AQ и BR равны. Таким образом, $BR = 2AM$, что и требовалось доказать.

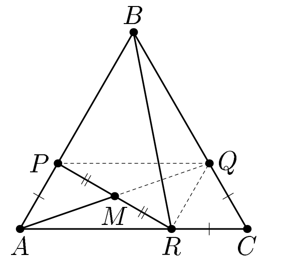


Рис. 8.6

+ *верное обоснованное решение*

+/2 *задача не решена, но доказано, что* $AQ = 2AM$

9 класс

1. Пройдя 4/9 длины моста, пешеход заметил, что его догоняет машина, еще не въехавшая на мост. Тогда он повернул назад и встретился с ней у начала моста. Если бы он продолжил свое движение, то машина догнала бы его у конца моста. Найдите отношение скоростей машины и пешехода.

Ответ: 9.

Из условия задачи следует, что время, которое требуется машине, чтобы подъехать к мосту, равно времени, которое требуется пешеходу, чтобы пройти 4/9 моста. Следовательно, если пешеход продолжит движение, то к моменту въезда машины на мост, он пройдет 8/9 моста. Значит, за то время, пока машина проезжает мост, пешеход успевает пройти его девятую часть, поэтому скорость машины в 9 раз больше скорости пешехода.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

2. Существуют ли числа p и q такие, что уравнения $x^2 + (p-1)x + q = 0$ и $x^2 + (p+1)x + q = 0$ имеют по два различных корня, а уравнение $x^2 + px + q = 0$ не имеет корней?

Ответ: да, существуют.

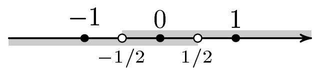


Рис. 9.2

Например, $p = 0$, $q = 0,1$. Тогда первые два уравнения имеют одинаковый положительный дискриминант ($D = (\mp 1)^2 - 4 \cdot 0,1 > 0$), а третье уравнение имеет вид: $x^2 + 0,1 = 0$.

Отметим, что приведенный пример — далеко не единственный, но в любом из верных примеров для числа p должно выполняться неравенство: $-0,5 < p < 0,5$. Действительно, $(p+1)^2 - 4q > 0$ и $(p-1)^2 - 4q > 0$, а $p^2 - 4q < 0$. Следовательно,

$$\begin{cases} (p+1)^2 - p^2 > 0, \\ (p-1)^2 - p^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |p+1| > |p|, \\ |p-1| > |p| \end{cases} \Leftrightarrow \quad -0,5 < p < 0,5 \quad (\text{см. рис. 9.2}).$$

Число q подбирается в зависимости от p.

$+$ *приведены верный ответ и пример*

$-$ *приведен только ответ «да»*

3. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из точек B и C, продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1. Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC.

Ответ: 45°.

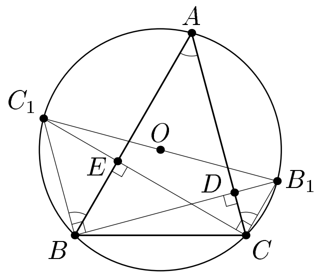


Рис. 9.3

Так как B_1C_1 — диаметр окружности, то $\angle B_1BC_1 = \angle B_1CC_1 = 90^\circ$, следовательно, $BC_1 || AC$ и $CB_1 || AB$ (см. рис. 9.3). Пусть $\angle BAC = \alpha$. Так как $BC_1 || AC$, то $\angle C_1BA = \angle BAC = \alpha$. Аналогично, так как $CB_1 || AB$, то $\angle B_1CA = \angle BAC = \alpha$. Градусная мера дуги B_1C_1 равна 180°, поэтому сумма вписанных углов C_1BA и B_1CA равна 90°, то есть, $\alpha = 45^\circ$.

Искомый ответ можно также получить, доказав, что треугольник CDB_1 (или $\triangle BEC_1$) — равнобедренный прямоугольный.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *доказана только параллельность прямых*

$-$ *приведен только верный ответ*

4. В таблицу 4×4 записали натуральные числа. Могло ли оказаться так, что сумма чисел в каждой следующей строке на 2 больше, чем в предыдущей, а сумма чисел в каждом следующем столбце на 3 больше, чем в предыдущем?

Ответ: нет, не могло.

Предположим, что такое возможно. Пусть сумма чисел в первой строке равна a, а сумма чисел в первом столбце равна b. Тогда сумма всех чисел в таблице равна $a + (a+2) + (a+4) + (a+6) = 4a + 12$, с другой стороны, она же равна $b + (b+3) + (b+6) + (b+9) = 4b + 18$. Таким образом, $4a + 12 = 4b + 18 \Leftrightarrow 4(a-b) = 6 \Leftrightarrow a - b = 1,5$, что невозможно, так как $a - b$ должно быть целым числом.

$+$ *верное обоснованное решение*

$-$ *приведен только ответ «нет»*

5. M – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. На основании BC выбрана такая точка P, что $\angle APM = \angle DPM$. Докажите, что расстояние от точки C до прямой AP равно расстоянию от точки B до прямой DP.

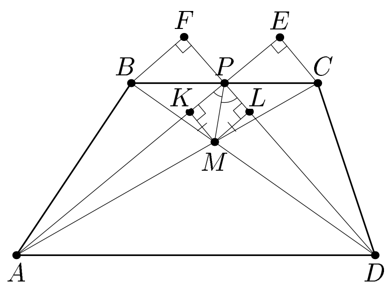


Рис. 9.5

Проведем перпендикуляры CE и BF к прямым AP и DP соответственно (см. рис. 9.5). Проведем к этим же прямым перпендикуляры MK и ML. Так как точка M лежит на биссектрисе угла APD, то $MK = ML$.

Из подобия прямоугольных треугольников ACE и AMK следует, что $CE : MK = AC : AM$, аналогично, из подобия прямоугольных треугольников DBF и DML следует, что $BF : ML = DB : DM$. Кроме того, $\dfrac{AC}{AM} = 1 + \dfrac{CM}{AM} = 1 + \dfrac{BM}{DM} = \dfrac{DB}{DM}$. Поэтому $CE : MK = BF : ML$. Из того, что $MK = ML$, получим, что $CE = BF$, что и требовалось.

$+$ *верное обоснованное решение*

6. Кольцевая дорога поделена столбами на километровые участки, и известно, что количество столбов чётно. Один из столбов покрашен в жёлтый цвет, другой — в синий, а остальные — в белый. Назовем расстоянием между столбами длину кратчайшей из двух соединяющих их дуг. Найдите расстояние от синего столба до жёлтого, если сумма растояний от синего столба до белых равна 2008 км.

Ответ: 17 км.

Пусть на кольцевой дороге — $2n$ столбов. Вычислим сумму расстояний от синего столба до всех остальных: $2(1+2+\ldots+(n-1))+n = 2\dfrac{(1+n-1)}{2}n+n = n^2$ (км). Следовательно, $n^2 > 2008$. Учитывая, что n — натуральное число, получим, что $n \geqslant 45$.

Так как расстояние от синего столба до жёлтого не превосходит n, то $n^2 - n \leqslant 2008 \Leftrightarrow n(n-1) \leqslant 2008$. Несложно проверить, что $n = 45$ удовлетворяет этому неравенству, а любое натуральное n, начиная с 46, — не удовлетворяет. Тогда $n^2 = 2025$, следовательно, расстояние от синего столба до жёлтого равно $2025 - 2008 = 17$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$\mp$ *подсчитана только сумма расстояний от синего столба до всех остальных*

10 класс

1. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1; 1)$. Сравните $a^5 + d^6$ и $c^6 - b^5$.

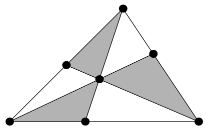
Ответ: $a^5 + d^6 = c^6 - b^5$.

Так как графики функций проходят через точку $(1; 1)$, то выполняются равенства: $1 = 1 + a + b$ и $1 = 1 + c + d$, то есть, $a = -b$ и $c = -d$. Следовательно, $a^5 = -b^5$ и $d^6 = c^6$. Складывая эти равенства почленно, получим, что $a^5 + d^6 = c^6 - b^5$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$-$ *приведен только ответ*

2. Биссектриса, медиана и высота некоторого треугольника, проведенные из трех разных вершин, пересекаются в одной точке и делят этот треугольник на шесть треугольников (см. рис.). Площади трех закрашенных треугольников равны. Верно ли, что исходный треугольник равносторонний?



Ответ: да, верно.

Пусть в треугольнике ABC медиана AK, биссектриса CT и высота BM пересекаются в точке O, и площади треугольников BOK, COM и TOA равны. Поскольку OK — медиана треугольника BOC, то площади треугольников BOK и OKC равны. Следовательно, равны площади треугольников OKC и OMC.

Так как $S_{KOC} = \dfrac{1}{2}CK \cdot CO \cdot \sin\dfrac{C}{2}$, $S_{MOC} = \dfrac{1}{2}CM \cdot CO \cdot \sin\dfrac{C}{2}$, то $CK = CM$. Значит, $\triangle KOC = \triangle MOC$. Следовательно, $\angle OKC = \angle OMC = 90^\circ$. Тогда AK — медиана и высота треугольника ABC, то есть $AB = AC$. Кроме того, в прямоугольном треугольнике BMC $MC = \dfrac{1}{2}BC$, поэтому $\angle CBM = 30^\circ$, тогда $\angle ACB = 60^\circ$, то есть, треугольник ABC — равносторонний.

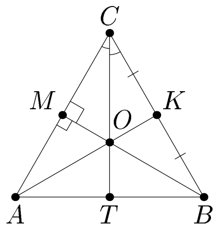


Рис. 10.2.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *доказано только, что данный треугольник — равнобедренный*

$-$ *приведен только ответ*

3. Петя играет в игру-стрелялку. Если он наберет менее 1000 очков, то компьютер добавит ему 20% от его результата. Если он наберет от 1000 до 2000 очков, то компьютер добавит ему 20% от первой тысячи очков и 30% от оставшегося количества очков. Если Петя наберет более 2000 очков, то компьютер добавит ему 20% от первой тысячи очков, 30% от второй тысячи и 50% от оставшегося количества. Сколько призовых очков получил Петя, если по окончании игры у него было 2370 очков?

Ответ: 470.

Если бы Петя набрал менее 1000 очков, то его результат был бы меньше, чем 1200 очков. Если бы Петя набрал 2000 или более очков, то количество призовых очков составило бы не менее, чем $0,2 \cdot 1000 + 0,3 \cdot 1000 = 500$. В этом случае его результат — не менее 2500 очков.

Следовательно, Петя набрал $1000 + x$ очков, где $x \in (0; 1000)$. Компьютер добавил ему 200 очков за первую тясячу и $0,3x$ очков — за остальное. Таким образом, $1000 + x + 200 + 0,3x = 2370 \Leftrightarrow x = 900$. Тогда количество призовых очков равно 470.

$+$ *верное обоснованное решение*

$+/2$ *рассмотрен только случай, когда набрано от* 1000 *до* 2000 *очков*

$\mp$ *приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию*

$-$ *приведен только ответ*

4. Точки A_1 и A_3 расположены по одну сторону от плоскости α, а точки A_2 и A_4 — по другую сторону. Пусть B_1, B_2, B_3 и B_4 — точки пересечения отрезков A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1 с плоскостью α соответственно. Найдите: $\dfrac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \dfrac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \dfrac{A_3B_3}{B_3A_4} \cdot \dfrac{A_4B_4}{B_4A_1}$.

Ответ: 1.

Обозначим C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ основания перпендикуляров, опущенных из точек A_i на плоскость α (см. рис. 10.4). Прямоугольные треугольники $A_1C_1B_1$ и $A_2C_2B_1$ подобны. Следовательно, $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_1} = \dfrac{A_1C_1}{A_2C_2}$. Аналогично, $\triangle A_2C_2B_2 \sim \triangle A_3C_3B_2$, $\triangle A_3C_3B_3 \sim \triangle A_4C_4B_3$, $\triangle A_4C_4B_4 \sim \triangle A_1C_1B_4$. Следовательно, $\dfrac{A_2B_2}{A_3B_2} = \dfrac{A_2C_2}{A_3C_3}$, $\dfrac{A_3B_3}{A_4B_3} = \dfrac{A_3C_3}{A_4C_4}$, $\dfrac{A_4B_4}{A_1B_4} = \dfrac{A_4C_4}{A_1C_1}$. Почленно перемножая полученные равенства, имеем: $\dfrac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \dfrac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \dfrac{A_3B_3}{B_3A_4} \cdot \dfrac{A_4B_4}{B_4A_1} = \dfrac{A_1C_1}{A_2C_2} \cdot \dfrac{A_2C_2}{A_3C_3} \cdot \dfrac{A_3C_3}{A_4C_4} \cdot \dfrac{A_4C_4}{A_1C_1} = 1$.

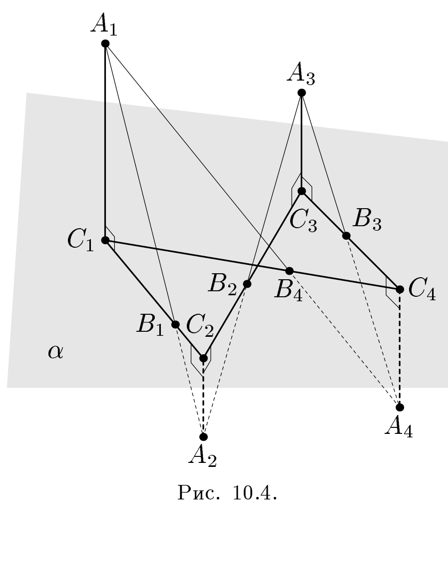


Рис. 10.4.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

5. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что $(2+x)(2+y)(2+z) \geqslant 27$.

Для любых неотрицательных чисел a, b и c выполняется неравенство $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$ (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для трех чисел). Используем это неравенство при $a=1$, $b=1$, $c=x$. Получим, что $2+x \geqslant 3\sqrt[3]{x}$. Аналогично, $2+y \geqslant 3\sqrt[3]{y}$ и $2+z \geqslant 3\sqrt[3]{z}$. Перемножим почленно три неравенства: $(2+x)(2+y)(2+z) \geqslant 27\sqrt[3]{xyz} = 27$, что и требовалось доказать.

$+$ *верное обоснованное решение*

6. Клетчатая прямоугольная сетка $m \times n$ связана из веревочек единичной длины. Двое делают ходы по очереди. За один ход можно разрезать (посередине) не разрезанную ранее единичную веревочку. Если не останется ни одного замкнутого веревочного контура, то игрок, сделавший последний ход, считается проигравшим. Кто из игроков победит при правильной игре и как он должен для этого играть?

Ответ: если $m+n$ — четно, то выигрывает второй игрок, если $m+n$ — нечетно, то выигрывает первый.

В начале игры веревочек единичной длины было $m(n+1)+n(m+1) = 2mn+m+n$. Это число имеет ту же четность, что и число $m+n$. Последний ход в игре разрушает последний замкнутый контур. Докажем, что граница любого замкнутого контура содержит четное количество веревочек единичной длины. Действительно, рассмотрим границу произвольного замкнутого контура. Каждый вертикальный столбец исходной сетки содержит четное количество горизонтальных веревочек единичной длины из этой границы (возможно, и нулевое), так как войдя в замкнутый контур, например, снизу, мы обязаны из него выйти. Аналогично, каждая горизонтальная строка исходной сетки содержит четное количество вертикальных веревочек единичной длины. Таким образом, общее количество единичных веревочек на границе замкнутого контура — четно.

Выигрышная стратегия для любого игрока состоит в том, чтобы не разрушать последний замкнутый контур, пока есть такая возможность.

$+$ *верное обоснованное решение*
$\mp$ *приведен только верный ответ*