Департамент образования города Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской обл.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXI

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

(Московская региональная олимпиада школьников)

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Издательство МЦНМО
Москва, 2008

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу

119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11,
Московская математическая олимпиада,

по адресу электронной почты mmo@mccme.ru
или по телефону (495) 241–12–37.

☞ Материалы данной книги размещены на странице

http://www.mccme.ru/olympiads/mmo/

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

☞ Председатель оргкомитета LXXI ММО

член-корреспондент РАН *В. М. Бухштабер*

☞ Сборник подготовили:

Я. В. Абрамов, А. В. Акопян, В. Б. Алексеев, В. Д. Арнольд, М. А. Ахманова, Д. В. Баранов, А. В. Бегунц, М. А. Берштейн, А. Д. Блинков, И. И. Богданов, П. А. Бородин, Е. Ю. Бунькова, А. И. Галочкин, Т. И. Голенищева-Кутузова, Н. Б. Гончарук, А. Н. Горбачев, А. Л. Городенцев, Е. С. Горская, Г. Г. Гусев, П. Г. Гусев, П. С. Дергач, С. А. Дориченко, А. И. Ефимов, А. А. Заславский, М. Э. Казарян, А. Я. Канель-Белов, А. Л. Канунников, Т. В. Караваева, В. А. Клепцын, О. Н. Косухин, Ю. Г. Кудряшов, Н. А. Кулакова, С. К. Ландо, С. В. Маркелов, Г. А. Мерзон, И. В. Нетай, Н. М. Нетрусова, Е. А. Новодворская, И. И. Осипов, В. С. Панфёров, М. В. Прасолов, И. В. Раскина, И. Н. Сергеев, А. Б. Скопенков, С. Н. Смирнов, А. С. Трепалин, В. Г. Ушаков, В. П. Филимонов, Б. Р. Френкин, А. В. Хачатурян, И. А. Шейпак, Д. Э. Шноль, И. В. Ященко.

☞ Проведение олимпиады и издание осуществлены при поддержке

Департамента образования г. Москвы,
Московского института открытого образования,
фирмы «НИКС» и компании «Яндекс».

6 класс

1. Сегодня 17.02.2008. Наташа заметила, что в записи этой даты сумма первых четырех цифр равна сумме последних четырех. Когда в этом году такое совпадение случится в последний раз? (*Н. М. Нетрусова*)

2. Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить? (*Д. В. Баранов*)

3. На складе лежало несколько целых головок сыра. Ночью пришли крысы и съели 10 головок, причем все ели поровну. У нескольких крыс от обжорства заболели животы. Остальные 7 крыс следующей ночью доели оставшийся сыр, но каждая крыса смогла съесть вдвое меньше сыра, чем накануне. Сколько сыра было на складе первоначально? (*А. Д. Блинков, И. В. Раскина*)

4. Разрежьте какой-нибудь квадрат на квадратики двух разных размеров так, чтобы маленьких было столько же, сколько и больших. (*Д. Э. Шноль*)

5. Автостоянка в Цветочном городе представляет собой квадрат 7×7 клеточек, в каждой из которых можно поставить машину. Стоянка обнесена забором, одна из сторон угловой клетки удалена (это ворота). Машина ездит по дорожке шириной в клетку. Незнайку попросили разместить как можно больше машин на стоянке таким образом, чтобы любая могла выехать, когда прочие стоят. Незнайка расставил 24 машины так, как показано на рис. 1. Попытайтесь расставить машины по-другому, чтобы их поместилось больше. (*А. В. Хачатурян*)

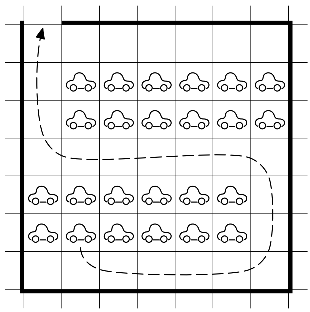
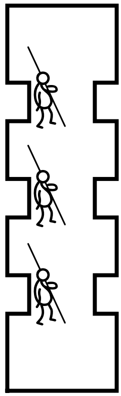


Рис. 1

6. Василиса Премудрая решила запереть Кощея в прямом коридоре, разделенном тремя проходами на четыре комнаты, причем в каждом проходе, облокотившись на одну из стен, стоит толстый усталый стражник. Каждый раз, когда Кощей переходит из одной комнаты в другую, стражник переходит к противоположной стене и облокачивается на нее. Если все стражники облокотятся на одну стену, она не выдержит и рухнет, а Кощей выйдет на свободу. Может ли Василиса изначально так прислонить стражников и разместить Кощея, чтобы он никогда не смог выбраться? (*Е. А. Новодворская*)



7 класс

1. Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число. (*И. В. Ященко*)

2. В кубке Водоканала по футболу участвовали команды «Помпа», «Фильтр», «Насос» и «Шлюз». Каждая команда сыграла с каждой по одному разу (за победу давалось 3 очка, за ничью — 1, за проигрыш — 0). Команда «Помпа» набрала больше всех очков, команда «Шлюз» — меньше всех. Могло ли оказаться так, что «Помпа» обогнала «Шлюз» всего на 2 очка? (*А. А. Заславский*)

3. Дима живет в девятиэтажном доме. Он спускается на лифте со своего этажа на первый за 1 минуту. Из-за маленького роста Дима не достает до кнопки своего этажа. Поэтому, поднимаясь наверх, он нажимает ту кнопку, до которой может дотянуться, а дальше идет пешком. Весь путь наверх занимает 1 минуту 10 секунд. Лифт движется вверх и вниз с одинаковой скоростью, а Дима поднимается вдвое медленнее лифта. На каком этаже живет Дима? (*Д. Э. Шноль*)

4. См. задачу 6 для 6 класса.

5. Сережа вырезал из картона две одинаковые фигуры. Он положил их с нахлестом на дно прямоугольного ящика. Дно оказалось полностью покрыто. В центр дна вбили гвоздь. Мог ли гвоздь проткнуть одну картонку и не проткнуть другую? (*С. В. Маркелов*)

6. Вася постоял некоторое время на остановке. За это время проехал один автобус и два трамвая. Через некоторое время на эту же остановку пришел Шпион. Пока он там сидел, проехало 10 автобусов. Какое минимальное число трамваев могло проехать за это время? И автобусы, и трамваи ходят с равными интервалами, причем автобусы ходят с интервалом 1 час. (*М. А. Ахманова*)

8 класс

1. Верно ли, что к любому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце какие-то две цифры так, что получится квадрат натурального числа? (*Г. А. Гальперин*)

2. В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду. (*И. И. Осипов по мотивам классической задачи*)

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и M соответственно так, что $KM \parallel AC$. Отрезки AM и KC пересекаются в точке O. Известно, что $AK = AO$ и $KM = MC$. Докажите, что $AM = KB$. (*М. В. Мурашкин*)

4. Турнир, в котором участвовало 20 спортсменов, судили 10 арбитров. Каждый сыграл с каждым один раз, и каждую встречу судил ровно один арбитр. После окончания каждой игры оба участника фотографировались с арбитром. Через год после турнира была найдена стопка из всех этих фотографий (по фотографии неясно, кто на ней игроки, а кто — арбитр). Оказалось, что не про каждого можно определить, кем он является — спортсменом или арбитром. Сколько могло быть таких людей? (*Б. Р. Френкин*)

5. Поставьте на плоскости 9 точек так, чтобы никакие 4 не лежали на одной прямой, но из любых шести нашлись 3, лежащие на одной прямой. (На рисунке проведите все прямые, на которых лежат по три отмеченные точки.) (*А. В. Акопян*)

6. У игрока есть M золотых и N серебряных монет. В начале каждого раунда игрок ставит какие-то монеты на красное, какие-то на черное (можно вообще ничего не ставить на один из цветов, часть монет можно никуда не ставить). В конце каждого раунда крупье объявляет, что один из цветов выиграл. Ставку на выигравший цвет крупье отдает игроку, удваивая в ней количество монет каждого вида, а ставку на проигравший цвет забирает себе.

Игрок хочет, чтобы монет одного вида у него стало ровно в три раза больше, чем другого (в частности, его устроит остаться совсем без денег). При каких M и N крупье не сможет ему помешать? (*А. С. Чеботарев*)

9 класс

1. Две команды КВН участвуют в игре из четырех конкурсов. За каждый конкурс каждый из шести судей выставляет оценку — целое число от 1 до 5; компьютер находит среднее арифметическое оценок за конкурс и округляет его с точностью до десятых. Победитель определяется по сумме четырех полученных компьютером значений. Может ли оказаться, что сумма всех оценок, выставленных судьями, у проигравшей команды больше, чем у выигравшей? (*А. Н. Горбачев*)

2. Велосипедист путешествует по кольцевой дороге, двигаясь в одном направлении. Каждый день он проезжает 71 км и останавливается ночевать на обочине. На дороге есть аномальная зона длины 71 км. Если велосипедист останавливается в ней на ночлег на расстоянии y км от одной границы зоны, просыпается он в противоположном месте зоны, на расстоянии y км от другой ее границы. Докажите, что в каком бы месте велосипедист ни начал свое путешествие, рано или поздно он остановится в нем на ночлег. (*Г. А. Колюцкий*)

3. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, O — центр описанной около этого треугольника окружности, D — такая точка на стороне AC, что $AD = AB$. Докажите, что прямые AO и LD перпендикулярны. (*Р. Г. Женодаров*)

4. Назовем *усложнением* числа приписывание к нему одной цифры в начало, в конец или между любыми двумя его цифрами. Существует ли натуральное число, из которого невозможно получить полный квадрат с помощью ста усложнений? (*А. Н. Горбачев*)

5. У Васи есть 100 банковских карточек. Вася знает, что на одной из карточек лежит 1 рубль, на другой — 2 рубля, и так далее, на последней — 100 рублей, но не знает, на какой из карточек сколько денег. Вася может вставить карточку в банкомат и запросить некоторую сумму. Банкомат выдает требуемую сумму, если она на карточке есть, не выдает ничего, если таких денег на карточке нет, а карточку съедает в любом случае. При этом банкомат не показывает, сколько денег было на карточке. Какую наибольшую сумму Вася может гарантированно получить? (*И. В. Митрофанов*)

6. Покажите, что существует выпуклая фигура, ограниченная дугами окружностей, которую можно разрезать на несколько частей и из них сложить две выпуклые фигуры, ограниченные дугами окружностей.

(*И. А. Иванов-Погодаев, А. С. Малистов*)

10 класс

1. Аудитория имеет форму правильного шестиугольника со стороной 3 м. В каждом углу установлен храпометр, определяющий число спящих студентов на расстоянии, не превышающем 3 м. Сколько всего спящих студентов в аудитории, если сумма показаний храпометров равна 7? (*А. К. Каибханов*)

2. Андрей и Борис играют в следующую игру. Изначально на числовой прямой в точке p стоит робот. Сначала Андрей говорит расстояние, на которое должен сместиться робот. Потом Борис выбирает направление, в котором робот смещается на это расстояние, и т. д. При каких p Андрей может добиться того, что за конечное число ходов робот попадет в одну из точек 0 или 1 вне зависимости от действий Бориса? (*Д. В. Баранов*)

3. Все целые числа от -33 до 100 включительно расставили в некотором порядке и рассмотрели суммы каждых двух соседних чисел. Оказалось, что среди них нет нулей. Тогда для каждой такой суммы нашли число, ей обратное. Полученные числа сложили. Могло ли в результате получится целое число?

(*И. И. Богданов*)

4. Если некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в k целых точках значения среди чисел от 1 до $k-1$, то при $k \geqslant 6$ эти значения равны. (*М. И. Малкин*)

5. Высоты AA' и CC' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой $A'C'$. (*А. А. Заславский*)

6. Натуральные числа покрашены в N цветов. Чисел каждого цвета бесконечно много. Известно, что цвет полусуммы двух различных чисел одной четности зависит только от цветов слагаемых (например, полусумма синего и красного всегда желтая).

а) Докажите, что полусумма чисел одной четности одного цвета всегда окрашена в тот же цвет.

б) При каких N такая раскраска возможна?

(*А. В. Шаповалов*)

11 класс

1. Числа p и q таковы, что параболы $y=-2x^2$ и $y=x^2+px+q$ пересекаются в двух точках, ограничивая некоторую фигуру. Найдите уравнение вертикальной прямой, делящей площадь этой фигуры пополам. (*И. Н. Сергеев*)

2. Найдите наименьшее натуральное n, для которого число n^n *не является* делителем числа $2008!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2008$.

(*В. Г. Ушаков*)

3. На едином экзамене 333 ученика допустили в общей сложности 1000 ошибок. Возможно ли при этом, что учеников, сделавших более чем по 5 ошибок, оказалось больше, чем учеников, сделавших менее чем по 4 ошибки?

(*А. И. Галочкин*)

4. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AO и пересекающая прямую BC в точке M. Из точки O на прямую AM опущен перпендикуляр OD. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности. (*В. П. Филимонов*)

5. Станок выпускает детали двух типов. На ленте его конвейера выложены в одну линию 75 деталей. Пока конвейер движется, на станке готовится деталь того типа, которого на ленте меньше. Каждую минуту очередная деталь падает с ленты, а подготовленная кладется в ее конец. Через некоторое число минут после включения конвейера может случиться так, что расположение деталей на ленте впервые повторит начальное. Найдите: а) наименьшее такое число, б) все такие числа. (*В. Б. Алексеев*)

6. Игрок на компьютере управляет лисой, охотящейся за двумя зайцами. В вершине A квадрата $ABCD$ находится нора: если в нее, в отсутствие лисы, попадает хотя бы один заяц, то игра проиграна. Лиса ловит зайца, как только оказывается с ним в одной точке (возможно, в точке A). Вначале лиса сидит в точке C, а зайцы — в точках B и D. Лиса бегает повсюду со скоростью не больше v, а зайцы — по лучам AB и AD со скоростью не больше 1. При каких значениях v лиса сможет поймать обоих зайцев? (*А. Л. Канунников*)

7. Среди вершин любого ли многогранника можно выбрать четыре вершины тетраэдра, площадь проекции которого на любую плоскость составляет от площади проекции (на ту же плоскость) исходного многогранника: а) больше, чем $\frac{1}{4}$, б) не меньше, чем $\frac{1}{9}$, в) не меньше, чем $\frac{1}{7}$? (*О. Н. Косухин*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. Ответ: 25 декабря 2008 года.

Нетрудно проверить, что в оставшиеся дни до конца года такого совпадения больше не будет.

2. Ответ: 6 зайчат.

Все зайчата барабанить не могут, так как заведомо не будет барабанить зайчонок, которому достанется самый маленький барабан. С другой стороны, если дать этому же зайчонку и самые короткие палочки, то все остальные зайчата будут барабанить.

3. Ответ: 11 головок сыра.

Пусть всего было k крыс ($k > 7$), тогда каждая съела в первую ночь по $10/k$ головок сыра. Во вторую ночь каждая крыса съела вдвое меньше, то есть $5/k$ головок. Все 7 крыс съели тем самым $35/k$ головок. Это целое число. Единственный делитель

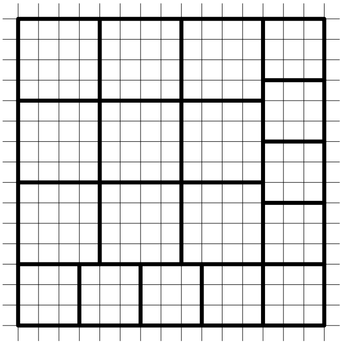


Рис. 2

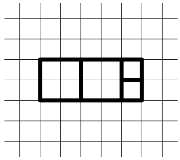


Рис. 3

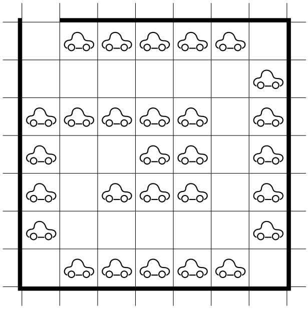


Рис. 4

числа 35, превышающий 7, — само число 35. Поэтому $35/k=1$, и всего на складе до нашествия крыс было $10+1=11$ головок сыра.

4. П е р в о е р е ш е н и е. См. рис. 2. Получить это решение можно так. Пусть квадратики одного вида имеют сторону a клеточек, другого — b клеточек, а исходный квадрат — c клеточек. Тогда площадь исходного квадрата равна $c^2=na^2+nb^2$.

Удовлетворяющие этому равенству числа можно получить, умножив равенство $5^2=4^2+3^2$ на $n=k^2$. Квадрат при $n=4$ разрезать не удается, при $n=9$ получим $a=4$, $b=3$, $c=15$. Пример разрезания для данных чисел представлен на рисунке.

В т о р о е р е ш е н и е. См. рис. 3. Составим, например, из двух квадратов 2×2 и двух квадратов 1×1 прямоугольник 5×2 (как показано на рисунке). Из десяти таких прямоугольников можно составить квадрат 10×10. Разумеется, таким образом можно получить много других решений.

5. О т в е т: можно поставить 28 машин, например, так, как показано на рис. 4. Можно ли поставить больше, жюри неизвестно.

6. О т в е т: да, может.

Пусть, например, Василиса посадила Кощея в самую северную комнату, а стражников прислонила так: к западной — к восточной — к западной стене («ЗВЗ»). Покажем, что как бы Кощей ни ходил, стражники никогда не будут прислоняться к одной стене.

Заметим, что в любой момент выполняется следующее условие: стражники южнее Кощея остались в исходном положении, а положение стражников севернее Кощея изменилось. Действительно, это условие выполнено вначале и не нарушается при переходе Кощея из комнаты в комнату.

Значит, если Кощей в какой-то момент оказался в самой северной комнате, то все стражники остались в положении «ЗВЗ». Если Кощей оказался во второй комнате, то первый (самый северный) стражник поменял положение, а два других остались в исходном положении, то есть стражники приняли положение «ВВЗ». Если же Кощей оказался в третьей комнате, то стражники приняли положение «ВЗЗ». Наконец, если Кощей оказался в самой южной комнате, то все стражники изменили свое положение, то есть приняли положение «ВЗВ».

Значит, ни в какой момент все стражники не прислоняются к одной стене.

7 класс

1. О т в е т: 251.

Искомое число является делителем числа 2008. Разложим число 2008 на простые множители: $2008 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 251$. Выпишем все делители числа 2008: 1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004, 2008. Найдя сумму цифр каждого из них, заметим, что условие задачи выполняется только для числа 251 ($2008 = 251 \cdot (2 + 5 + 1)$).

2. О т в е т: да, могло. Пример приведен в таблице:

команда	П	Ф	Н	Ш	о
Помпа	—	1	1	3	5
Фильтр	1	—	3	0	4
Насос	1	0	—	3	4
Шлюз	0	3	0	—	3

Комментарии. 1. Так как «Помпа» обогнала «Фильтр», а «Фильтр» обогнал «Шлюз», разница очков, набранных «Шлюзом» и «Помпой», не может быть меньше двух. Можно показать, что все разницы от 2 до 9 очков между «Помпой» и «Шлюзом» реализуются.

2. Решение единственно с точностью до перестановки «Фильтра» и «Насоса», но доказывать это не требуется.

3. Утверждение задачи выполняется для любого количества команд, большего трех.

3. Ответ: Дима живет на седьмом этаже.

Первое решение. Рассмотрим ту часть пути, которую Дима вниз едет на лифте, а вверх идет пешком. С одной стороны путь пешком занимает вдвое больше времени, а с другой — больше на 10 секунд. Значит, эту часть пути он проехал за 10 секунд, а прошел пешком за 20 секунд. Поскольку весь путь на лифте занимает 60 секунд, то пешком он шел 1/6 пути.

Заметим, что пешком он шел целое число промежутков между этажами. Поскольку дом девятиэтажный, пешком он шел 1 промежуток, а ехал 5. Значит, Дима живет на седьмом этаже.

Второе решение. Пусть лифт движется со скоростью v этажей в секунду, Дима живет на n-м этаже, а выходит обычно на m-м. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{n-1}{v}=60; \\ \dfrac{m-1}{v}+\dfrac{n-m}{v}\cdot 2=70, \end{cases}$$

откуда $m-1+2n-2m=70v$. Подставим $v=\dfrac{n-1}{60}$ из первого уравнения:

$$2n-m-1=\frac{n-1}{6}\cdot 7$$

$$12n-6m-6=7n-7$$

$$5n+1=6m.$$

Так как $m<9$, нетрудно найти, что $n=7$, а $m=6$.

5. Ответ. Да, мог.

Пусть картонки изначально лежат одна на другой и их края совпадают. Если картонки являются квадратными, перенеся одну вдоль другой и наложив их, легко сложить прямоугольник, но его центр будет лежать внутри обеих (см.

а *б*

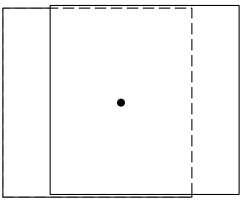


Рис. 5

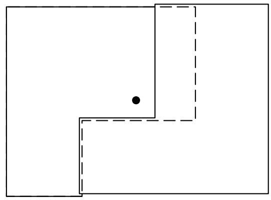


Рис. 6

рис. 5, *а*). Это можно исправить, заметив, что центр получившегося прямоугольника *не совпадает* с центром первой квадратной картонки. Поэтому, вырезав небольшую дырочку из первой картонки в центре прямоугольника, мы можем получить решение (см. рис. 5, *б*).

У задачи существуют и другие решения, см. рис. 6. Обратите внимание: в этом решении вторую картонку, прежде чем переносить, нужно *перевернуть*.

К о м м е н т а р и й. Если картонки не накладываются друг на друга и полностью покрывают дно прямоугольного ящика, то гвоздь в центре ящика обязательно воткнется на границе, разделяющей картонки. Это утверждение кажется очевидным, но строго доказать его удалось лишь в 2002 году (см.: А. Я. Канель-Белов. Решение задачи 1.5 // Математическое просвещение. Третья серия, 2002. Вып. 6. С. 139–140).

6. О т в е т: 4 трамвая.

Приведем сначала пример, когда за время наблюдений Шпиона проехало четыре трамвая: пусть автобусы ходят в 9:00, 10:00, ..., а трамваи ходят с интервалом 1 час 58 минут — в 10:01, 11:59, 13:57, 15:55, 17:53, 19:51, 21:49, ... Тогда Вася мог стоять с 10:01 до 11:59, а Шпион наблюдать с 12:00 до 21:00.

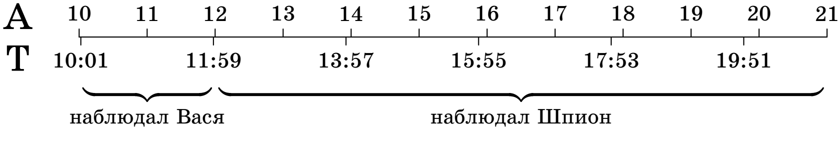


Рис. 7

Докажем теперь, что за время наблюдений Шпиона не могло пройти меньше четырех травмаев.

Для этого докажем, что интервал трамвая меньше двух часов. Действительно, если интервал составляет хотя бы два часа, то Вася стоял не менее двух часов, а значит за это время проехало по крайней мере два автобуса, что противоречит условию.

С другой стороны, пока наблюдал Шпион, прошло десять автобусов. Между 1-м и 3-м из них прошло два часа, значит за это время проехал хотя бы один трамвай. Аналогично между 3-м и 5-м автобусом, между 5-м и 7-м и между 7-м и 9-м проехало еще хотя бы три трамвая. Значит, Шпион увидел по крайней мере четыре трамвая.

8 класс

1. Обозначим через n меньшее из этих двух последовательных чисел. Тогда их произведение равно $n(n+1)$. Припишем к нему два нуля. Получим $n(n+1)\cdot 100 = 100n^2 + 100n$. Выделим полный квадрат. Получим $(10n+5)^2 - 25$. То есть, если к произведению приписать 25, получится квадрат натурального числа.

К о м м е н т а р и и. 1. Обратная задача широко известна как быстрый способ возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 5: $(\overline{n5})^2 = \overline{m25}$, где $m = n(n+1)$.

2. При $n > 3$, если приписать другие две цифры, полный квадрат не получится (но доказывать это не требовалось).

2. Докажем, что найдется ряд, в котором сидело не менее 8 детей. Если бы в каждом из 7 рядов сидело не более 7 детей, то всего детей было бы не более 49. Но детей 50, значит, на утреннем сеансе хотя бы в одном ряду сидели по крайней мере 8 детей.

Поскольку рядов всего 7, хотя бы двое из этих детей окажутся в одном ряду на вечернем сеансе.

К о м м е н т а р и й. Решение задачи является одним из применений известного математического рассуждения, которое называется «принцип Дирихле». Прочитать о нем можно, например, в главе 5 книги С. А. Генкина, И. В. Итенберга и Д. В. Фомина «Ленинградские математические кружки» (доступна по адресу http://math.ru/lib/book/djvu/len-kruzhki.djvu).

3. Первое решение. Пусть $\angle AKO = \alpha$. Тогда $\angle AOK = \alpha$, так как треугольник AKO равнобедреный; $\angle MOC = \angle AOK = \alpha$ (как вертикальные). Пусть $\angle MKC = \beta$. Тогда $\angle MCK = \angle MKC = \beta$, так как треугольник MKC равнобедреный. Так как $KM \parallel AC$, угол ACO равен β. Из треугольника AKC получаем, что $\angle CAK = 180^\circ - \alpha - \beta$; из треугольника MOC получаем, что $\angle OMC = 180^\circ - \alpha - \beta$. Таким образом, $\angle CAK = \angle AMC$. Заметим, что $\angle MKB = \angle CAK$ и $\angle ACM = \angle KMB$ ввиду параллельности KM и AC. Отсюда $\triangle AMC = \triangle BKM$ по стороне и двум углам. Следовательно, $AM = KB$.

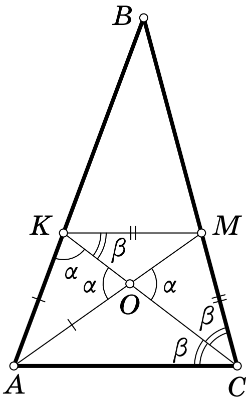


Рис. 8

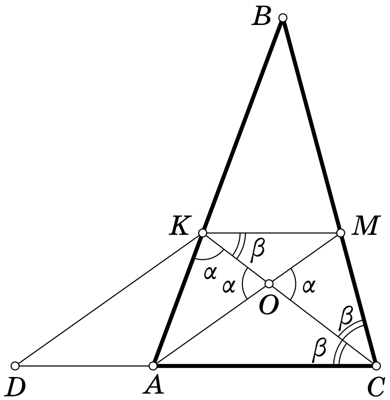


Рис. 9

Второе решение. Как было доказано в первом решении, CK — биссектриса угла ACB. Воспользуемся тем, что лучи CA и CB симметричны относительно этой биссектрисы. Пусть KD — отрезок, симметричный отрезку KB относительно прямой CK (рис. 9). Тогда точка D лежит на продолжении стороны CA (см. комментарий). Докажем, что четырехугольник $DKMA$ — параллелограмм. Действительно, $DA \parallel KM$, кроме того, $\angle KAM = \angle KAO = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle DKA = \angle DKC - \angle AKC$, что (из симметрии) равно $\angle BKC - \angle AKC = \angle BKM + \angle MKC - \angle AKC = 180^\circ - 2\alpha$. Следовательно, $DK \parallel AM$. Значит, $DKMA$ действительно параллелограмм и $DK = AM$, то есть $BK = AM$.

К о м м е н т а р и й. Можно строго доказать, что точка D попадает именно на *продолжение* стороны AC (за точку A). Для этого нужно доказать, что $\angle CKB > \angle AKC$, т. е. что угол AKC — острый. Но AKC — угол при основании в равнобедренном треугольнике AKO, значит, он острый.

4. О т в е т: двое.

П е р в о е р е ш е н и е. Назовем человека *подозрительным*, если про него нельзя определить, спортсмен это или арбитр. Заметим, что каждый из арбитров фотографировался только со спортсменами, т. е. не более чем с 20 людьми. С другой стороны, каждый из спортсменов сфотографировался со всеми остальными спортсменами и хотя бы одним арбитром, т. е. не менее чем с 20 людьми. Значит, каждый подозрительный человек оказался на фотографиях ровно с 20 людьми.

Заметим, что если спортсмен фотографировался ровно с 20 людьми, то все его 19 игр судил один и тот же арбитр, т. е. на всех фотографиях вместе с ним присутствует один и тот же человек.

Пусть X — какой-нибудь подозрительный человек. Так как мы можем принять X за спортсмена, то, ввиду сказанного выше, на всех фотографиях с ним присутствует некий Y. Эти двое сфотографированы вместе 19 раз, значит, один из них — точно арбитр. Следовательно, третий человек на каждой из этих фотографий — точно спортсмен.

Так мы сможем определить 19 спортсменов, а оставшийся спортсмен — кто-то из пары X и Y. Все остальные — арбитры. Если бы мы могли определить статус хотя бы одного из пары X и Y, то мы бы смогли определить и оставшегося, и не было бы вообще ни одного подозрительного человека. Значит, всего подозрительных людей двое — X и Y.

В т о р о е р е ш е н и е. По условию можно разными способами разделить сфотографированных людей на спортсменов и арбитров. Заметим, что если два человека при некотором истолковании A — игроки, то они встречаются вместе на одной фотографии — на той, которая сделана после их матча. С другой стороны, если два человека при некотором истолковании B — арбитры, то они не встречаются на одной фотографии. Значит, не более одного игрока в истолковании A может оказаться арбитром в истолковании B. Аналогично, верно и обратное. Значит, ситуации A и B могут отличаться только в двух людях — один из них в A игрок, а в B арбитр, другой наоборот. Обозначим первого X, второго Y.

Так как в истолковании A мы считаем Y арбитром, то с ним на фотографиях не встречаются люди, которые в обоих истолкованиях — арбитры. Но в истолковании B он игрок, поэтому с ним на фотографии должен быть арбитр, и это может быть только X. Таким образом, на всех фотографиях Y присутствует X. Точно так же верно и обратное. Но тогда X и Y представляют из себя игрока и арбитра, который судит все матчи этого игрока и только их. Третий человек на каждой из этих фотографий — точно спортсмен и так мы определим всех спортсменов. А все остальные люди — арбитры. То есть неоднозначно определяется только два человека.

Комментарий. Отметим, что количество спортсменов и арбитров можно определить по стопке фотографий. Действительно, по количеству игр можно определить количество игроков, а далее по количеству различных людей на фотографиях определить количество арбитров.

5. Пример показан на рис. 10. Докажем, что среди любых 6 из этих точек найдутся 3, лежащие на одной прямой. Будем называть *важной* прямую, на которой лежат 3 отмеченные точки. Докажем, что какие бы три точки из 9 мы ни выкинули, найдется важная прямая, из которой мы не выкинули ни одной точки.

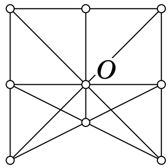


Рис. 10

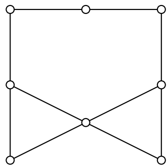


Рис. 11

Будем рассуждать от противного. Предположим, что можно выкинуть 3 точки из 9 отмеченных так, чтобы из каждой важной прямой пропала хотя бы одна точка. Точка O лежит на наибольшем количестве важных прямых — на 4. Если бы мы точку O не выкинули, то нам надо было бы выкинуть какую-то другую точку из каждой из этих прямых, то есть выкинуть хотя бы 4 точки. А мы можем выкинуть только три. Противоречие. Значит, нам надо выкинуть точку O. Тогда остается такая картинка (рис. 11). Остается 5 важных прямых, и каждая точка лежит не более чем на двух из них. Следовательно, после удаления еще двух точек останется хотя бы одна важная прямая, из которой не выкинуто ни одной точки.

Примечания. 1. Придумать этот пример можно следующим образом. Сначала расположим 9 точек в виде квадрата 3×3. Этот пример не годится, так как можно взять 6 точек, обведенных кружочком (рис. 12). Проблема в том, что есть несколько «малополезных» точек, которые лежат только на 2 важных прямых. Попробуем передвинуть одну из них на место получше. Получим правильный пример.

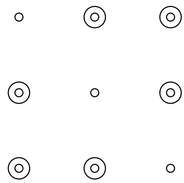


Рис. 12

2. Есть и другие примеры. В них может быть как 9 (рис. 13, *в–д*), так и 8 важных прямых (рис. 13, *а, б*). Не для всех из них проходит доказательство, аналогичное указанному выше, но все их можно доказать, не делая перебора всех шестерок точек. Отметим, что для некоторых примеров (рис. 13, *д*) неочевидно, что они вообще реализуются (т. е. что их можно нарисовать) на плоскости. Это можно доказать, либо явно предъявив алгоритм построения, либо из соображений непрерывности.

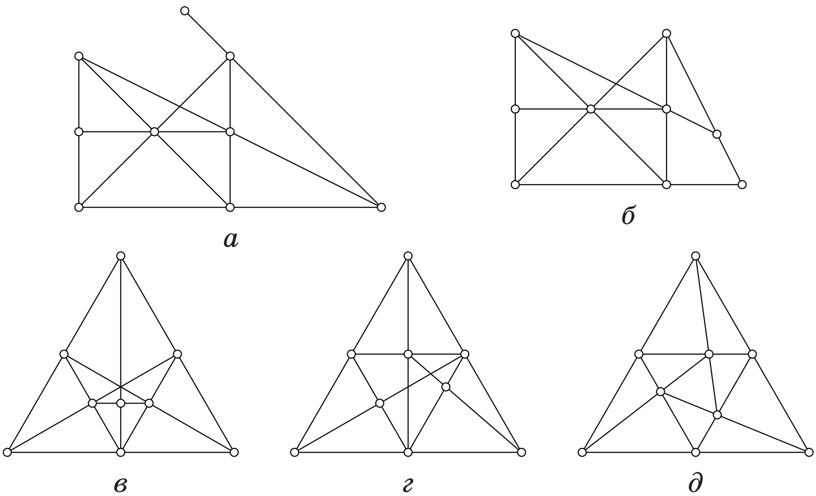


Рис. 13

6. Ответ: при M и N, отличающихся не более чем в 3 раза.

Пусть перед каким-то раундом у игрока осталось A золотых и B серебряных монет. Посмотрим, что происходит с A и B за один раунд. Допустим, игрок поставил на красное x золотых и p серебряных, а на черное — y золотых и q серебряных монет. Тогда в зависимости от выбора крупье либо количество золотых увеличится на $z = x - y$, а серебряных — на $r = p - q$, либо количество монет каждого типа уменьшится на эти числа. Ясно, что $|z| \leqslant A$ и $|r| \leqslant B$ и что любые z и r в указанных диапазонах можно обеспечить.

Предположим, что A и B отличаются более чем втрое, например, $A > 3B$. Тогда крупье может добиться того, чтобы это неравенство сохранилось и после раунда. В самом деле, если оно нарушается при любом выборе крупье, то $A - z < 3(B - r)$ и $A + z < 3(B + r)$. Складывая эти неравенства, получаем, что $2A < 6B$, что не так. Значит, если в начале количества монет отличаются более чем в 3 раза, крупье может сделать так, чтобы они все время отличались более чем в 3 раза. То есть при $M > 3N$ крупье может помешать игроку.

При $M = 3N$ или $N = 3M$ задача уже решена. Осталось рассмотреть случай, когда $M < 3N$ и $N < 3M$.

Попробуем подобрать z и r так, чтобы при любом исходе отношение количеств монет стало равно трем. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + z = 3(B + r), \\ 3(A - z) = B - r. \end{cases}$$

Решая ее, находим: $z = \frac{5}{4}A - \frac{3}{4}B$ и $r = -\frac{5}{4}B + \frac{3}{4}A$. Видно, что при A и B, отличающихся менее чем в 3 раза, $|z| < A$, $|r| < B$. Заметим, что если $A + B$ кратно четырем, то z и r будут также целыми. Значит, в этом случае игрок сможет достичь цели за один раунд.

Осталось показать, что игрок может сделать $A + B$ кратным четырем. Действительно, поставив все монеты на красное, игрок может добиться, чтобы либо все пропало (что его устраивает), либо общее количество монет удвоилось. Повторив эту процедуру еще раз, игрок сделает так, что общее число монет будет делиться на 4. При этом соотношения $A < 3B$ и $B < 3A$ сохранятся.

К о м м е н т а р и и. 1. Это решение можно описать и геометрически. Сопоставим состоянию, в котором у игрока A серебряных и B золотых монет, точку плоскости с координатами (A, B). Тогда каждый из раундов будет выглядеть так: игрок выбирает вектор $\vec{a}$ с целыми координатами, а крупье сдвигает текущую точку на $+\vec{a}$ или $-\vec{a}$ (сравните с задачей 2 для 10 класса). При этом вектор $\vec{a}$ должен быть небольшим — таким, чтобы вне зависимости от выбора крупье точка оставалась в I четверти (игрок не может ставить больше денег, чем у него есть). Цель игрока — попасть в одну из точек прямых $x = 3y$ и $y = 3x$.

Пусть начальная точка лежит вне угла, образованного этими прямыми. Тогда ясно, что крупье сможет ходить так, чтобы она все время оставалась вне этого угла. В частности, точка никогда не попадет на стороны угла, то есть игрок не сможет выиграть (рис. 14, *а*).

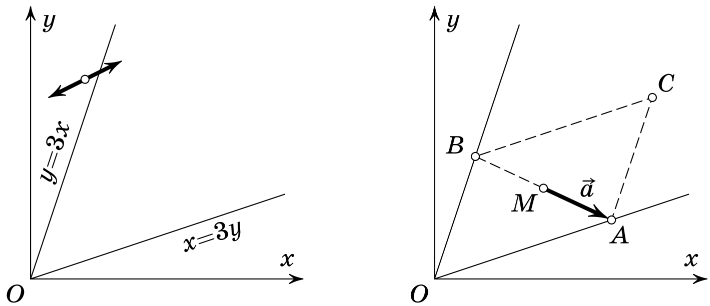


Рис. 14

Пусть теперь начальная точка лежит внутри угла. Обозначим ее M. Попробуем так подобрать вектор $\vec{a}$, чтобы и при ходе на $+\vec{a}$, и при ходе на $-\vec{a}$ точка попадала на сторону угла. Для этого надо найти на сторонах угла точки A и B такие, что M — середина AB (рис. 14, *б*).

Эти точки можно найти так: возьмем точку C такую, что $\overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OM}$, и проведем через нее прямые, параллельные сторонам угла. Точки пересечения этих прямых со сторонами угла и будут нужными нам точками A и B. Вектор $\vec{a}$ можно взять равным $\overrightarrow{MA}$. Вычислив его координаты (вычисление, на самом деле, совпадает с вычислением из решения), найдем, что вектор $\vec{a}$ будет иметь целые координаты, если сумма координат точки M делится на 4. Этого можно добиться, дважды удваивая точку M, как в решении.

2. Приведем другое доказательство того, что при количестве монет, отличающемся не более чем в три раза, крупье не сможет помешать игроку. В отличие от доказательства, изложенного в решении, оно не требует почти никаких вычислений.

I. Если для какого-то набора монет игрок может добиться того, что монет одного вида у него станет ровно в 3 раза больше чем другого, то будем говорить, что он может выиграть. Набор из n золотых и m серебряных монет будем обозначать парой (n, m).

II. Заметим две вещи:

а) если игрок может выиграть на наборе (x, y), то он может выиграть и на наборе (kx, ky), где k — натуральное. Он должен действовать так же, как и в случае (x, y), только увеличивать все свои ставки в k раз;

б) если игрок может выиграть на наборах (a, b) и (x, y), то он может выиграть и на наборе $(a+x, b+y)$. В самом деле, в этом случае ему достаточно поставить на красное (a, b), а на черное (x, y). После выигрыша одного из цветов у игрока окажется либо набор $(2a, 2b)$, либо набор $(2x, 2y)$, а в этих случаях он знает, как действовать.

III. Пусть у игрока есть набор монет (n, m). Без ограничения общности можно считать, что $n < m$. Докажем индукцией по n, что если $m \leqslant 3n$, то игрок может выиграть.

База индукции. Нужно проверить, что игрок выигрывает на наборах $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$.

Набор $(1, 3)$ — уже хороший.

Если у игрока набор $(1, 1)$, то он может поставить обе монеты на красное. Тогда он либо останется без денег (что его устраивает), либо будет иметь набор $(2, 2)$. Тогда он поставит $(0, 1)$ и $(1, 0)$, а у себя оставит $(1, 1)$. Что бы ни выпало, у него окажется $(1, 3)$ или $(3, 1)$.

Если у него набор $(1, 2)$, то нужно поставить на один из цветов $(0, 1)$. В итоге у игрока окажется либо $(1, 3)$, либо $(1, 1)$. В последнем случае он знает, как действовать.

Шаг индукции. Пусть для всех пар (n, n), $(n, n+1)$, $\ldots$, $(n, 3n)$ игрок может выиграть. Покажем, что он может выиграть и для пар $(n+1, n+1)$, $(n+1, n+2)$, $\ldots$, $(n+1, 3(n+1))$.

Для всех пар от $(n+1, n+1)$ до $(n+1, 3n+1)$ игрок может ставить на красное $(1, 1)$, а остальное на черное:

$(n+1, n+1)$: ставим $(1, 1)$ и (n, n);
$(n+1, n+2)$: ставим $(1, 1)$ и $(n, n+1)$;
$(n+1, n+3)$: ставим $(1, 1)$ и $(n, n+2)$;
....
$(n+1, 3n+1)$: ставим $(1, 1)$ и $(n, 3n)$;

А для оставшихся двух пар:

$(n+1, 3n+2)$: ставим $(1, 2)$ и $(n, 3n)$;
$(n+1, 3n+3)$: ставим $(1, 3)$ и $(n, 3n)$.

3. Посмотрим, насколько в условии задачи существенно число 3. Точнее говоря, попробуем решить более общую задачу — пусть игрок хочет, чтобы у него монет одного вида стало ровно в k раз больше, чем монет другого.

Аналогично случаю $k=3$, можно доказать, что если вначале количества монет разных видов отличаются более чем в k раз, то крупье сможет помешать игроку. Если же отношение количеств менее k (в терминах комментария 1 — начальная точка лежит внутри угла), попробуем применить тот же алгоритм, что и в решении. Тогда при вычислении ставки (в терминах комментария 1 — вектора $\vec{a}$) в знаменателе получится число k^2-1 (или $\frac{k^2-1}{2}$, если k нечетное). Поскольку мы умеем удваивать начальные числа, наше решение пройдет, если k^2-1 — степень двойки. Но такое число k только одно — 3.

Поэтому при $k \neq 3$ наш алгоритм работает не всегда, даже если начальное отношение количеств монет менее k. Это не случайно — на самом деле, при $k \neq 3$ ответ зависит не только от отношения M к N.

Приведем ответ для общего k: крупье не сможет помешать игроку, если (и только если) выполнены следующие условия:

— отношение чисел M и N не превышает k;
— существует натуральное r такое, что $2^r(M+N)$ кратно $k+1$;
— существует натуральное s такое, что $2^s(M-N)$ кратно $k-1$.

Доказательство этого утверждения оставляем читателю в качестве хорошей задачи.

9 класс

1. Ответ: может.

Пусть оценки судей для первой команды за каждый из первых трех конкурсов — (333334), за четвертый — (334444), а для второй команды за все конкурсы — (333344). Значения, полученные компьютером для первой команды, — 3,2; 3,2; 3,2; 3,7. Значения, полученные для второй, — 3,3; 3,3; 3,3; 3,3. Первая команда победила со счетом 13,3 : 13,2. При этом сумма оценок, выставленных судьями первой команде — 79, второй команде — 80.

Комментарий. Можно показать, что если игра состоит из трех конкурсов, описанная ситуация возникнуть не может.

2. Назовем точки трассы A и A' симметричными, если длина пути от точки A до одной границы зоны в одном направлении равна длине пути от точки A' до другой границы в противоположном направлении. Например, если велосипедист уснет в точке аномальной зоны, то проснется он в симметричной точке. Удобно считать, что трасса представляет собой окружность, тогда имеем осевую симметрию относительно диаметра, выходящего из середины зоны.

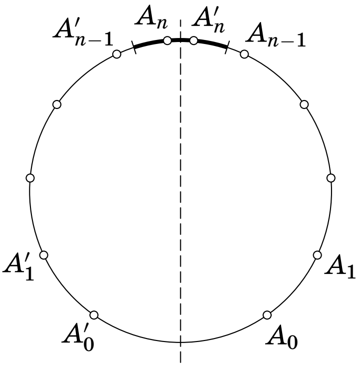


Рис. 15

Докажем следующую лемму: если велосипедист стартует в некоторой точке, рано или поздно он заснет в симметричной точке. Действительно, пусть велосипедист стартовал в точке A_0. Вечером он заснул в точке A_1, на следующий вечер — в A_2, и так далее до тех пор, пока на n-ю ночь он не заснул в аномальной зоне в точке A_n. Тогда просыпается он в точке A'_n, симметричной A_n. Легко видеть, что вечером велосипедист засыпает в точке A'_{n-1}, симметричной A_{n-1}, на следующий вечер — в точке A'_{n-2}, симметричной A_{n-2}, и так далее, пока не заснет в точке A'_0, симметричной A_0. Лемма доказана.

Разберем 2 случая.

1) Велосипедист стартовал из точки A вне аномальной зоны. В этом случае по доказанной лемме велосипедист однажды заснет (и проснется) в точке A', симметричной точке старта. Применим лемму к точке A': рано или поздно велосипедист заснет в симметричной ей точке, то есть в точке A.

2) Велосипедист стартовал из точки A в аномальной зоне. По доказанной лемме велосипедист однажды заснет в точке A', симметричной точке старта. Проснется же он в точке A, т. е. схема его перемещений зацикливается. Строго говоря, велосипедист не останавливается в точке A на ночлег, а просыпается в ней. Во время проведения олимпиады на вопрос участников

по условию данной задачи говорилось, что фразу «остановится в нем на ночлег» в условии следует читать как «остановится в нем на ночлег или же в нем проснется».

Таким образом, в обоих случаях точка старта когда-нибудь окажется точкой ночлега.

3. Первое решение. Обозначим угол ABC через β (см. рис. 16). Пусть $\beta < 90^\circ$. Тогда $\angle AOC = 2\beta$ как центральный к $\angle ABC$. Поскольку треугольник ACO равнобедренный, $\angle OAC = 90^\circ - \beta$. Треугольники ABL и ADL равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle ADL = \beta$. Обозначим точку пересечения AO и DL через S. $\angle SAD + \angle SDA = 90^\circ$, так что треугольник ASD прямоугольный, что и требовалось доказать.

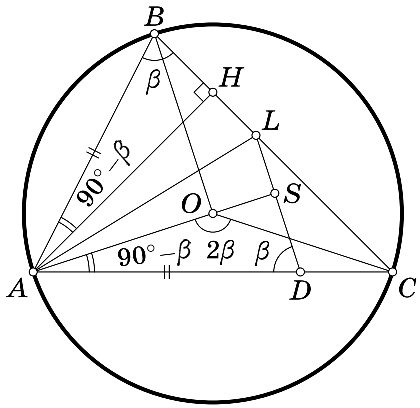


Рис. 16

Случай $\beta > 90^\circ$ рассматривается аналогично: $\angle SAD = \beta - 90^\circ$, $\angle SDA = 180^\circ - \beta$.

В случае $\beta = 90^\circ$ точка D лежит на луче AO и треугольники ABL и ADL равны, поэтому $\angle ADL = 90^\circ$, что и требовалось.

Второе решение. Пусть AH — высота треугольника ABC. Докажем, что прямые AO и AH симметричны относительно AL. Пусть $\beta < 90^\circ$. Тогда $\angle HAB = 90^\circ - \beta = \angle OAC$, причем лучи AO и AH лежат внутри угла BAC, а значит, они симметричны относительно биссектрисы AL. Пусть $\beta > 90^\circ$. Тогда $\angle HAB = \beta - 90^\circ = \angle OAC$, причем лучи AO и AH лежат вне угла BAC, а значит, симметричны относительно AL. В случае

$\beta=90^\circ$ точка D лежит на AO, и точка H совпадает с точкой B, прямые AO и AB симметричны относительно биссектрисы AL.

Прямые LB и LD симметричны относительно AL, так как треугольники ABL и ADL равны. Значит, угол между прямыми AO и LD равен углу между симметричными им прямыми AH и LB, то есть равен 90°.

4. О т в е т: существует.

Докажем, что среди чисел от 0 до $N-1$, где $N=10^{500}$, найдется искомое число. Если любое число из этого диапазона усложнить 100 раз, получится число, меньшее $10^{600}=(10^{300})^2$. Существует ровно 10^{300} полных квадратов, меньших 10^{600}.

Зафиксируем k — один из этих квадратов. Количество чисел, из которых его можно получить описанной в условии операцией, не превосходит количества способов зачеркнуть в нем 100 цифр. Это количество строго меньше количества способов выбрать из его цифр произвольный набор. Последнее же количество равно $2^{(\text{количество цифр в } k)}\leqslant 2^{600}$. Таким образом, общее количество чисел от 1 до $N-1$, из которых может быть получен полный квадрат, не превосходит

$$10^{300}\cdot 2^{600}=10^{300}\cdot 8^{200}<10^{500}=N.$$

Отсюда следует, что на промежутке от 0 до $N-1$ найдется число, из которого 100-кратным усложнением нельзя получить полный квадрат, что и требовалось.

К о м м е н т а р и й. Приведенное доказательство существования искомого числа является *неконструктивным*: мы показали, что число с требуемым свойством существует, но из наших рассуждений совершенно не ясно, как же найти хотя бы одно такое число. Можно разве что перебрать по одному все полные квадраты от 1 до 10^{500} и, вычеркивая числа, из которых эти квадраты могут быть получены, найти искомое число — но с этой задачей за разумное время не справится ни один современный компьютер.

Несмотря на этот очевидный недостаток, неконструктивные доказательства существования различных объектов играют значительную роль в современной математике.

5. О т в е т: 2550 рублей.

Эту сумму Вася получит, если 100 раз запросит 50 рублей (или 100 раз 51 рубль). Докажем, что Вася не может гарантировать себе бо́льшую сумму.

Представим себе, что рядом с Васей стоит банкир Коля, который знает номиналы карточек. Вася называет сумму, а Коля выбирает одну из карточек и вставляет ее в банкомат. Достаточно найти стратегию для Коли, при которой Вася не может получить более 2550 рублей.

Действительно, пусть имеется такая стратегия. Вернемся в условия исходной задачи, где картами обладает Вася. Как бы Вася ни действовал, обстоятельства могут сложиться так, как будто против него играет Коля («злая сила»), и тогда Вася получит не более 2550 рублей.

Предложим следующую стратегию для Коли. Когда Вася называет сумму, Коля вставляет произвольную карточку с номиналом, меньшим названной суммы, если таковая имеется, и карточку с максимальным номиналом из имеющихся на руках в противном случае. В первом случае карточка после использования называется *выкинутой*, во втором — *реализованной*. Ясно, что Вася получает деньги только с реализованных карточек, причем карточки реализуются в порядке убывания номиналов.

Пусть наибольший платеж составляет n рублей и этот платеж реализует карточку с номиналом m рублей, $m \geqslant n$. Сделаем два наблюдения. Во-первых, к моменту этого платежа карточки с номиналом, меньшим n рублей, уже съедены (иначе Коля вставил бы одну из таковых в банкомат вместо карты с номиналом m рублей). Во-вторых, все эти карточки выкинуты. Действительно, карточка с номиналом k рублей при $k < n$ не могла быть реализована раньше карточки с номиналом m рублей, поскольку $k < m$.

Таким образом, общее число реализованных карточек не превосходит $100 - n + 1$. С каждой реализованной карточки Вася получает не более n рублей, поэтому общая сумма, полученная Васей, не превосходит $n \times (100 - n + 1)$; максимум достигается при $n = 50$ и $n = 51$.

6. Первое решение. Разрезав криволинейный шестиугольник с дугами в качестве сторон, можно сложить криволинейный «квадрат» и линзу (рис. 17).

Второе решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$, у которой $AB = BC = CD = 1$ и площадь равна площади правильно-

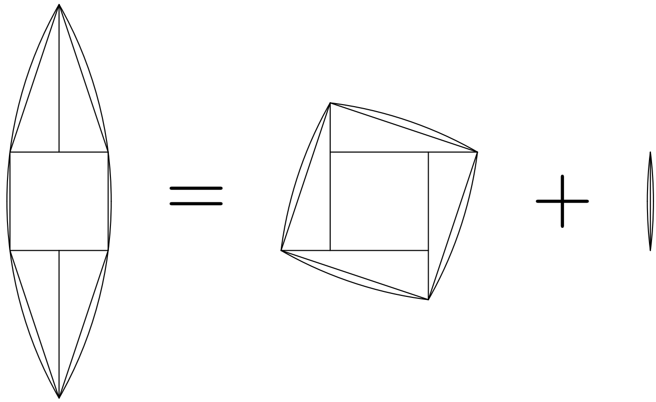


Рис. 17

го треугольника со стороной 1. Известно, что из любого многоугольника, разрезав его на подходящие части, можно сложить любой другой многоугольник той же площади; разрежем трапецию на несколько многоугольников и сложим из них правильный треугольник. Проведем теперь дугу окружности через вершины трапеции. Отрезав от сегмента, ограниченного дугой и отрезком AD, три маленьких сегмента по сторонам трапеции AB, BC, CD (рис. 18) и приставив их к сторонам правильного треугольника, получим выпуклую фигуру F (рис. 20), ограниченную тремя дугами окружностей. Таким образом, фигуру, составленную из двух таких сегментов, симметричных относительно общей хорды (рис. 19), можно разрезать на части и сложить из них две фигуры, равных F.

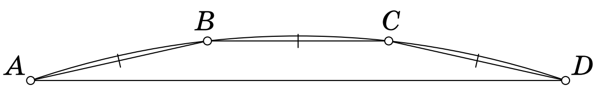


Рис. 18

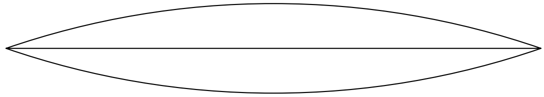


Рис. 19

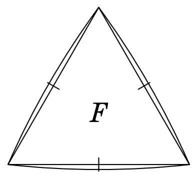


Рис. 20

10 класс

1. Ответ: 3 студента.

Как видно из рис. 21, каждого студента видит 2, 3 или 6 храпометров. Значит, 7 разбивается в сумму слагаемых, каждое из которых равно 2, 3 или 6, а количество которых равно количеству студентов. Заметим, что ни одно из слагаемых не может равняться 6, потому что $7-6=1$ не представляется в виде суммы 2, 3 или 6. Значит, все слагаемые — 2 или 3. Если студентов $\leqslant 2$, то храпометры в сумме покажут не более $2\cdot 3=6$, что меньше 7. Если студентов $\geqslant 4$, то храпометры в сумме покажут не менее $4\cdot 2=8$, что больше 7. Значит, единственный возможный вариант — 3 студента. И действительно, $7=3+2+2$. Поэтому в аудитории 3 студента.

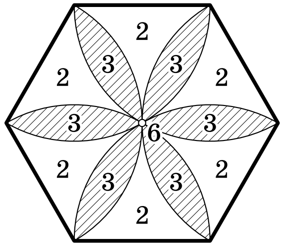


Рис. 21

2. Ответ: $p=\frac{m}{2^n}$, где m и n целые неотрицательные, а дробь несократима, $m\leqslant 2^n$.

Заметим, что если $p<0$ или $p>1$, то Борис выиграет (ему достаточно все время выбирать направление от 1, тем самым увеличивая расстояние от робота до отрезка).

Докажем, что при $p\in[0, 1]$ Андрей выигрывает тогда и только тогда, когда $p=\frac{m}{2^n}$, где m и n целые неотрицательные, а дробь несократима.

Докажем часть «тогда». Пусть на некотором шаге координата робота имеет такой вид и лежит между 0 и 1. Тогда Андрей назовет число $\frac{1}{2^n}$. Борис вынужден будет сместить робота в одну из точек $\frac{m+1}{2^n}$ или $\frac{m-1}{2^n}$. Эти точки того же вида $\frac{k}{2^l}$, но $l<n$ (т. к. m нечетно). Если $n>0$, то эти точки лежат между 0 и 1. Так как знаменатель рано или поздно станет равным 1, т. е. робот попадет в 0 или 1, то выиграет Андрей.

Докажем часть «только тогда». Пусть на некотором шаге координата x робота не представима в таком виде. Тогда для любого d хотя бы одно из чисел $x-d$, $x+d$ не имеет такого вида, т. к. иначе их полусумма x тоже имела бы такой вид.

Значит, Борис может добиться того, чтобы новая координата робота не представлялась в таком виде. Так как 0 и 1 имеют такой вид, то Борис выиграет.

3. О т в е т: можно.

Приведем пример такой расстановки. Рассмотрим последовательность 100, –33, 99, –32, ..., 34, 33. Тогда, если первое число пары стоит на нечетном месте, то сумма равна 67. А если на четном месте, то 66. Обратные величины будут соответственно равны $\frac{1}{67}$ и $\frac{1}{66}$, причем первых — 67, а вторых — 66. Тогда итоговая сумма равна 2.

4. Обозначим через P данный многочлен и через $x_1 < \ldots < x_k$ данные k целых точек. Так как $P(x_k) - P(x_1)$ делится на $x_k - x_1 \geqslant k - 1$ и не превосходит по модулю $k - 2$, то $P(x_k) - P(x_1) = 0$. Поэтому $P(x) = P(x_1) + (x - x_1)(x - x_k)Q(x)$ для некоторого многочлена Q.

Если $P(x_i) \neq P(x_1)$ для некоторого $i = 3, 4, \ldots, k-3, k-2$, то $Q(x_i) \neq 0$. Тогда

$$|P(x_i) - P(x_1)| \geqslant |(x_i - x_1)(x_i - x_k)| \geqslant 2(k-2) > k - 2.$$

Это противоречие показывает, что $P(x_i) = P(x_1)$. Итак, $P(x_3) = \ldots = P(x_{k-2}) = P(x_1)$. Поэтому

$$P(x) = P(x_1) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\ldots(x - x_{k-3})(x - x_{k-2})(x - x_k)R(x)$$

для некоторого многочлена R.

Если $P(x_2) \neq P(x_1)$, то $R(x_2) \neq 0$. Тогда

$$|P(x_2) - P(x_1)| \geqslant (k-4)!\,(k-2) > k - 2.$$

Это противоречие показывает, что $P(x_2) = P(x_1)$. Аналогично $P(x_{k-1}) = P(x_1)$.

5. Заметим, что четырехугольник $AC'A'C$ — вписанный (см. рис. 22). Значит, $\angle BAC = \angle BA'C'$ и $\angle BCA = \angle BC'A'$. Рассмотрим треугольник A^*BC^*, симметричный треугольнику $A'BC'$ относительно биссектрисы угла ABC. Этот треугольник гомотетичен треугольнику ABC с центром в точке B. Значит, BB_0

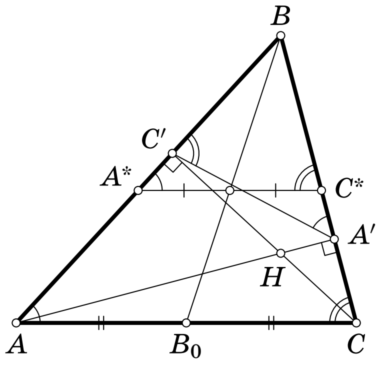


Рис. 22

проходит через середину отрезка A^*C^*. Поэтому прямая, симметричная BB_0 относительно биссектрисы $\angle ABC$, проходит через середину отрезка $A'C'$. Очевидно, что AC' и CA' — высоты треугольника AHC. Отсюда, аналогично приведенному выше рассуждению, имеем, что прямая, симметричная HB_0 относительно биссектрисы угла $\angle AHC$, проходит через середину отрезка $A'C'$. Значит, прямые из условия пересекаются на прямой $A'C'$.

6. Ответ: б) при четных N.

а) Рассмотрим какой-нибудь цвет, например красный. Найдем два числа красного цвета, разность которых делится на 8 (такие найдутся, потому что число остатков при делении на 8 конечно и, взяв два красных числа с одинаковым остатком, мы получаем искомую пару). Обозначим эти числа через a и b, а цвет числа $\frac{a+b}{2}$ через $Ц_1$. При этом $\frac{3a+b}{4}$ и $\frac{a+3b}{4}$ имеют один и тот же цвет $Ц_2$ (полусумма чисел красного цвета и $Ц_1$). Числа $\frac{7a+b}{8}$, $\frac{5a+3b}{8}$, $\frac{3a+5b}{8}$ и $\frac{a+7b}{8}$ имеют один и тот же цвет $Ц_3$ (полусумма чисел красного цвета и $Ц_2$). Так как числа $\frac{a+b}{2}$,

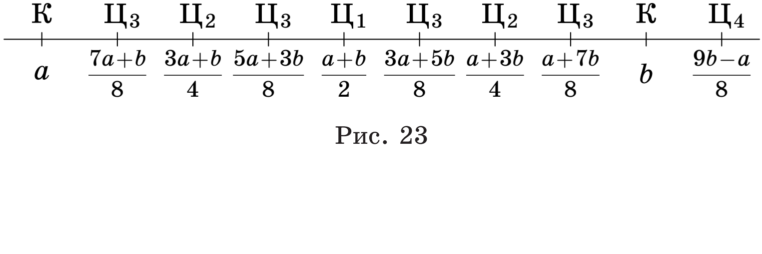


Рис. 23

$\frac{a+3b}{4}$, и $\frac{3a+5b}{8}$ являются полусуммами чисел цвета Ц$_3$, то цвета Ц$_1$, Ц$_2$ и Ц$_3$ совпадают.

Рассмотрим цвет числа $\frac{9b-a}{8}$. Пусть это Ц$_4$. Тогда $\frac{a+7b}{8}$ и b являются полусуммами чисел цвета Ц$_4$ и Ц$_1$ и поэтому имеют одинаковый цвет. Таким образом, Ц$_1$ — это красный цвет, что и требовалось доказать.

б) Если N нечетно, то можно сделать следующую раскраску: покрасить число в цвет $j \in \{0, \ldots, N-1\}$, если оно имеет остаток j от деления на N. Легко видеть, что такая раскраска удовлетворяет условию задачи.

Теперь докажем, что для любой раскраски, удовлетворяющей условию задачи, N нечетно.

Докажем, что для каждого цвета (например, красного) последовательность чисел, окрашенных в него, является арифметической прогрессией с нечетной разностью. Обозначим эту последовательность через $a_1 < a_2 < \ldots$ Докажем индукцией по n, что $a_1, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия с нечетной разностью.

При $n=1$ в прогрессии один член и доказывать нечего.

При $n=2$ разность $a_2 - a_1$ нечетна, потому что иначе число $\frac{a_1+a_2}{2}$ было бы красного цвета (по пункту а).

Пусть для $n=k$ утверждение верно. Докажем его для $n=$ $=k+1$. Предположим, что $a_{k+1}-a_k$ четно. Тогда число $\frac{a_k+a_{k+1}}{2}$ красного цвета (по пункту а). Противоречие. Значит, $a_{k+1}-a_k$ нечетно. Поэтому и по предположению индукции $a_{k+1}-a_{k-1}$ четно. Значит, $\frac{a_{k+1}+a_{k-1}}{2}$ красное. Поэтому $\frac{a_{k+1}+a_{k-1}}{2} = a_k$. Утверждение индукции для $n=k+1$ доказано.

Пусть теперь $d_1, \ldots, d_N$ — разности прогрессий. Докажем, что $\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{d_j} = 1$. Пусть $a = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} b_j$, где b_j — минимальное число цвета j. Далее, пусть D — наименьшее общее кратное всех d_j. Тогда среди чисел $a+1, \ldots, a+D$ ровно D/d_j чисел цвета j (так как числа цвета j образуют прогрессию с разностью d_j). Значит, $D = \sum_{j=1}^{N} \frac{D}{d_j}$, и $\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{d_j} = 1$.

Так как все d_j нечетны, то и N нечетно. (Действительно, приведем все дроби к общему знаменателю, получим в знаменателе нечетное число, в числителе — сумму N нечетных слагаемых, равную знаменателю, и значит, нечетную. Поэтому N нечетно).

11 класс

1. Ответ: $x = -p/6$.

Если x_1, x_2 — абсциссы точек пересечения данных парабол, то для каждого значения $x_0 \in [x_1; x_2]$ площадь части исходной фигуры, расположенной слева от вертикальной прямой с абсциссой x_0, равна

$$S(x_0) = \int_{x_1}^{x_0} (-2x^2 - (x^2 + px + q))\, dx = \int_{x_1}^{x_0} (-3x^2 - px - q)\, dx,$$

т. е. совпадает с площадью соответствующей части новой фигуры, ограниченной осью абсцисс и новой параболой

$$y = -3x^2 - px - q.$$

Но новая парабола пересекает ось x в точках с абсциссами x_1, x_2, а значит, симметрична относительно вертикальной прямой с абсциссой $\frac{x_1 + x_2}{2}$. Следовательно, площадь новой фигуры (равно как и исходной) разделится пополам, когда

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{-p}{2 \cdot (-3)} = -\frac{p}{6}\,.$$

Комментарий. Равенство площадей соответствующих частей исходной и новой фигуры можно обосновать и без использования интеграла, например, с помощью *принципа Кавальери*, т. е. из равенства длин соответствующих вертикальных отрезков

$$[-2x^2; x^2 + px + q] \quad \text{и} \quad [-3x^2 - px - q; 0]$$

при каждом значении $x \in [x_1; x_0]$.

2. Ответ: 47.

Если $n^2 \leqslant 2008$, то 2008! делится на n^n (так как числа n, $2n$, ..., $(n-1)n$ и n^2 содержатся среди чисел 1, 2, ..., 2007, 2008). Так как $44^2 < 2008 < 45^2$, то достаточно проверить делимость 2008! на n^n при $n \geqslant 45$.

1) 2008! делится на $45^{45}=5^{45}\cdot 3^{90}$, т. к. среди чисел 1, 2, ..., 2007, 2008 заведомо найдется 45 чисел, кратных 5, и 90 чисел, кратных 3 (т. к. $5\cdot 45=225<2008$ и $3\cdot 90=270<2008$).

2) 2008! делится на $46^{46}=2^{46}\cdot 23^{46}$, т. к. среди чисел 1, 2, ..., 2007, 2008 заведомо найдется 46 чисел, кратных 2, и 46 чисел, кратных 23 ($23\cdot 46=1058<2008$).

3) 2008! не делится на 47^{47}, т. к. число 47 простое, и поэтому среди чисел 1, 2, ..., 2007, 2008 есть лишь 42 числа кратных 47 (т. к. $47\cdot 42=1974<2008<2021=43\cdot 47$).

Легко заметить, что для произвольного натурального x наименьшим натуральным n, для которого $x!$ не делится на n^n, является наименьшее простое число p, такое, что $p^2>x$.

3. О т в е т: Невозможно.

Пусть x — число школьников, сделавших не более чем по 3 ошибки, y — число школьников, сделавших по 4 или по 5 ошибок, а z — число школьников, сделавших не менее чем по 6 ошибок. Тогда $x+y+z=333$.

Предположим, что $z>x$. Тогда $z=x+t$, где $t\geqslant 1$. В этом случае должны выполняться неравенства:

$$1000\geqslant 0\cdot x+3y+6z=3y+3(x+t)+3z=3(x+y+z)+3t=\\=999+3t\geqslant 1002,$$

а это невозможно.

4. Так как OD — высота в прямоугольном треугольнике MAO, то $MO^2=MA\cdot MD$ (см. рис. 24). Так как O — центр впи-

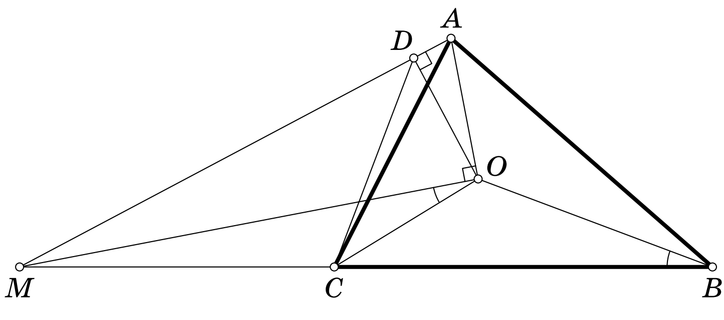


Рис. 24

санной окружности, то $\angle CAO + \angle ACO + \angle OBC = \frac{\pi}{2}$. С другой стороны, из треугольника AOC получаем, что

$$\angle AOC = \pi - (\angle CAO + \angle ACO) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \angle OBC\right) = \frac{\pi}{2} + \angle OBC > \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда

$$\angle MOC = \angle AOC - \frac{\pi}{2} = \angle OBC$$

и $\triangle MOB \sim \triangle MCO$ ($\angle OMC$ — общий). Следовательно,

$$\frac{MO}{MC} = \frac{MB}{MO},$$

откуда получаем, что $MO^2 = MB \cdot MC$. Из равенства $MA \cdot MD = MB \cdot MC$ получаем, что $\triangle MAB \sim \triangle MCD$. Следовательно, $\angle MBA = \angle MDC = \pi - \angle ADC$, т. е. вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Существует другое решение, использующее тот факт, что OM является общей касательной к двум окружностям, описанным около треугольников ADO и OBC соответственно.

5. О т в е т: а) 2; б) 2, 4, 38, 76.

1) Пусть через t минут на ленте лежат $m(t)$ деталей типа A и $k(t)$ деталей типа B. Так как $m(t)$ и $k(t)$ имеют разную четность, то $|m(t) - k(t)|$ может принимать только значения 1, 3, 5, ... Так как каждую минуту добавляется деталь того типа, которого на ленте меньше, а убирается произвольная деталь, то $|m(t) - k(t)|$ либо не изменяется, либо уменьшается. Так как по условию исходное расположение повторяется через некоторое число n минут (а значит, и через $2n$, $3n$ и т. д.), то получаем, что величина $|m(t) - k(t)|$ не изменяется при всех t.

2) Допустим, что $|m(t) - k(t)| \geqslant 3$. Так как $|m(t) - k(t)|$ не изменяется, а $m(t)$ и $k(t)$ могут меняться только на 1, то $m(t)$ и $k(t)$ также не изменяются. Тогда добавляется всегда деталь одного и того же типа и при этом деталь того же типа всегда снимается. Это означает, что исходно на ленте все детали одного типа и деталь того же типа добавляется. Это противоречит правилу подготовки следующей детали. Следовательно, $|m(t) - k(t)| = 1$ при всех t.

3) Пусть a_1, ..., a_{75}, a_{76}, a_{77}, ... — типы деталей (A или B), которые стояли исходно на конвейере и добавлялись в после-

дующие моменты. Мы показали, что при любом i среди a_{i+1}, ..., a_{i+75} 38 раз встречается A и 37 раз встречается B и тогда $a_{i+76}=B$, либо все наоборот. В любом случае при каждом i среди a_{i+1}, ..., a_{i+76} A и B встречаются по 38 раз.

4) Так как среди a_i, ..., a_{i+75} A и B встречаются по 38 раз и среди a_{i+1}, ..., a_{i+76} A и B встречаются по 38 раз, то $a_{i+76}=a_i$ (при каждом i). Таким образом 76 — период последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{75}, a_{76}, a_{77}, \ldots$

5) Пусть через n минут ситуация на конвейере впервые повторилась. Тогда n — период последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{75}, a_{76}, a_{77}, \ldots$ Обратно, если q — период этой последовательности, то через q минут ситуация на конвейере повторяется. Следовательно, n — минимальный период последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{75}, a_{76}, a_{77}, \ldots$

6) Известно (и легко показать), что минимальный период является делителем любого периода. Следовательно, 76 делится на n, то есть период длины n укладывается целое число раз на отрезке последовательности длины 76. Так как на любом отрезке длины 76 детали A и B встречаются одинаковое число раз, то это же верно и для периода длины n. Отсюда следует, что n — четное число и возможно только $n=2$, 4, 38, 76.

7) Пусть $n=2k$ и 76 делится на n. Построим бесконечную последовательность, в которой сначала k раз стоит A, затем k раз стоит B и затем все повторяется с периодом $2k$. Эта последовательность будет порождаться в нашей задаче, если в качестве исходного расположения деталей на конвейере взять первые 75 элементов последовательности, причем впервые исходная ситуация повторится ровно через $2k$ минут. Таким образом, все значения $n=2$, 4, 38, 76 могут реализоваться.

6. Ответ: $v \geqslant 1+\sqrt{2}$.

Введем прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с точкой A, а точки B, C и D имеют в ней координаты $(0, 1)$, $(1, 1)$ и $(1, 0)$ соответственно.

Укажем такое поведение зайцев, которое при некоторых значениях v заведомо позволяет спастись одному из них, а затем определим эти значения v. Расстояние между двумя прямыми, задаваемыми в нашей системе координат уравнениями

$y=x+a$ и $y=x+b$ соответственно, равно $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$. Следовательно, за то время, пока лиса сможет переместиться с одной из этих прямых на другую, каждый из зайцев сможет пробежать расстояние $\frac{|a-b|}{v\sqrt{2}}$. По условию и в силу выбора системы координат в начальный момент времени лиса находится на прямой $y=x$. Поэтому в момент, когда лиса находится на прямой $y=x+a$, зайцы, стартовавшие из точек B и D, всегда смогут находиться в точках с координатами $\left(0, 1+\frac{a}{v\sqrt{2}}\right)$ и $\left(1-\frac{a}{v\sqrt{2}}, 0\right)$ соответственно (пока эти координаты неотрицательны). Пусть зайцы следуют этой стратегии. Будем называть этих зайцев *первым* и *вторым*.

Без ограничения общности можно считать, что сначала лиса поймает первого зайца. Это произойдет в точке $\left(0, 1+\frac{a}{v\sqrt{2}}\right)$, принадлежащей прямой $y=x+a$, т. е. при $1+\frac{a}{v\sqrt{2}}=a$. Находя a, получим, что эта точка имеет ординату $a=\frac{v\sqrt{2}}{v\sqrt{2}-1}$. Действуя согласно указанной стратегии, второй заяц в этот момент будет находиться в точке с абсциссой $1-\frac{a}{v\sqrt{2}}=\frac{v\sqrt{2}-2}{v\sqrt{2}-1}$ (если эта абсцисса окажется отрицательной, второй заяц спасется раньше, чем лиса поймает первого зайца). Если в момент поимки первого зайца отношение ординаты лисы к абсциссе второго зайца окажется больше значения v, то второй заяц спасется бегством к точке A. Значит, при $\frac{v\sqrt{2}}{v\sqrt{2}-1}>v\cdot\frac{v\sqrt{2}-2}{v\sqrt{2}-1}$, т. е. при $v<1+\sqrt{2}$, предложенное поведение зайцев заведомо позволяет спастись одному из них.

Пусть теперь $v\geqslant 1+\sqrt{2}$. Укажем поведение лисы, при котором она сможет поймать обоих зайцев. Пусть сначала она бежит по прямой $y=x$ к точке A с максимальной скоростью. Поскольку в точку A лиса сможет прибежать раньше каждого из зайцев, то обязательно настанет такой момент, что расстояние от лисы до этой точки станет равным наименьшему из расстояний от каждого из зайцев до точки A. Без ограничения общности будем считать, что наименьшим будет расстояние от первого из зайцев до A, а координаты лисы и первого зайца

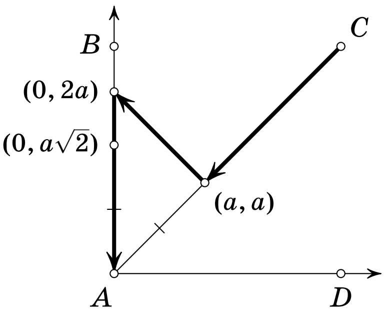


Рис. 25

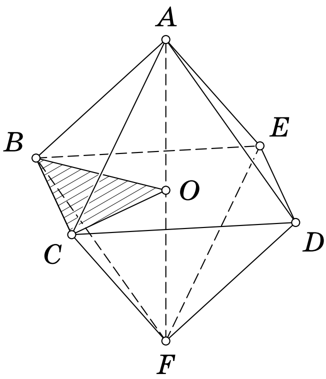


Рис. 26

в этом момент равны (a, a) и $(0, a\sqrt{2})$ соответственно. Тогда, двигаясь прямолинейно с максимальной скоростью сначала в точку с координатой $(0, 2a)$, а затем в точку A, лиса поймает первого зайца и окажется в точке A не позже второго (см. рис. 25). Действительно, за время, пока лиса пробежит от точки (a, a) до точки $(0, 2a)$, первый заяц пробежит не более $\frac{a\sqrt{2}}{v}$. Так как $a\sqrt{2}+\frac{a\sqrt{2}}{v} \leqslant 2a$ при $v \geqslant 1+\sqrt{2}$, то он не убежит за точку $(0, 2a)$, а так как $a\sqrt{2}-\frac{a\sqrt{2}}{v} \geqslant \frac{2a}{v}$, то двигаясь от точки $(0, 2a)$ в точку A, лиса успеет поймать его. Так как в тот момент, когда лиса свернула с прямой $y=x$, второй заяц находился не ближе к точке A, чем первый заяц, то до точки A лиса добежит не позже, чем второй заяц. Побежав затем по лучу AD, лиса поймает и его.

7. О т в е т: а) нет; б) да; в) да.

а) Покажем, что в правильном октаэдре $ABCDEF$ (рис. 26) нельзя выбрать четыре вершины с указанным в пункте а) свойством. Без ограничения общности можно считать, что выбраны вершины A, B, C и F, поскольку октаэдр может быть так переведен некоторым движением сам в себя, что эта четверка его вершин перейдет в любую другую выбранную, не лежащую в одной плоскости, четверку вершин этого октаэдра. Пусть O — центр квадрата $BCDE$. Тогда ортогональная проекция тетраэдра $ABCF$ на плоскость BCD совпадает с треугольником OBC, а проекция октаэдра $ABCDEF$ на ту же плоскость — с квадратом $BCDE$. Отношение площадей этих проекций равно $1/4$.

б) В произвольном многограннике Λ так выберем четыре его вершины A, B, C и D, что образованный ими тетраэдр обладает наибольшим возможным объемом (если таких четверок несколько, то выберем любую из них). Если у многогранника Λ найдется такая его вершина F, которая лежит по другую сторону, чем вершины B, C и D, от плоскости α, содержащей вершину A и параллельной плоскости BCD, то объем тетраэдра $FBCD$ окажется больше объема тетраэдра $ABCD$. Это противоречит выбору вершин A, B, C и D. Значит, весь многогранник Λ не имеет общих точек с одним из двух полупространств, на которые делит пространство плоскость α. Аналогичные рассуждения с плоскостями β, γ и δ, содержащими вершины B, C и D соответственно и параллельными плоскостям ACD, ABD и ABC соответственно, доказывают, что многогранник Λ целиком лежит в тетраэдре $A'B'C'D'$, ограниченном плоскостями α, β, γ и δ (рис. 27).

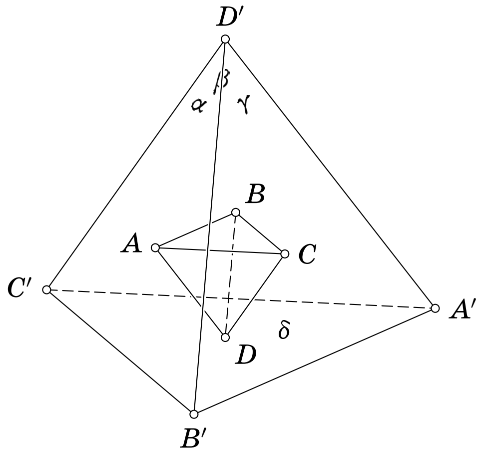


Рис. 27

Из курса стереометрии известно, что медианы тетраэдра $ABCD$ (то есть четыре отрезка, каждый из которых соединяет одну из его вершин с точкой пересечения медиан противоположной этой вершине грани) пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $3:1$, считая от вершин. Рассмотрим гомотетию с центром в этой точке и коэффициентом -3. При такой гомотетии точки пересечения медиан граней BCD, ACD, ABD и ABC тетраэдра $ABCD$ перейдут соответственно в его вершины A, B, C и D, а плоскости этих граней — соответственно в плоскости α, β, γ и δ. Следовательно, тетраэдр $ABCD$ гомотетичен тетраэдру $A'B'C'D'$ с коэффициентом $-1/3$, а его вершины A, B, C и D являются точками пересечения медиан соответствующих граней $B'C'D'$, $A'C'D'$, $A'B'D'$ и $A'B'C'$ тетраэдра $A'B'C'D'$. Но тогда и проекция тетраэдра $ABCD$ на произвольную плоскость π также будет гомотетична с коэффициентом $-1/3$ проекции тетраэдра $A'B'C'D'$ на ту же плоскость. Следовательно, отношение площадей таких проекций будет равно $1/9$. Проекция же на π многогранника Λ будет содержаться в проекции тетраэдра $A'B'C'D'$ на эту плоскость и, следовательно, иметь площадь, не превосходящую девяти площадей проекции на π тетраэдра $ABCD$.

в) Продолжим рассуждения из доказательства предыдущего пункта. Проведем плоскости α', β', γ' и δ', симметричные плоскостям α, β, γ и δ соответственно относительно плоскостей BCD, ACD, ABD и ABC соответственно. Аналогично рассуждениям из пункта б) доказывается, что многогранник Λ целиком лежит по одну сторону от каждой из этих проведенных плоскостей, а значит — и в многограннике Ω, ограниченном плоскостями α, β, γ, δ, α', β', γ' и δ'.

Так как точки A, B, C и D являются точками пересечения медиан соответствующих граней $B'C'D'$, $A'C'D'$, $A'B'D'$ и $A'B'C'$ тетраэдра $A'B'C'D'$, то плоскости BCD, ACD, ABD и ABC делят пересекающие их ребра этого тетраэдра в отношении $2:1$, считая от вершин A', B', C' и D' соответственно. Но тогда плоскости α', β', γ' и δ' делят эти ребра в отношении $1:2$, считая от вершин A', B', C' и D' соответственно. Таким образом, многогранник Ω получается из тетраэдра $A'B'C'D'$ удалением четырех угловых тетраэдров, отсекаемых плоскостями α', β', γ' и δ' и равных тетраэдру $ABCD$ (см. рис. 28). Следовательно, поверхность многогранника Ω представляет собой четыре пары соответственно параллельных плоскостям BCD, ACD, ABD и

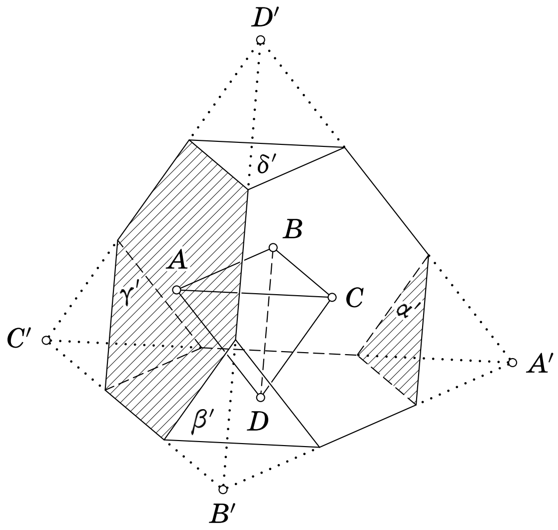


Рис. 28

ABC граней: треугольной, равной параллельной ей грани тетраэдра *ABCD*, и шестиугольной, которую можно составить из шести равных такой грани тетраэдра *ABCD* частей.

Рассмотрим проекции тетраэдра *ABCD* и многогранника Ω на произвольную плоскость π. Так как в каждую точку, лежащую внутри первой из этих проекций, проектируется ровно две различные точки поверхности тетраэдра *ABCD*, то площадь этой проекции равна половине суммы площадей проекций всех граней этого тетраэдра. Аналогично, площадь проекции многогранника Ω равна половине суммы площадей проекций всех граней этого многогранника. Группируя слагаемые в этой сумме по четырем указанным выше парам граней, заметим, что сумма площадей проекций граней в каждой из этих пар ровно в семь раз больше, чем площадь проекции соответствующей этой паре грани тетраэдра *ABCD*. А значит, и площадь проекции многогранника Ω ровно в семь раз больше, чем площадь проекции тетраэдра *ABCD*. Проекция же на π многогранника Λ будет содержаться в проекции многогранника Ω на эту плоскость и, следовательно, иметь площадь, не превосходящую семи площадей проекции на π тетраэдра *ABCD*.

6 класс (1230 работ)

Баллы	Задача					
	1	2	3	4	5	6
0	677	211	1045	618	89	426
1	8	169	45	0	114	8
2	2	706	98	1	1	4
3	543	144	14	0	264	531
4			11	9	2	174
5			17	1	551	53
6				601	0	13
7					209	4
8						17

7 класс (778 работ)

Баллы	Задача					
	1	2	3	4	5	6
0	169	586	364	198	713	655
1	50	41	50	8	15	38
2	20	1	187	352	5	21
3	415	4	70	121	0	17
4	124	146	17	5	1	7
5			53	6	6	10
6			37	23	1	18
7				3	2	5
8				62	35	4
9						3

8 класс (523 работы)

Оценка	Задача					
	1	2	3	4	5	6
+	121	105	99	2	7	0
+.	6	38	6	0	1	0
±	4	51	15	1	39	1
+/2	5	0	0	0	2	2
∓	58	79	15	21	0	5
−.	9	3	3	26	0	14
−	211	156	189	312	417	323
0	109	91	196	161	57	178

9 класс (409 работ)

Оценка	Задача					
	1	2	3	4	5	6
+!		1				1
+	91	29	18	0	2	1
+.	6	11	1	2	0	1
±	8	15	43	1	0	1
∓	34	44	9	2	219	0
−.	55	16	8	8	108	0
−	174	174	160	169	60	127
0	41	119	170	227	20	278

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

10 класс (585 работ)

Оценка	Задача						
	1	2	3	4	5	6а	6б
+	152	31	77	1	36	9	1
+.	27	2	0	1	2	1	0
±	115	13	7	0	3	1	1
+/2	0	0	13	0	0	0	0
∓	48	85	34	5	12	2	7
−.	80	118	0	3	0	0	0
−	146	258	254	91	155	214	184
0	17	78	200	484	377	358	392

11 класс (1103 работы)

Оценка	Задача								
	1	2	3	4	5а	5б	6	7а	7б, в
+	117	213	111	51	227	8	0	14	0
+.	14	15	11	8	15	1	0	3	0
±	37	59	19	4	60	9	1	1	0
∓	167	189	203	9	246	52	45	4	0
−.	75	54	86	12	23	44	61	1	0
−	693	573	673	1019	532	989	996	1080	1103

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. На факультете действуют научные школы, возглавляемые учеными самого высокого класса. Учебные планы факультета охватывают все современные направления математики и механики. Диплом механико-математического факультета признан во всем мире. На мехмате учат не столько рецептам решения конкретных задач, сколько умению думать самостоятельно, а также извлекать знания из разных источников. Именно это позволяет выпускникам факультета быстро включаться и быть эффективными практически в любой иной сфере деятельности — от компьютерной или финансовой до управления производством и политики.

Ежегодно в апреле механико-математический факультет проводит олимпиады для учащихся 8–10 классов, результаты которых учитываются при наборе в математические классы при факультете и в школу-интернат им. А. Н. Колмогорова. В 2008 году мехмат приглашает учеников 8–10 классов принять участие в олимпиадах по математике (6 апреля, начало в 11^{00}) и по механике (12 апреля, начало в 14^{00}). Олимпиады проходят в Главном здании МГУ на Воробьевых горах, информация для участников вывешивается на колоннах перед входом за 15–20 минут до начала олимпиады. Предварительной регистрации не требуется. С собой достаточно иметь тетрадку и ручку.

Российская Академия наук (отделение математики),
Математический институт имени В. А. Стеклова,
Объединенный институт ядерных исследований,
Московский центр непрерывного математического образования
при поддержке Департамента образования города Москвы и
Московского института открытого образования

планируют проведение с 19 по 30 июля 2008 года в Дубне (на базе санатория-профилактория «Ратмино»)

восьмой летней школы
«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс).

Для развития науки необычайно важно, чтобы активные при обучении в университетах и институтах студенты вовремя ощутили вкус реального научного творчества. Не менее важно, чтобы школьники, имеющие интерес к науке в школе, своевременно получили ориентиры продолжения образования. Наконец, одним из главных условий существенного научного роста является наличие самой атмосферы научной школы, системы общения (как старших с младшими, так и внутри одного поколения) не только на научные, но и на самые разнообразные темы. Для всего этого и служат научные школы, проводившиеся в России и послужившие хорошей опорой для развития российской науки в 20 веке.

Воссоздать и развить эту традицию призвана проводимая в восьмой раз школа. Первая школа прошла в 2001 году. С тех пор школа стала традиционной. К нашей гордости, большинство тех, кто побывал на школе в Дубне, стремятся приехать туда снова, причем это касается не только учащихся, но и преподавателей. По итогам предыдущих школ издательством МЦНМО выпущен ряд брошюр; имеются также видеозаписи ряда лекций (см. видеотеку сайта www.math-net.ru).

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов. Спортивный (соревновательный, олимпиадный) элемент в работе школы практически сведен к нулю. (Хотя планируются турниры по футболу, волейболу и т. п.)

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. В связи с этим, а также из-за ограниченности количества мест, мы не можем, к сожалению, принять всех желающих. Если вы хотите участвовать в работе школы, присылайте в Оргкомитет заполненную анкету участника. Приглашения принять участие в работе школы получат школьники — победители московской и всероссийской олимпиад по математике и физике, а также школьники и студенты, рекомендованные оргкомитету известными педагогами и учеными.

Председатель научного комитета — профессор А. Б. Сосинский.

Предварительное согласие провести занятия на школе дали академики РАН В. И. Арнольд, Д. В. Аносов, С. П. Новиков, проф. А. Б. Скопенков, А. Б. Сосинский, В. М. Тихомиров, В. А. Успенский, а также Ю. М. Бурман, А. И. Буфетов, С. В. Дужин, Г. Ю. Панина, И. В. Ященко и другие.

Контактный e-mail Оргкомитета: dubna@mccme.ru

Информационное сообщение о школе 2008 года и бланк анкеты будут опубликованы на сайте www.mccme.ru/dubna

---

ПРИГЛАШЕНИЕ
на устную олимпиаду по геометрии

VI Устная геометрическая олимпиада для 8–11 классов состоится 13 апреля 2008 года.

Олимпиада по геометрии проводится в рамках Четвертой Всероссийской олимпиады по геометрии памяти И. Ф. Шарыгина. В ней могут принять участие школьники 8–11 классов. Олимпиада рассчитана на школьников, успешно выступивших в городской математической олимпиаде, а также на школьников, увлекающихся геометрией.

Призеры олимпиады будут награждены дипломами оргкомитета и математической литературой. Победители олимпиады — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур Всероссийской олимпиады по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, который ориентировочно состоится 30 июля–1 августа 2008 года в г. Дубне под Москвой.

Олимпиада будет проходить в помещении школы № 192 по адресу Ленинский просп., д. 34-А (м. «Ленинский проспект»). Начало олимпиады в 11^{00}. Справки по тел.: (495) 137–33–55 с 10^{00} до 18^{00}.

Так как ожидается большое количество участников, то желающих принять участие в олимпиаде просим до 8 апреля зарегистрироваться на сайте школы. http://sch192.ru/olymp/

При регистрации необходимо указать свою фамилию, имя, класс, школу и округ (город).

Участников просим иметь при себе: сменную обувь, письменные принадлежности, бумагу для записей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXI Московская математическая олимпиада.
Задачи и решения

Формат бумаги $60 \times 90\ {}^1/_{16}$. Объём 3 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 3000 экз. Заказ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

Департамент образования города Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской обл.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXI

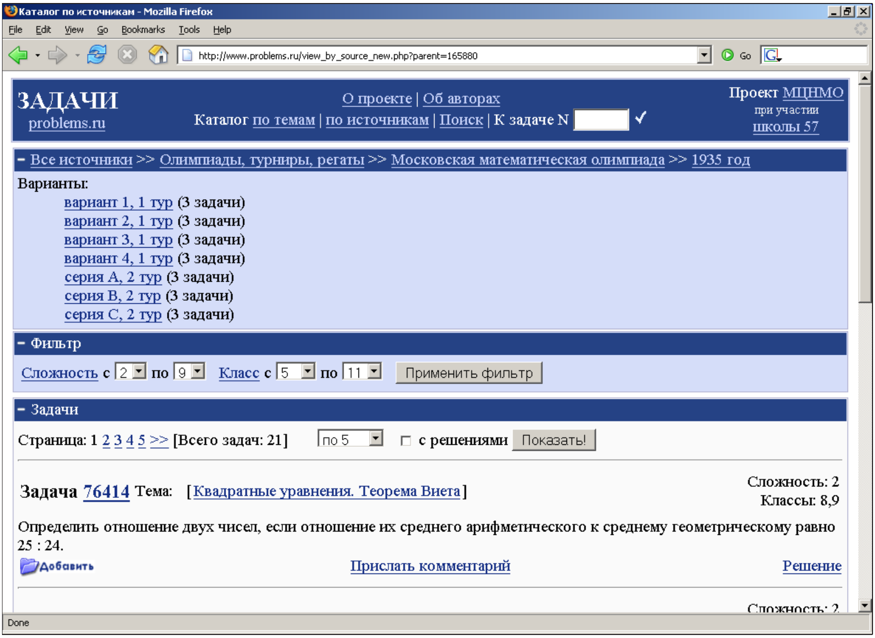
МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

(Московская региональная олимпиада школьников)

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Издательство МЦНМО
Москва, 2008

Все задачи Московских математических олимпиад и других математических соревнований на сайте `problems.ru`



Все книге по математике в магазине «Математическая книга» в МЦНМО

И Н Ф О Р М А Ц И Я О Н А Б О Р Е

в московские специализированные школы и классы на 2008/2009 учебный год*

Школа, адрес, тел., адрес в Интернете	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 2 ул. Фотиевой, 18 137–17–69 http://www.sch2.ru/ 137–69–31 http://www.school2.ru/	7 и 8 физ.-матем., 8 прогр.; *добор* в 10 и 9	Приём заявлений с 31 января; вступительные испытания в марте
№ 25 Университетский пр., 7 939–39–35 http://school-25.nm.ru/	10 физ.-матем. при мех.-матем. факультете МГУ	По вторникам с 16^{00} в каб. 30а
№ 54 ул. Доватора, 5/9 245–54–25 245–99–72 http://moscowschool54.narod.ru	9 при мех.-матем. факультете МГУ	С марта по май по рабочим четвергам с 10^{20} до 12^{00} в каб. 39
№ 57 М. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 291–85–72 291–54–58 http://www.sch57.msk.ru/	8 матем., 9 матем., 9 гум.	матем. по средам в 16^{00} с 26 марта; гум. по понед. в 16^{00} с 31 марта.
№ 179 ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 692–48–51 692–01–05 http://www.179.ru/	7, 8 матем., 9 матем и физ.-матем.	7 кл.: в апр.; 8 кл.: по понед. и четв. с 31 марта в 16^{30}; 9 кл.: оргсобр. 27 марта в МЦНМО в 18^{00}
№ 192 Ленинский просп., 34-А 137–33–55 137–72–85 http://www.sch192.ru/ mail@sch192.ru	5 ест.-научный, 7 био.-хим., физ.-матем., 9 физ.-хим., 10 физ.-хим.; *добор* в 6 подготов. к лицейск., 8, 9, 10 био.-хим., 8, 9, 10 физ.-матем.	март–май по пятницам в 16^{00} *Окончание на 3-й странице обложки*

* Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно. Обучение в школах (классах) бесплатное.

Окончание. Начало на 4-й странице обложки

Школа, адрес, тел., адрес в Интернете	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 218 Дмитровское ш., 5а 976–19–85 sch218.edu@mtu-net.ru http://www.mccme.ru/schools/218/	6, 7 разноур. обуч. (матем. и рус. яз.), 8 инд. уч. планы с возм. углуб. изучения матем., физ., информ., рус. и ин. яз., литерат.; *добор* в 9 и 10 (+ углуб. биол. и хим.), шир. выбор спецкурсов	запись на собеседование с 17 марта по телефону
№ 444 465–60–52 Ниж. Первомайская ул., 14 http://schools.keldysh.ru/sch444/	8 матем.-инф.-физ., *добор* в 9, 10 матем.	март
ЦО №1434 (шк. № 1134) 932–00–00 ул. Раменки 15, корп. 1 http://coe1434.ru http://school-1134.narod.ru	9 физ.-матем. класс при мех.-матем. факультете МГУ	по вторникам с 16^{30} в каб. 34а
№ 1514 ул. Крупской, 12 131–80–38 http://www.1514.ru 131–80–33	9 культуролог.; *добор* в 8–10 матем., гум., 10 культуролог.	с февраля по субботам в 15^{30}
№ 1543 ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 433–16–44, 434–26–44 http://www.1543.ru	8 матем., физ.-хим., био., гум.	апрель
СУНЦ МГУ 445–11–08 Кременчугская ул., 11 priem@pms.ru http://www.pms.ru	10 физ.-матем., комп.-информ., хим., био., 11 физ.-матем.	в Москве в апреле, в других городах с марта по май
«Интеллектуал» 445–52–10 Кременчугская ул., 13 http://int-sch.ru	5 с углуб. изучением ряда предм. (физ.-матем., био.-хим. и гум.); *добор* в 6–10.	запись на экзамены с февраля, экзамены в кон. марта – нач. апр.

Более подробная информация о наборе в эти и другие школы — на сайте http://www.mccme.ru