LXXI Московская математическая олимпиада, 11 класс

1. Числа p и q таковы, что параболы $y = -2x^2$ и $y = x^2 + px + q$ пересекаются в двух точках, ограничивая некоторую фигуру. Найдите уравнение *вертикальной* прямой, делящей площадь этой фигуры пополам.

2. Найдите наименьшее натуральное n, для которого число n^n *не является* делителем числа $2008! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2008$.

3. На едином экзамене 333 ученика допустили в общей сложности 1000 ошибок. Возможно ли при этом, что учеников, сделавших более чем по 5 ошибок, оказалось *больше*, чем учеников, сделавших менее чем по 4 ошибки?

4. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AO и пересекающая прямую BC в точке M. Из точки O на прямую AM опущен перпендикуляр OD. *Докажите*, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

5. Станок выпускает детали двух типов. На ленте его конвейера выложены в одну линию 75 деталей. Пока конвейер движется, на станке готовится деталь того типа, которого на ленте меньше. Каждую минуту очередная деталь падает с ленты, а подготовленная кладется в ее конец. Через некоторое *число* минут после включения конвейера может случиться так, что *расположение деталей на ленте впервые повторит начальное.* Найдите: **а)** наименьшее такое число, **б)** все такие числа.

6. Игрок на компьютере управляет лисой, охотящейся за двумя зайцами. В вершине A квадрата $ABCD$ находится нора: если в нее, в отсутствие лисы, попадает хотя бы один заяц, то игра проиграна. Лиса ловит зайца, как только оказывается с ним в одной точке (возможно, в точке A). Вначале лиса сидит в точке C, а зайцы — в точках B и D. Лиса бегает повсюду со скоростью не больше v, а зайцы — по лучам AB и AD со скоростью не больше 1. При каких значениях v лиса сможет поймать *обоих* зайцев?

7. Среди вершин любого ли многогранника можно выбрать четыре вершины тетраэдра, площадь проекции которого на *любую* плоскость составляет от площади проекции (на ту же плоскость) исходного многогранника **а)** больше, чем $\frac{1}{4}$, **б)** не меньше, чем $\frac{1}{9}$, **в)** не меньше, чем $\frac{1}{7}$?

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 23.03.2008.

Начало в 12:00. См. также сайт http://www.mccme.ru. Москва, 9 марта 2008 года