LXXII Московская математическая олимпиада

8 класс 15.03.2009

Задача № 1. На доске написано:

В этом предложении ...% цифр делятся на **2**, ...% цифр делятся на **3**, а ...% цифр делятся и на **2**, и на **3**.

Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным.

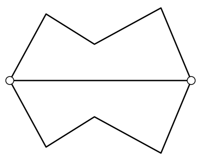
Задача № 2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K, для которой $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

Задача № 3. Известно, что квадратные уравнения $a x^2 + b x + c = 0$ и $b x^2 + c x + a = 0$ (a, b и c — отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его.

Задача № 4. В каждой клетке квадрата 101×101, кроме центральной, стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Машинка въезжает извне в произвольную клетку на границе квадрата, после чего ездит параллельно сторонам клеток, придерживаясь двух правил:
1) в клетке со знаком «прямо» она продолжает путь в том же направлении;
2) в клетке со знаком «поворот» она поворачивает на $90°$ (в любую сторону по своему выбору).

Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности врезаться в дом?

Задача № 5. Две точки на плоскости несложно соединить тремя ломаными так, чтобы получилось два равных многоугольника (например, как на рисунке). Соедините две точки четырьмя ломаными так, чтобы все три получившихся многоугольника были равны. (Ломаные несамопересекающиеся и не имеют общих точек, кроме концов.)



Задача № 6. Двое играющих по очереди пишут — каждый на своей половине доски — по одному натуральному числу (повторения разрешаются) так, чтобы сумма всех чисел на доске не превосходила **10000**. После того, как сумма всех *чисел* на доске становится равной **10000**, игра заканчивается подсчётом суммы всех *цифр* на каждой половине. Выигрывает тот, на чьей половине сумма цифр меньше (при равных суммах — ничья). Может ли кто-нибудь из игроков выиграть, как бы ни играл противник?

Седьмая устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 12 апреля 2009 г. в школе 192.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 4 апреля 2009 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXXII Московская математическая олимпиада

8 класс 15.03.2009

Задача № 1. На доске написано:

В этом предложении ...% цифр делятся на **2**, ...% цифр делятся на **3**, а ...% цифр делятся и на **2**, и на **3**.

Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным.

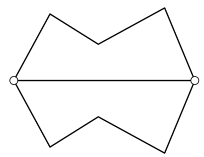
Задача № 2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K, для которой $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

Задача № 3. Известно, что квадратные уравнения $a x^2 + b x + c = 0$ и $b x^2 + c x + a = 0$ (a, b и c — отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его.

Задача № 4. В каждой клетке квадрата 101×101, кроме центральной, стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Машинка въезжает извне в произвольную клетку на границе квадрата, после чего ездит параллельно сторонам клеток, придерживаясь двух правил:
1) в клетке со знаком «прямо» она продолжает путь в том же направлении;
2) в клетке со знаком «поворот» она поворачивает на $90°$ (в любую сторону по своему выбору).

Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности врезаться в дом?

Задача № 5. Две точки на плоскости несложно соединить тремя ломаными так, чтобы получилось два равных многоугольника (например, как на рисунке). Соедините две точки четырьмя ломаными так, чтобы все три получившихся многоугольника были равны. (Ломаные несамопересекающиеся и не имеют общих точек, кроме концов.)



Задача № 6. Двое играющих по очереди пишут — каждый на своей половине доски — по одному натуральному числу (повторения разрешаются) так, чтобы сумма всех чисел на доске не превосходила **10000**. После того, как сумма всех *чисел* на доске становится равной **10000**, игра заканчивается подсчётом суммы всех *цифр* на каждой половине. Выигрывает тот, на чьей половине сумма цифр меньше (при равных суммах — ничья). Может ли кто-нибудь из игроков выиграть, как бы ни играл противник?

Седьмая устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 12 апреля 2009 г. в школе 192.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 4 апреля 2009 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXXII Московская математическая олимпиада

9 класс 15.03.2009

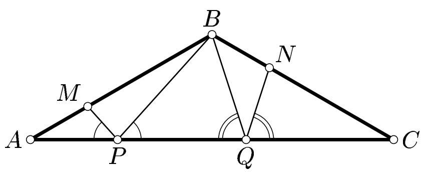
Задача № 1. После урока на доске остался график функции $y = \dfrac{k}{x}$ и пять прямых, параллельных прямой $y = kx$ $(k \neq 0)$. Найдите произведение абсцисс всех десяти точек пересечения.

Задача № 2. Докажите, что существует многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую — в отношении $2 : 1$.

Задача № 3. В каждой клетке квадрата 101×101 стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Машинка может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машинка попадает в клетку со знаком «прямо», то она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком «поворот», то поворачивает на 90° в любую сторону по своему выбору. В центральной клетке квадрата спрятаны сокровища. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности попасть в центральную клетку?

Задача № 4. Назовём последовательность натуральных чисел *интересной*, если каждый её член, кроме первого, является либо средним арифметическим, либо средним геометрическим двух соседних с ним членов. Сеня начал последовательность с трёх натуральных чисел, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Он хотел бы продолжить свою последовательность до бесконечной *интересной* последовательности, которая ни с какого момента не становится ни арифметической, ни геометрической прогрессией. Может ли оказаться, что этого нельзя сделать?[1]

Задача № 5. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120°. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N (см. рис.). Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.



Задача № 6. Дано целое число $n > 1$. Двое игроков по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим (отмечать одну и ту же точку дважды нельзя). Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. После этого каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. Игрок, у которого найденная длина больше — выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Может ли один из игроков обеспечить себе победу?

Закрытие LXXII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 4 апреля 2009 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

[1] Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $(a+b)/2$, а средним геометрическим — число $\sqrt{ab}$. Последовательность положительных чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен среднему арифметическому (среднему геометрическому) соседних с ним членов, является арифметической (геометрической) прогрессией.

LXXII Московская математическая олимпиада

9 класс 15.03.2009

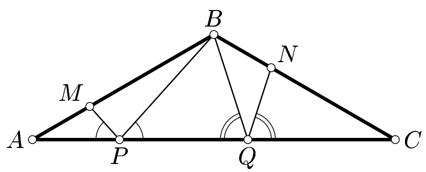
Задача № 1. После урока на доске остался график функции $y = \dfrac{k}{x}$ и пять прямых, параллельных прямой $y = kx$ $(k \neq 0)$. Найдите произведение абсцисс всех десяти точек пересечения.

Задача № 2. Докажите, что существует многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую — в отношении $2 : 1$.

Задача № 3. В каждой клетке квадрата 101×101 стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Машинка может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машинка попадает в клетку со знаком «прямо», то она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком «поворот», то поворачивает на 90° в любую сторону по своему выбору. В центральной клетке квадрата спрятаны сокровища. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности попасть в центральную клетку?

Задача № 4. Назовём последовательность натуральных чисел *интересной*, если каждый её член, кроме первого, является либо средним арифметическим, либо средним геометрическим двух соседних с ним членов. Сеня начал последовательность с трёх натуральных чисел, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Он хотел бы продолжить свою последовательность до бесконечной *интересной* последовательности, которая ни с какого момента не становится ни арифметической, ни геометрической прогрессией. Может ли оказаться, что этого нельзя сделать?[2]

Задача № 5. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120°. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N (см. рис.). Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.



Задача № 6. Дано целое число $n > 1$. Двое игроков по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим (отмечать одну и ту же точку дважды нельзя). Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. После этого каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. Игрок, у которого найденная длина больше — выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Может ли один из игроков обеспечить себе победу?

Закрытие LXXII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 4 апреля 2009 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

[2] Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $(a+b)/2$, а средним геометрическим — число $\sqrt{ab}$. Последовательность положительных чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен среднему арифметическому (среднему геометрическому) соседних с ним членов, является арифметической (геометрической) прогрессией.

LXXII Московская математическая олимпиада

10 класс 15.03.2009

Задача № 1. Через терминал оплаты на мобильный телефон можно перевести деньги, при этом взимается комиссия — целое положительное число процентов. Федя положил целое количество рублей на мобильный телефон, и его счёт пополнился на $\mathbf{847}$ рублей. Сколько денег положил на счёт Федя, если известно, что комиссия менее $\mathbf{30\%}$?

Задача № 2. Дана возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ такая, что каждый её член является либо средним арифметическим, либо средним геометрическим двух соседних. Обязательно ли с некоторого момента эта последовательность становится либо арифметической, либо геометрической прогрессией?

Задача № 3. Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Обязательно ли найдётся отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух?

Задача № 4. На кольцо свободно нанизано $\mathbf{2009}$ бусинок. За один ход любую бусинку можно передвинуть так, чтобы она оказалась ровно посередине между двумя соседними. Существуют ли такие изначальная расстановка бусинок и последовательность ходов, при которых какая-то бусинка пройдет хотя бы один полный круг?

Задача № 5. Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках A_1, B_1. Пусть A_2, B_2 — ортоцентры треугольников CAA_1 и CBB_1. Докажите, что прямая A_2B_2 перпендикулярна биссектрисе угла C.

Задача № 6. Докажите, что при любых натуральных $0 < k < m < n$ числа C_n^k и C_n^m не взаимно просты. $\Big(C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число способов выбрать k элементов из n различных элементов без учета порядка.$\Big)$

Седьмая устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 12 апреля 2009 г. в школе 192.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 4 апреля 2009 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

LXXII Московская математическая олимпиада

10 класс 15.03.2009

Задача № 1. Через терминал оплаты на мобильный телефон можно перевести деньги, при этом взимается комиссия — целое положительное число процентов. Федя положил целое количество рублей на мобильный телефон, и его счёт пополнился на $\mathbf{847}$ рублей. Сколько денег положил на счёт Федя, если известно, что комиссия менее $\mathbf{30\%}$?

Задача № 2. Дана возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ такая, что каждый её член является либо средним арифметическим, либо средним геометрическим двух соседних. Обязательно ли с некоторого момента эта последовательность становится либо арифметической, либо геометрической прогрессией?

Задача № 3. Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Обязательно ли найдётся отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух?

Задача № 4. На кольцо свободно нанизано $\mathbf{2009}$ бусинок. За один ход любую бусинку можно передвинуть так, чтобы она оказалась ровно посередине между двумя соседними. Существуют ли такие изначальная расстановка бусинок и последовательность ходов, при которых какая-то бусинка пройдет хотя бы один полный круг?

Задача № 5. Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках A_1, B_1. Пусть A_2, B_2 — ортоцентры треугольников CAA_1 и CBB_1. Докажите, что прямая A_2B_2 перпендикулярна биссектрисе угла C.

Задача № 6. Докажите, что при любых натуральных $0 < k < m < n$ числа C_n^k и C_n^m не взаимно просты. $\Big(C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число способов выбрать k элементов из n различных элементов без учета порядка.$\Big)$

Седьмая устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 12 апреля 2009 г. в школе 192.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 4 апреля 2009 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo