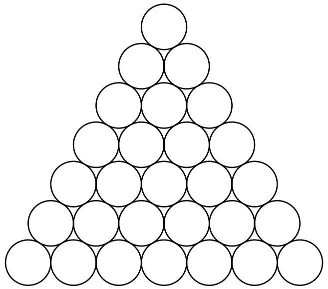
LXXIII Московская математическая олимпиада

8 класс 14.03.2010

Задача № 1. КУБ является кубом. Докажите, что ШАР кубом не является. (КУБ и ШАР — трёхзначные числа, разные буквы обозначают различные цифры.)

Задача № 2. На столе в виде треугольника выложены $\mathbf{28}$ монет одинакового размера (см. рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна $\mathbf{10}$ г. Найдите суммарную массу всех $\mathbf{18}$ монет на границе треугольника.

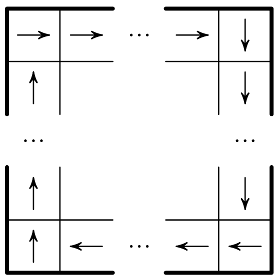


Задача № 3. В треугольнике $\boldsymbol{ABC}$ точка $\boldsymbol{M}$ — середина стороны $\boldsymbol{AC}$, точка $\boldsymbol{P}$ лежит на стороне $\boldsymbol{BC}$. Отрезок $\boldsymbol{AP}$ пересекает $\boldsymbol{BM}$ в точке $\boldsymbol{O}$. Оказалось, что $\boldsymbol{BO = BP}$. Найдите отношение $\boldsymbol{OM : PC}$.

Задача № 4. Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

Задача № 5. В треугольнике $\boldsymbol{ABC}$ точка $\boldsymbol{I}$ — центр вписанной окружности. Точки $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ — середины сторон $\boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{AC}$ соответственно. Известно, что угол $\boldsymbol{AIN}$ прямой. Докажите, что угол $\boldsymbol{BIM}$ — также прямой.

Задача № 6. В некоторых клетках квадрата $\mathbf{20 \times 20}$ стоит стрелочка в одном из четырёх направлений. На границе квадрата все стрелочки смотрят вдоль границы по часовой стрелке (см. рис.). Кроме того, стрелочки в соседних (возможно, по диагонали) клетках не смотрят в противоположных направлениях. Докажите, что найдётся клетка, в которой стрелочки нет.



Восьмая устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 11 апреля 2010 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

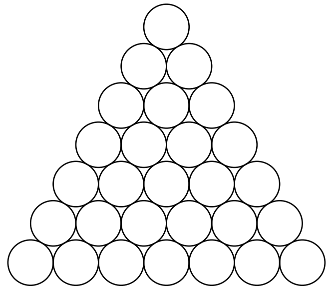
Закрытие LXXIII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 3 апреля 2010 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXIII Московская математическая олимпиада

8 класс 14.03.2010

Задача № 1. КУБ является кубом. Докажите, что ШАР кубом не является. (КУБ и ШАР — трёхзначные числа, разные буквы обозначают различные цифры.)

Задача № 2. На столе в виде треугольника выложены $\mathbf{28}$ монет одинакового размера (см. рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна $\mathbf{10}$ г. Найдите суммарную массу всех $\mathbf{18}$ монет на границе треугольника.

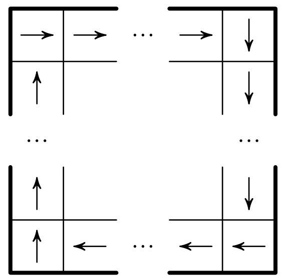


Задача № 3. В треугольнике $\boldsymbol{ABC}$ точка $\boldsymbol{M}$ — середина стороны $\boldsymbol{AC}$, точка $\boldsymbol{P}$ лежит на стороне $\boldsymbol{BC}$. Отрезок $\boldsymbol{AP}$ пересекает $\boldsymbol{BM}$ в точке $\boldsymbol{O}$. Оказалось, что $\boldsymbol{BO = BP}$. Найдите отношение $\boldsymbol{OM : PC}$.

Задача № 4. Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

Задача № 5. В треугольнике $\boldsymbol{ABC}$ точка $\boldsymbol{I}$ — центр вписанной окружности. Точки $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ — середины сторон $\boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{AC}$ соответственно. Известно, что угол $\boldsymbol{AIN}$ прямой. Докажите, что угол $\boldsymbol{BIM}$ — также прямой.

Задача № 6. В некоторых клетках квадрата $\mathbf{20 \times 20}$ стоит стрелочка в одном из четырёх направлений. На границе квадрата все стрелочки смотрят вдоль границы по часовой стрелке (см. рис.). Кроме того, стрелочки в соседних (возможно, по диагонали) клетках не смотрят в противоположных направлениях. Докажите, что найдётся клетка, в которой стрелочки нет.



Восьмая устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 11 апреля 2010 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXIII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 3 апреля 2010 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXIII Московская математическая олимпиада

9 класс 14.03.2010

Задача № 1. Съев на пустой желудок трёх поросят и семерых козлят, Серый Волк все ещё страдал от голода. Зато в другой раз он съел на пустой желудок **7** поросят и козлёнка и страдал уже от обжорства. От чего пострадает Волк, если съест на пустой желудок **11** козлят?

Задача № 2. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M. Через эту точку проведён перпендикуляр к прямой CM, который пересекает сторону AD в точке E. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CE. Найдите угол APB.

Задача № 3. У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются *товарищами*, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

Задача № 4. На окружности расставлены **2009** чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1, причём не все числа одинаковые. Рассмотрим всевозможные десятки подряд стоящих чисел. Найдем произведения чисел в каждом десятке и сложим их. Какая наибольшая сумма может получиться?

Задача № 5. Дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная из **37** звеньев. Через каждое звено провели прямую. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться?

Задача № 6. Толя хочет получить из данного натурального числа однозначное. Для этого разрешается расставить между цифрами плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа **123456789** можно получить $\mathbf{12345 + 6 + 789 = 13140}$). С полученным числом снова разрешается сделать подобную операцию, и так далее. Докажите, что за **10** операций всегда можно получить однозначное число.

LXXIII Московская математическая олимпиада

9 класс 14.03.2010

Задача № 1. Съев на пустой желудок трёх поросят и семерых козлят, Серый Волк все ещё страдал от голода. Зато в другой раз он съел на пустой желудок **7** поросят и козлёнка и страдал уже от обжорства. От чего пострадает Волк, если съест на пустой желудок **11** козлят?

Задача № 2. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M. Через эту точку проведён перпендикуляр к прямой CM, который пересекает сторону AD в точке E. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CE. Найдите угол APB.

Задача № 3. У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются *товарищами*, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

Задача № 4. На окружности расставлены **2009** чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1, причём не все числа одинаковые. Рассмотрим всевозможные десятки подряд стоящих чисел. Найдем произведения чисел в каждом десятке и сложим их. Какая наибольшая сумма может получиться?

Задача № 5. Дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная из **37** звеньев. Через каждое звено провели прямую. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться?

Задача № 6. Толя хочет получить из данного натурального числа однозначное. Для этого разрешается расставить между цифрами плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа **123456789** можно получить $\mathbf{12345 + 6 + 789 = 13140}$). С полученным числом снова разрешается сделать подобную операцию, и так далее. Докажите, что за **10** операций всегда можно получить однозначное число.

Восьмая устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 11 апреля 2010 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXIII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 3 апреля 2010 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXIII Московская математическая олимпиада

10 класс 14.03.2010

Задача № 1. Известно, что сумма любых двух из трёх квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$, $x^2 + ex + f$ не имеет корней. Может ли сумма всех этих трёхчленов иметь корни?

Задача № 2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$. Точки M и N лежат на сторонах AB и CD соответственно, причём отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Диагональ AC пересекает этот отрезок в точке O. Найдите MN, если известно, что площади треугольников AMO и CNO равны.

Задача № 3. Можно ли, применяя к числу $\mathbf{2}$ функции **sin**, **cos**, **tg**, **ctg**, **arcsin**, **arccos**, **arctg**, **arcctg** в любом количестве и в любом порядке, получить число $\mathbf{2010}$?

Задача № 4. Сумма цифр числа n равна $\mathbf{100}$. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться $\mathbf{100^3}$?

Задача № 5. В неравнобедренном треугольнике две медианы равны двум высотам. Найдите отношение третьей медианы к третьей высоте.

Задача № 6. На плоскости отметили $4n$ точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно $\mathbf{1}$ см. Оказалось, что среди любых $n + 1$ точек обязательно есть две, соединённые отрезком. Докажите, что всего проведено не менее $7n$ отрезков.

Восьмая устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 11 апреля 2010 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXIII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 3 апреля 2010 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXIII Московская математическая олимпиада

10 класс 14.03.2010

Задача № 1. Известно, что сумма любых двух из трёх квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$, $x^2 + ex + f$ не имеет корней. Может ли сумма всех этих трёхчленов иметь корни?

Задача № 2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$. Точки M и N лежат на сторонах AB и CD соответственно, причём отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Диагональ AC пересекает этот отрезок в точке O. Найдите MN, если известно, что площади треугольников AMO и CNO равны.

Задача № 3. Можно ли, применяя к числу $\mathbf{2}$ функции **sin**, **cos**, **tg**, **ctg**, **arcsin**, **arccos**, **arctg**, **arcctg** в любом количестве и в любом порядке, получить число $\mathbf{2010}$?

Задача № 4. Сумма цифр числа n равна $\mathbf{100}$. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться $\mathbf{100^3}$?

Задача № 5. В неравнобедренном треугольнике две медианы равны двум высотам. Найдите отношение третьей медианы к третьей высоте.

Задача № 6. На плоскости отметили $4n$ точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно $\mathbf{1}$ см. Оказалось, что среди любых $n + 1$ точек обязательно есть две, соединённые отрезком. Докажите, что всего проведено не менее $7n$ отрезков.

Восьмая устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 11 апреля 2010 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXIII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 3 апреля 2010 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/