LXXV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

18 марта 2012 года • 11 класс, первый день

Задача 1. Алёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5 в каком-то порядке. Восстановите стёртое число и докажите, что было написано именно оно.

Задача 2. Для заданных значений a, b, c и d оказалось, что графики функций $y = 2a + \dfrac{1}{x-b}$ и $y = 2c + \dfrac{1}{x-d}$ имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций $y = 2b + \dfrac{1}{x-a}$ и $y = 2d + \dfrac{1}{x-c}$ также имеют ровно одну общую точку.

Задача 3. В треугольнике ABC высоты или их продолжения пересекаются в точке H, а R — радиус описанной около него окружности. Докажите, что если $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$, то $AH + BH \geqslant 2R$.

Задача 4. На собрание пришло n человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

б) Покажите, что n может быть больше 4.

Задача 5. Для $n = 1, 2, 3$ будем называть числом n-го типа любое число, которое либо равно 0, либо входит в бесконечную геометрическую прогрессию 1, $(n+2)$, $(n+2)^2$, ..., либо является суммой нескольких различных её членов. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа.

Задача 6. Про бесконечный набор прямоугольников известно, что в нём для любого числа S найдутся прямоугольники суммарной площади больше S.

а) Обязательно ли этим набором можно покрыть всю плоскость, если при этом допускаются наложения?

б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что все прямоугольники в наборе являются квадратами.

Десятая устная городская олимпиада по геометрии для 8—11 классов состоится 8 апреля 2012 года.
Подробная информация на сайте `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

Закрытие LXXV Московской математической олимпиады пройдёт в воскресенье 1 апреля 2012 года в Главном здании МГУ.
Подробная информация на сайте `http://www.mccme.ru/mmo/`