7 класс

7.1. Расставьте в равенстве 2 2 2 2 = 5 5 5 5 5 знаки арифметических действий (без использования скобок) так, чтобы оно стало верным. (*Достаточно привести один способ расстановки.*)

Ответ: например, $2 \times 2 - 2 : 2 = 5 - 5 : 5 - 5 : 5$ или $22 : 22 = 55 : 5 - 5 - 5$.

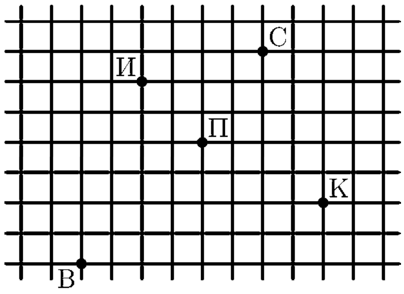
Существуют и другие способы.

$+$ *приведены только верные способы расстановки знаков (один или несколько)*

$\pm$ *вместе с верным способом расстановки указаны и неверные*

$\mp$ *в приведенном способе расстановки получено верное равенство, но при этом использованы скобки*

$-$ *задача решена неверно*



7.2. В точке **В** живет Винни-Пух, а в точках **К**, **С**, **П** и **И** — его друзья Кролик, Сова, Пятачок и ослик Иа-Иа (см. рисунок). Зимним утром Винни-Пух навестил их всех по одному разу, а потом вернулся домой. При этом он протоптал в снегу 5 прямых тропинок от домика к домику, не пересекающих друг друга. Начертите как можно больше возможных маршрутов Винни-Пуха.

Ответ: см. рис. 7.2 а–г.

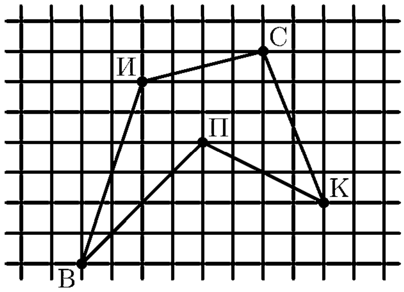


Рис. 7.2а

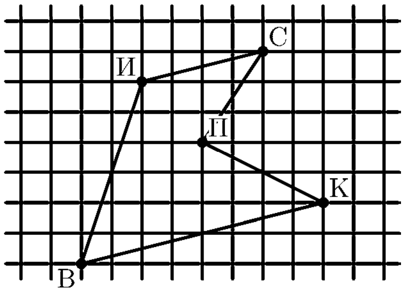


Рис. 7.2б

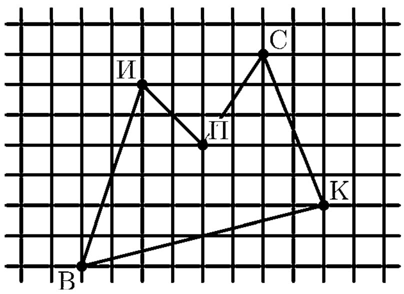


Рис. 7.2в

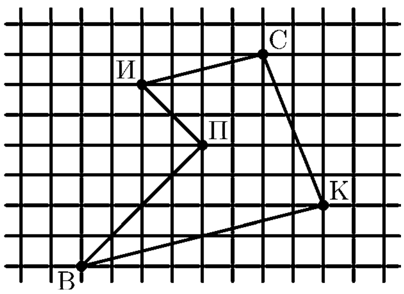


Рис. 7.2г

$+$ *верно показаны четыре возможных маршрута*

$\pm$ *верно показано не менее трех возможных маршрутов, но наряду с верными маршрутами показаны и неверные (например, с пересекающимися тропинками)*

$\mp$ *среди показанных маршрутов только один или два верные*

$-$ *верных маршрутов не приведено*

Отметим, что от школьников не требуется доказывать, что задача имеет ровно четыре решения, поэтому за любые рассуждения на эту тему оценка за задание не изменяется.

7.3. У Пети в бутылке было «Фанты» на 10% больше, чем у Васи. Петя отпил из своей бутылки 11% ее содержимого, а Вася из своей — 2% содержимого. У кого после этого осталось больше «Фанты»?

Ответ: у Васи.

Решение. Пусть у Васи в бутылке было a мл «Фанты», тогда у Пети было $1{,}1a$ мл. После того, как каждый мальчик отпил из своей бутылки, у Васи осталось $0{,}98a$ мл «Фанты», а у Пети осталось $0{,}89 \cdot 1{,}1a = 0{,}979a$ мл. Таким образом, у Васи осталось больше.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$+$ *решение аналогично приведенному, но объем Васиной бутылки принят за 1 (без указания единиц измерения) или за 100%*

$\pm$ *приведено верное рассуждение, но имена мальчиков перепутаны*

$\mp$ *задача решена на конкретном числовом примере (например, объем Васиной бутылки принят за 1 литр)*

$\mp$ *приведено верное рассуждение, но допущены вычислительные ошибки*

$-$ *приведен только ответ*

7.4. Квадрат 8×8 распилили на квадраты 2×2 и прямоугольники 1×4. При этом общая длина распилов оказалась равна 54. Сколько фигурок каждого вида получилось?

Ответ: 10 квадратов и 6 прямоугольников

Решение. В квадрате 8×8 — 64 клетки, а в каждой из полученных фигурок — по 4 клетки. Поэтому всего получилось 16 фигурок.

Найдем сумму периметров всех получившихся фигурок. Так как граница каждого распила входит в периметр двух фигурок, то прибавим к периметру квадрата удвоенную длину распилов: $32 + 2 \cdot 54 = 140$.

Периметр квадрата 2×2 равен 8, а периметр прямоугольника 1×4 равен 10, то есть на 2 больше. Если бы все 16 фигурок были квадратами, то их суммарный периметр был бы равен $16 \cdot 8 = 128$. Это на $140 - 128 = 12$ меньше, чем на самом деле. Для увеличения общего периметра на 12 требуется 6 квадратов заменить на прямоугольники. Поэтому прямоугольников было 6, а квадратов — 10.

Вторую часть этого рассуждение можно провести алгебраически, обозначив, например, через x количество получившихся квадратов. Тогда получим уравнение $8x + 10(16 - x) = 140$, из которого найдем, что $x = 10$, а $16 - x = 6$.

Возможен также и «чисто алгебраический» способ решения, приводящий к составлению системы уравнений

$$\begin{cases} 4x + 4y = 64, \\ 8x + 10y = 140 \end{cases}$$

(y — *количество получившихся прямоугольников*). *Решением этой системы является* $x = 10$, $y = 6$.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *верно проведены все рассуждения или верно составлено уравнение(система), но допущена вычислительная ошибка*

$\mp$ *приведен только верный ответ или верный ответ с проверкой*

$-$ *рассмотрен частный случай и получен неверный ответ, либо в решении не учтено удвоение длины распилов*

7.5. Из четырех цифр, отличных от нуля, составлены два четырехзначных числа: самое большое и самое маленькое из возможных. Сумма получившихся чисел оказалась равна 11990. Какие числа могли быть составлены?

Ответ: были составлены числа 1999 и 9991.

Решение. Обозначим цифры, из которых были составлены числа, в порядке возрастания: a, b, c и d (то есть $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$). Тогда самое маленькое число, составленное из этих цифр — $\overline{abcd}$, а самое большое — $\overline{dcba}$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Так как $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$, а $\overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$, то их сумма равна: $(1000a + 100b + 10c + d) + (1000d + 100c + 10b + a) = 1001(a + d) + 110(b + c)$. По условию, она равна 11990, то есть $1001(a + d) + 110(b + c) = 11990$.

Разделив это равенство на 11 и перенеся второе слагаемое в правую часть, получим: $91(a+d) = 10(109-(b+c))$ $(*)$. Левая часть этого равенства делится на 91, поэтому и правая часть должна делиться на 91. Но числа 10 и 91 — взаимно простые, поэтому на 91 должно делится число $109 - (b + c)$. Учитывая, что b и c — цифры, из полученного следует, что $109 - (b + c) = 91$, то есть $b + c = 18$. Тогда $b = c = 9$ и из равенства $(*)$ получим, что $91(a + d) = 910$, то есть $a + d = 10$. Так как $d \geqslant c = 9$, то $d = 9$, значит, $a = 1$.

Второй способ. По условию: $\overline{abcd} + \overline{dcba} = 11990$. Заметим, что как в разряде единиц, так и в разряде тысяч, складываются цифры a и d. При их сложении в разряде единиц не может получиться 0 (так как цифры a и d по условию ненулевые), значит, получается 10. В разряде тысяч при сложении этих цифр получается 11, следовательно, из разряда сотен в разряд тысяч перешла единица, значит, $b + c > 9$.

Кроме того, и в разряде десятков, и в разряде сотен, складываются цифры b и c. При их сложении не могло получиться 9 (так как $b + c > 9$), значит получается 19. Это возможно только в случае, когда $b = c = 9$, а еще одна единица переходит из предыдущего разряда. Тогда, из того, что $c \leqslant d$ следует, что $d = 9$. Так как $a + d = 10$, то $a = 1$.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *рассуждение, в целом, проведено верно и получен верный ответ, но имеются некоторые пробелы или неточности*

$\pm$ *доказано, что в разряде десятков и в разряде сотен находятся девятки, но для первой и последней цифр получено несколько ответов, среди которых есть верный*

$\mp$ *получено равенство* $(*)$, *но других продвижений нет*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$-$ *задача решена неверно*

8 класс

8.1. Вычислите:

$$\frac{(2001\cdot 2021+100)(1991\cdot 2031+400)}{2011^4}.$$

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что $2001\cdot 2021+100=(2011-10)(2011+10)+100=2011^2-10^2+100=2011^2$. Аналогично, $1991\cdot 2031=(2011-20)(2011+20)+400=2011^2-20^2+400=2011^2$. Тогда $\dfrac{2011^2\cdot 2011^2}{2011^4}=1$.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*
$\mp$ *приведен только верный ответ*
$-$ *задача решена неверно*

8.2. На столе белой стороной кверху лежали 100 карточек, у каждой из которых одна сторона белая, а другая черная. Костя перевернул 50 карточек, затем Таня перевернула 60 карточек, а после этого Оля — 70 карточек. В результате все 100 карточек оказались лежащими черной стороной вверх. Сколько карточек было перевернуто трижды?

Ответ: 40 карточек.

Решение. Так как все карточки в итоге оказались перевернуты, то каждую из них переворачивали либо 1 раз, либо 3 раза. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Всего было сделано 180 переворачиваний: 100 из них потребовалось, чтобы перевернуть каждую карточку 1 раз; остальные 80 — чтобы какие-то карточки перевернуть еще по 2 раза. Значит, по 3 раза перевернули 40 карточек.

Второй способ. Пусть x карточек было перевернуто 3 раза, значит, их переворачивал каждый. Следовательно, 1 раз были перевернуты: $(50-x)$ карточек — Костей, $(60-x)$ карточек — Таней, $(70-x)$ карточек — Олей.
Составим уравнение: $(50-x)+(60-x)+(70-x)+x=100$. Его решение: $x=40$.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*
$\pm$ *проведено верное рассуждение и верно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка*
$\mp$ *указано, что каждую карточку перевернули либо 1 раз, либо 3 раза, но других продвижений нет*
$\mp$ *приведен только верный ответ*
$-$ *задача решена неверно*

8.3. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K. Отрезок CK пересекает медиану AM треугольника в точке P. Оказалось, что $AK=AP$. Найдите отношение $BK:PM$.

Ответ: $BK:PM=2$.

Решение. *Первый способ.* Проведем через точку M прямую, параллельную CK, которая пересечет AB в точке D (см. рис. 8.3а). Тогда $BD=KD$ (по теореме Фалеса). Кроме того, $\angle MDA=\angle PKA=\angle KPA=\angle DMA$, значит, $AD=AM$. Учитывая, что $AK=AP$, получим: $PM=KD=\frac{1}{2}BK$.

Отметим, что для доказательства равенства $PM=KD$ можно было также использовать теорему о пропорциональных отрезках.

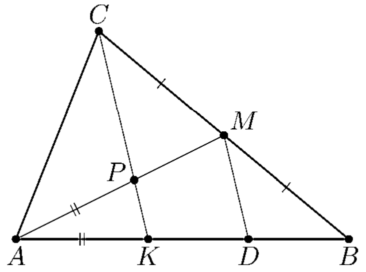


Рис. 8.3а

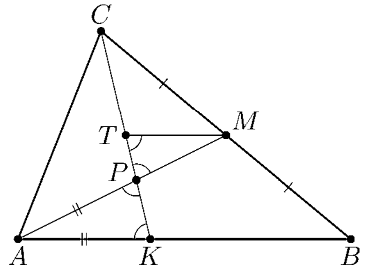


Рис. 8.3б

Второй способ. Пусть T — середина отрезка CK (см. рис. 8.3б). Тогда MT — средняя линия треугольника CBK, следовательно, $MT||BK$ и $BK=2MT$. Так как $AK=AP$ и $MT||BK$, то $\angle MTP=\angle AKP=\angle APK=$ $=\angle MPT$. Следовательно, $MT=MP$, значит, $BK=2PM$.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*
$\pm$ *проведены верные рассуждения, но решение содержит мелкие неточности или пробелы*
$-$ *приведен только ответ*

8.4. Назовем натуральное семизначное число «удачным», если оно делится на произведение всех своих цифр. Существуют ли четыре последовательных «удачных» числа?

Ответ: нет, не существуют.

Решение. Предположим, что n, $n+1$, $n+2$ и $n+3$ — «удачные» числа. В записи этих чисел не может быть цифры 0 (на 0 делить нельзя), поэтому, эти числа отличаются только последней цифрой, следовательно, одно из них оканчивается либо на 4, либо на 8. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть P — произведение первых шести цифр числа n. Так как соседние числа n и $n+1$ взаимно просты и оба делятся на P, то $P = 1$. Следовательно, каждая из первых шести цифр числа n равна 1. Но число 1111114 не делится на 4, а число 1111118 не делится на 8. Получили противоречие.

Второй способ. Среди этих четырех чисел есть нечетные. Для того, чтобы нечетное число делилось на произведение своих цифр, необходимо, чтобы все цифры числа были нечетными. Следовательно, первые шесть цифр каждого из четырех чисел — нечетные. Но числа, оканчивающееся на $\overline{a4}$ или на $\overline{a8}$, где a — нечетная цифра, не делится на 4. Получили противоречие.

Отметим, что аналогичные рассуждения показывают, что никакие четыре последовательных натуральных числа не могут оказаться «удачными» (кроме однозначных).

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *проведено, в целом, верное рассуждение, в котором есть пробелы*

$\mp$ *объяснено только, что «удачные» числа различаются лишь последней цифрой*

$-$ *приведен только верный ответ*

8.5. В какое наибольшее количество цветов можно раскрасить клетки шахматной доски 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками того же цвета?

Ответ: в 16 цветов.

Решение. Разделим доску на 16 квадратов размерами 2×2 и каждый квадрат раскрасим своим цветом. Эта раскраска в 16 цветов удовлетворяет условию задачи.

Докажем, что большее количество цветов условию задачи не удовлетворяет. Заметим, что клеток каждого цвета должно быть не менее четырех. Действительно, пусть клеток какого-то цвета не более трех, тогда только одна из них может граничить по стороне с двумя клетками своего цвета (см. рис. 8.5). Если же клеток каждого цвета не менее четырех, то различных цветов не более шестнадцати.

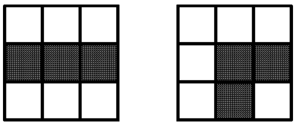


Рис. 8.5

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *приведен только верный пример*

$\mp$ *объяснено, что клеток каждого цвета должно быть не менее четырех, но пример раскраски отсутствует*

$-$ *приведен только верный ответ*

8.6. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На продолжении стороны AB за точку B отмечена такая точка M, что $MC = MD$. Докажите, что $\angle AMO = \angle MAD$.

Решение. *Первый способ.* Через точку O проведем прямую, параллельную AD (см. рис. 8.6а). Она пересечет стороны AB и CD в их серединах P и Q соответственно (по теореме Фалеса). Так как $MC = MD$, то MQ — серединный перпендикуляр к отрезку CD, значит, $MQ \perp AB$. Тогда MO — медиана прямоугольного треугольника PMQ, проведенная к гипотенузе, поэтому $MO = OP$. Следовательно, $\angle AMO = \angle MPO = \angle MAD$, что и требовалось.

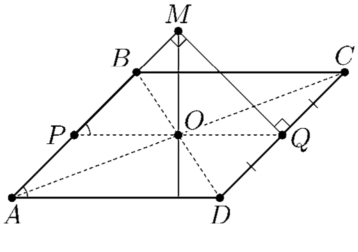


Рис. 8.6а

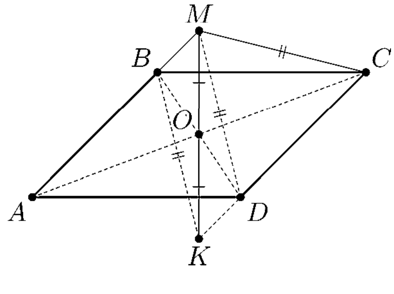


Рис. 8.6б

Второй способ. Продолжим отрезок MO за точку O на его длину и получим точку K (см. рис. 8.6б). Тогда $BMDK$ — параллелограмм (по признаку), следовательно, $DK||AB$, поэтому точка K лежит на прямой CD. По свойству параллелограмма $MD = BK$. Кроме того, $MC = MD$, значит, $BMCK$ — равнобокая трапеция. Следовательно, $\angle BMK = \angle MBC$. Тогда $\angle AMO = \angle MBC = \angle MAD$, что и требовалось.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *проведены верные рассуждения, но решение содержит мелкие неточности или пробелы*

9 класс

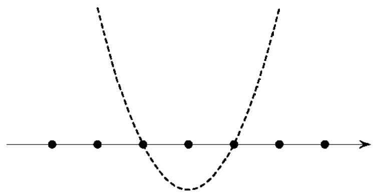
9.1. После возвращения цирка с гастролей, знакомые расспрашивали дрессировщика Казимира Алмазова о «пассажирах» его автофургона: «Тигры были?» — «Да, причем их было в семь раз больше, чем не тигров». «А обезьяны?» — «Да, их было в семь раз меньше, чем не обезьян». «А львы были?» Ответьте за Казимира Алмазова. *Ответ обоснуйте.*

Ответ: львов не было.

Решение. Поскольку тигров было в семь раз больше, чем не тигров, то количество тигров составляет $\frac{7}{8}$ от общего количества всех животных. Поскольку обезьян было в семь раз меньше, чем не обезьян, то количество обезьян составляет $\frac{1}{8}$ от общего количества всех животных. Так как $\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=1$, то животных, отличных от тигров и обезьян, в фургоне не было.

Отметим, что ответ в задаче не изменится, если в условии вместо числа 7 поставить любое другое положительное число.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*
$\mp$ *приведен только верный ответ*
$-$ *задача решена неверно*



9.2. На рисунке изображен график приведенного квадратного трехчлена (ось ординат стерлась, расстояние между соседними отмеченными точками равно 1). Чему равен дискриминант этого трехчлена? *Ответ обоснуйте.*

Ответ: 4.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного трехчлена ($x_1 < x_2$). Из условия следует, что $x_2 - x_1 = 2$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Поскольку $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2}$, $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2}$, то $x_2 - x_1 = \sqrt{D}$, откуда $D = 4$.

Второй способ. Пусть данный квадратный трехчлен имеет вид x^2+bx+c. Тогда по теореме Виета $x_1+x_2=-b$, $x_1x_2=c$. Так как $x_2-x_1=2$, то $b=-2x_1-2$, $c=x_1^2+2x_1$. Следовательно, $D=b^2-4c=(2x_1+2)^2-4(x_1^2+2x_1)=4$.

Третий способ. Заметим, что график любого приведенного квадратного трехчлена может быть получен из графика функции $y=x^2$ при помощи параллельного переноса. Так как расстояние между корнями равно 2, то ордината y_0 вершины параболы равна -1. Поскольку $y_0=-\dfrac{D}{4}$, то $D=4$.

Термин «дискриминант» (с латинского: «различитель») возник в связи с тем, что для приведенного квадратного трехчлена, имеющего корни, $D=(x_2-x_1)^2$. Поэтому допустимо использование школьниками формулы $|x_2-x_1|=\sqrt{D}$ в явном виде (без доказательства) и оценка за это не снижается.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*
$\mp$ *приведен только верный ответ*
$-$ *задача решена неверно*

9.3. В трапеции $ABCD$ основание AD в четыре раза больше, чем BC. Прямая, проходящая через середину диагонали BD и параллельная AB, пересекает отрезок CD в точке K. Найдите отношение $DK : KC$.

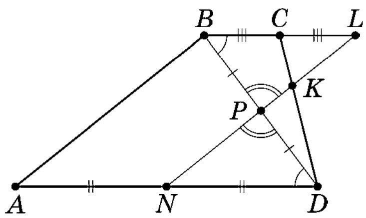


Рис. 9.3

Ответ: $DK : KC = 2 : 1$.

Решение. Пусть P — середина BD, L и N — точки пересечения прямой KP с прямыми BC и AD соответственно (см. рис. 9.3). Так как $PN || AB$ и $BP = PD$, то PN — средняя линия треугольника ABD, следовательно, $AN = ND$. Заметим, что $ABLN$ — параллелограмм (по определению), то есть, $ND = AN = BL$. Кроме того, $AD = 4BC$, значит, $BC = CL$ и $ND = 2CL$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Треугольники NKD и LKC подобны, следовательно, $DK : KC = ND : CL = 2 : 1$.

Второй способ. Заметим, что в треугольнике DBL отрезки LP и DC являются медианами, то есть каждый из них делится точкой K в отношении $2 : 1$ считая от вершины.

В завершающей стадии решения можно также воспользоваться теоремой Менелая.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*
$\mp$ *доказано только, что $BC = CL$ и дальнейшие продвижения отсутствуют*
$-$ *приведен только ответ*

9.4. Незнайка утверждает, что существует восемь таких последовательных натуральных чисел, что в разложение их на простые множители каждый сомножитель входит в нечетной степени (например, два таких последовательных числа: $23 = 23^1$ и $24 = 2^3{\cdot}3^1$). Прав ли он?

Ответ: Незнайка не прав.

Решение. Заметим, что восемь последовательных натуральных чисел дают различные остатки при делении на 8. Следовательно, среди любых восьми последовательных натуральных чисел найдется число, которое дает при делении на 8 остаток 4. Это число делится на 4, но не делится на 8, поэтому в разложение этого числа на простые сомножители двойка входит в четной степени. Следовательно, Незнайка ошибся.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *в решении присутствует идея рассмотрения остатков, которая до конца не доведена*

$-$ *приведен только ответ*

9.5. AL — биссектриса треугольника ABC, K — такая точка на стороне AC, что $CK = CL$. Прямая KL и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Докажите, что $AP = PL$.

Решение. Докажем, что $\angle ALP = \angle LAP$, из чего и будет следовать утверждение задачи (см. рис. 9.5). Обозначим: $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, тогда $\angle C = 180^\circ - (2\alpha + 2\beta)$. Так как треугольник KCL — равнобедренный, то $\angle KLC = \angle LKC = \alpha + \beta$. Для треугольника ALK угол LKC — внешний, поэтому $\angle LKC = \angle LAK + \angle ALK$, откуда $\angle ALK = \beta$. Таким образом, $\angle ALP = \angle ABP$, значит, четырехугольник $ABLP$ — вписанный. Тогда из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, получим, что $\angle LAP = \angle LBP = \beta = \angle ALP$.

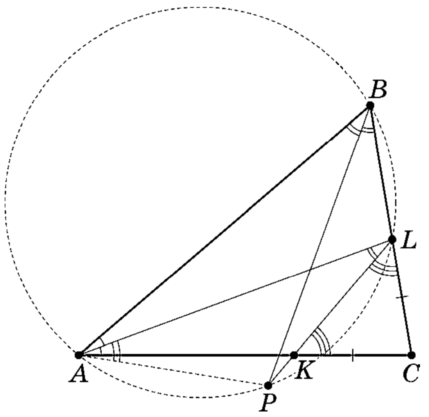


Рис. 9.5

Отметим, что конфигурация, описанная в условии задачи — «жесткая», поэтому задачу можно решать и методом «обратного хода»: рассмотреть точку P_1 пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AL и биссектрисы угла B, а затем доказать, что отрезок P_1L отсекает от треугольника ABC равнобедренный треугольник (то есть, доказать, что точки P и P_1 совпадают).

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *в решении присутствует идея счета углов, которая до конца не доведена*

$-$ *задача решена неверно*

9.6. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на шахматной доске так, чтобы с любой из них на любую другую отмеченную клетку можно было пройти ровно двумя ходами шахматного коня? (*Конь ходит буквой «Г»: две клетки по вертикали и одна по горизонтали либо, наоборот, две клетки по горизонтали и одна по вертикали.*)

Ответ: 8.

Решение. Заметим, что одним ходом конь может перепрыгнуть не более, чем через одну горизонталь или через одну вертикаль. Следовательно, все отмеченные клетки должны находиться в квадрате 5×5.

Пусть конь находится на клетке какого-то цвета (белой или черной), тогда, сделав один ход, он окажется на клетке противоположного цвета. Таким образом, за два хода он окажется на клетке того же цвета, то есть отмеченными должны быть клетки одного цвета. При этом, клетки, расположенные на одной диагонали через клетку, не могут быть отмечены (за два хода из одной из них в другую конь не попадет).

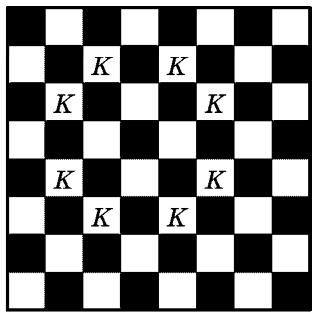


Рис. 9.6

Рассмотрим теперь квадрат 5×5. Без ограничения общности можно считать, что в нем 13 черных клеток и 12 белых. Предположим, что в нем отмечены белые клетки. Заметим, что в таком квадрате четыре белые диагонали. На каждой из них может быть отмечено не более двух клеток, иначе на диагонали найдутся две клетки, расположенные через одну. Значит, может быть отмечено не более восьми клеток.

Допустим, что отмеченные клетки — черные. Первым ходом с отмеченной черной клетки мы попадаем на белую, а из любой белой клетки внутри нашего квадрата за один ход можно попасть не более, чем на 6 черных клеток. Следовательно, в этом случае отмеченных клеток не более семи.

Таким образом, больше восьми клеток отмечено быть не может.

Пример для восьми отмеченных клеток — см. рис. 9.6. Нетрудно убедиться, что он удовлетворяет условию задачи.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный пример и при этом доказано, что кони должны находиться в квадрате* 5×5

$\mp$ *приведены только верный ответ и пример*

$-$ *приведен только верный ответ*

10 класс

10.1. Для игры в «Морской бой» на поле 8×8 клеток расставили 12 «двухпалубных кораблей». Обязательно ли останется место для «трёхпалубного корабля»? («Двухпалубный корабль» — прямоугольник размером 1×2 клетки, а «трёхпалубный» — размером 1×3 клетки. Корабли могут соприкасаться, но накладываться друг на друга не должны.)

Ответ: нет, не обязательно.

Решение. Пример расстановки «двухпалубных кораблей», при которой не остается места для «трехпалубного корабля», — см. рис. 10.1.

От школьников не требуется обосновывать, что приведенный пример удовлетворяет условию задачи.

$+$ *приведены верный ответ и верный пример*

$\pm$ *приведен только верный пример*

$-$ *приведен только ответ*

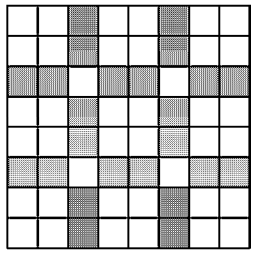


Рис. 10.1

10.2. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{x_3}$.

Решение. Можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть данная прямая задана уравнением $y = kx + b$. Так как точка $A(x_3; 0)$ принадлежит этой прямой, то $0 = kx_3 + b \Leftrightarrow b = -kx_3$. Таким образом, уравнение данной прямой примет вид $y = k(x - x_3)$. Из условия задачи также следует, что числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 = k(x - x_3) \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 - kx + kx_3 = 0$. Тогда, используя терему Виета, получим: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{k}{kx_3} = \dfrac{1}{x_3}$, что и требовалось.

Второй способ. Пусть $A(x_3; 0)$, $B_1(x_1; 0)$, $B_2(x_2; 0)$, $C_1(x_1; x_1^2)$, $C_2(x_2; x_2^2)$ (см. рис. 10.2). Из подобия треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2 получим: $\dfrac{B_1C_1}{AB_1} = \dfrac{B_2C_2}{AB_2}$.

Это означает, что $\dfrac{x_1^2}{x_1 - x_3} = \dfrac{x_2^2}{x_2 - x_3}$.

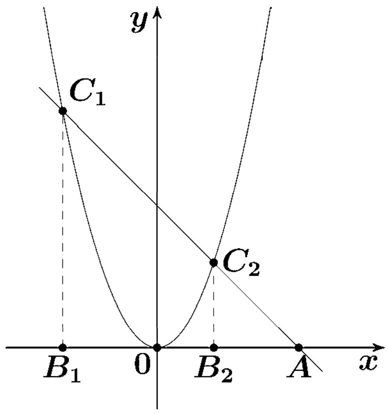


Рис. 10.2

Преобразуем последнее равенство: $x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 = x_2^2 x_1 - x_2^2 x_3 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 - x_2) = x_3 (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$. Так как $x_1 \neq x_2$,то $x_1 x_2 = x_3 (x_1 + x_2)$, что равносильно доказываемому равенству.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$-$ *рассмотрены только какие-либо частные случаи*

10.3. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $MN || AB$. На стороне AC отмечена точка K так, что $CK = AM$. Отрезки AN и BK пересекаются в точке F. Докажите, что площади треугольника ABF и четырёхугольника $KFNC$ равны.

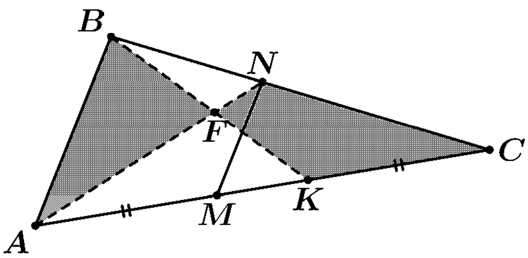


Рис. 10.3

Решение. Пусть $S_{ABC} = S$. Тогда $\dfrac{S_{ABN}}{S} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{CK}{AC} = = \dfrac{S_{BKC}}{S}$ (см. рис. 10.3). Следовательно, $S_{ABN} = S_{BKC}$. Вычтем из обеих частей этого равенства площадь их общей части — треугольника BFN, тогда $S_{ABN} - S_{BFN} = S_{BKC} - S_{BFN}$, то есть $S_{ABF} = S_{KFNC}$, что и требовалось.

Отметим, что в приведенном решении никак не использовался порядок расположения точек M и K на отрезке AC, поэтому не требуется отдельно рассматривать случай, когда точка K лежит между точками A и M.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *равенство площадей доказано для какого-либо нетривиального частного случая*

$-$ *задача не решена*

10.4. Есть 100 коробок, пронумерованных числами от 1 до 100. В одной коробке лежит приз и ведущий знает, где он находится. Зритель может послать ведущему пачку записок с вопросами, требующими ответа «да» или «нет». Ведущий перемешивает записки в пачке и, не оглашая вслух вопросов, честно отвечает на все. Какое наименьшее количество записок нужно послать, чтобы наверняка узнать, где находится приз?

Ответ: 99.

Решение. Так как порядок зачтения ответов на свои вопросы зрителю неизвестен, то он должен сделать безошибочный выбор, зная только количество ответов «нет» (количество ответов «да» однозначно определяется по количеству ответов «нет», поэтому роли не играет). Если послано N записок, то количество услышанных ответов «нет» может принимать любые целые значения от 0 до N, то есть возможен $N + 1$ вариант. Так как это количество должно определять номер призовой коробки, то его значение должно быть не меньше, чем количество коробок, то есть $N + 1 \geqslant 100 \Leftrightarrow N \geqslant 99$.

Теперь приведём пример набора из 99 записок, удовлетворяющий условию. Пусть зритель подаёт ведущему записки с однотипной фразой: «Верно ли, что номер коробки с призом не превышает числа k?» для всех k от 1 до 99. Предположим, что приз лежит в коробке с номером m. Тогда на записки, в которых упоминаются числа от 1 до $m-1$, ведущий ответит «нет», а на остальные вопросы ответит «да». В результате зритель услышит $m-1$ ответов «нет». Прибавив 1 к количеству услышанных ответов «нет», он однозначно определит номер призовой коробки.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верная оценка и верный пример набора записок, но не указано, как должен действовать зритель, прослушав ответы на свои вопросы*

$\mp$ *приведены либо только верная оценка, либо только верный пример набора записок*

$-$ *приведен только ответ*

10.5. В окружности с центром O проведена хорда AB и радиус OK, пересекающий её под прямым углом в точке M. На большей дуге AB окружности выбрана произвольная точка P, отличная от середины этой дуги. Прямая PM вторично пересекает окружность в точке Q, а прямая PK пересекает AB в точке R. Докажите, что $KR > MQ$.

Решение. Приведем два из возможных способов решения.

Первый способ. Построим параллелограмм $KRMN$ (см. рис. 10.5а). Тогда $\angle NMQ = \angle KPQ = \angle NKQ$ (первое равенство — равенство соответственных углов при $PK||NM$ и секущей PM, второе равенство — теорема об угле между касательной и хордой). Из доказанного следует, что около четырехугольника $KNQM$ можно описать окружность. Так как $\angle NKM = 90°$, то MN — диаметр этой окружности, а MQ — хорда, отличная от диаметра. Поэтому $MN > MQ$. Осталось только учесть, что $MN = KR$.

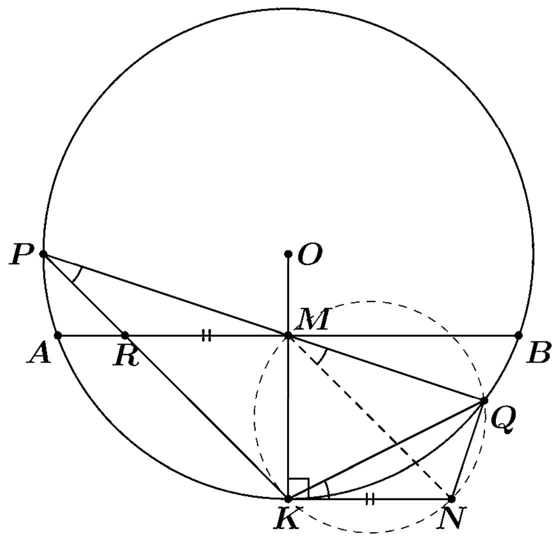


Рис. 10.5а

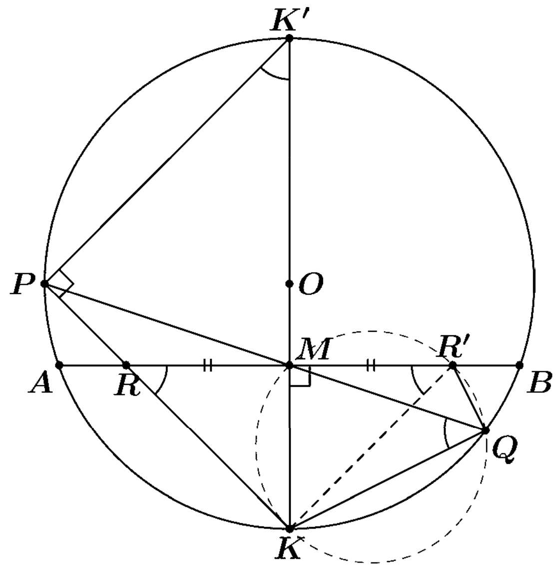


Рис. 10.5б

Второй способ. Пусть точка K' диаметрально противоположна точке K (см. рис. 10.5б). Тогда $\angle K'PK = 90°$, значит, четырехугольник $K'PRM$ — вписанный. Следовательно, $\angle KRM = \angle PK'K$ (*это равенство можно получить также из свойства углов с соответственно перпендикулярными сторонами*). Кроме того, $\angle PK'K = \angle PQK$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Рассмотрим точку R', симметричную точке R относительно KK', тогда $\angle KRM = \angle KR'M$. Из указанных равенств углов следует, что $\angle KR'M = \angle KQM$, значит, четырехугольник $KQR'M$ — вписанный.

Дальнейшее аналогично описанному выше: KR' — диаметр окружности, описанной около четырехугольника $KQR'M$, а MQ — хорда, отличная от диаметра. Поэтому $KR' > MQ$. Осталось только учесть, что $KR' = KR$.

Отметим, что это решение можно завершить и по-другому. Пусть $\angle KRM = \angle KQM = \alpha$. *Тогда* $KR = \dfrac{MK}{\sin\alpha}$. *Из треугольника* MKQ *по теореме синусов:* $\dfrac{MQ}{\sin\angle MKQ} = \dfrac{MK}{\sin\alpha} = KR$. *Так как угол* MKQ *отличен от прямого, то* $KR > MQ$.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное, в целом, доказательство, в котором есть незначительные пробелы*

$-$ *рассмотрены только какие-либо частные случаи или задача не решена*

10.6. Докажите, что уравнение $l^2 + m^2 = n^2 + 3$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

Решение. Перепишем уравнение в виде $l^2 - 3 = n^2 - m^2$ и разложим на множители его правую часть: $l^2 - 3 = (n-m)(n+m)$. Полученное равенство, в частности, выполняется, если

$$\begin{cases} n + m = l^2 - 3, \\ n - m = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $n = \dfrac{l^2-2}{2}$ и $m = \dfrac{l^2-4}{2}$. При любом чётном натуральном значении $l > 2$ указанные n и m принимают натуральные значения, а тройка $(l; n; m)$ является решением уравнения.

Выпишем найденные решения в явном виде: $l = 2t$, $m = 2(t^2-1)$, $n = 2t^2-1$, где t — любое натуральное число, большее единицы. Понятно, что таких троек чисел бесконечно много. Так как исходное уравнение является следствием записанной системы уравнений, то множество решений уравнения включает в себя все найденные решения.

Отметим, что школьники могут сразу предъявить любую тройку решений уравнения, порождающую бесконечную серию решений, и не обязаны объяснять, каким образом она получена.

+ *приведено полное обоснованное решение*

+ *предъявлена верная тройка решений, порождающая бесконечную серию, и доказано, что она действительно является решением данного уравнения*

± *предъявлена верная тройка решений, порождающая бесконечную серию, но отсутствует обоснование того, что эта тройка действительно является решением*

− *задача не решена*

11 класс

11.1. Про углы треугольника ABC известно, что $\sin A + \cos B = \sqrt{2}$ и $\cos A + \sin B = \sqrt{2}$. Найдите величину угла C.

Ответ: 90°.

Решение. Возможны различные способы решения, основанные на получении различных следствий из данных равенств.

Первый способ. Возведем каждое из данных равенств в квадрат, тогда $\sin^2 A + \cos^2 B + 2\sin A\cos B = 2$ и $\cos^2 A + \sin^2 B + 2\cos A\sin B = 2$. Сложим полученные равенства и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и формулой синуса суммы: $2 + 2\sin A\cos B + 2\cos A\sin B = 4 \Leftrightarrow \sin(A+B) = 1$. Следовательно, $A+B = 90^\circ$, тогда $C = 180^\circ - (A+B) = 90^\circ$.

Второй способ. Почленно сложим исходные равенства: $\sin A + \cos A + \sin B + \cos B = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos A\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin B + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos B\right) = 2 \Leftrightarrow \sin(A + 45^\circ) + \sin(B + 45^\circ) = 2$. Так как $|\sin x| \leqslant 1$, то последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\sin(A + 45^\circ) = 1$ и $\sin(B + 45^\circ) = 1$. Следовательно, $A + 45^\circ = 90^\circ$ и $B + 45^\circ = 90^\circ$, то есть $A = B = 45^\circ$. Значит, $C = 90^\circ$.

Третий способ. Почленно перемножим исходные равенства и используем формулы двойного аргумента и косинуса разности: $\sin A\cos A + \sin A\sin B + \cos A\cos B + \cos B\sin B = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2A + \frac{1}{2}\sin 2B + \cos(A - B) = 2$. Так как $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$, то последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\begin{cases} \sin 2A = 1, \\ \sin 2B = 1, \\ \cos(A - B) = 1. \end{cases}$ Следовательно, $A = B = 45^\circ$, то есть $C = 90^\circ$.

В каждом из приведенных способов решения на заключительном этапе необходимо убедиться, что полученные значения A, B и C удовлетворяют каждому из данных равенств, что соответствует действительности.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верные рассуждения и получен верный ответ, но использованы следствия из данных равенств и при этом не сделана проверка*

$\mp$ *приведен только верный ответ или верный ответ, полученный рассмотрением частных случаев*

$-$ *задача решена неверно*

11.2. На доске записали 20 первых чисел натурального ряда. Когда одно из чисел стерли, то оказалось, что среди оставшихся чисел одно является средним арифметическим всех остальных. Найдите все числа, которые могли быть стерты.

Ответ: 20 или 1.

Решение. Можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Сумма первых двадцати чисел натурального ряда равна $(1 + 20) \cdot 10 = 210$. Следовательно, если одно из них стерто, то сумма S оставшихся чисел удовлетворяет неравенству $190 \leqslant S \leqslant 209$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{S}{19}$. Так как оно равно одному из чисел натурального ряда, то число S делится на 19. На отрезке $[190; 209]$ есть ровно два числа, кратных 19: 190 и 209. Если $S = 190$, то стерли число 20, а если $S = 209$, то стерли число 1.

Второй способ. Заметим, что могли стереть как наименьшее из записанных чисел, так и наибольшее. Действительно, в первом случае среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{2 + 20}{2} \cdot 19 : 19 = 11$, а во втором случае оно равно $\frac{1 + 19}{2} \cdot 19 : 19 = 10$. При стирании любого другого числа среднее арифметическое оставшихся чисел будет больше 10, но меньше 11, то есть — не целым. Таким образом, никакое другое число не могло оказаться стертым.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ответ получен и проверен, но не обосновано, что другие числа не могли быть стерты*

$-$ *приведен только ответ или задача решена неверно*

11.3. Длина ребра правильного тетраэдра равна a. Через одну из вершин тетраэдра проведено треугольное сечение. Докажите, что периметр P этого треугольника удовлетворяет неравенству $P > 2a$.

Решение. Рассмотрим правильный тетраэдр $ABCD$. Пусть сечение, описанное в условии, проходит через вершину D и пересекает ребра AB и BC в точках M и N соответственно (см. рис. 11.3а).

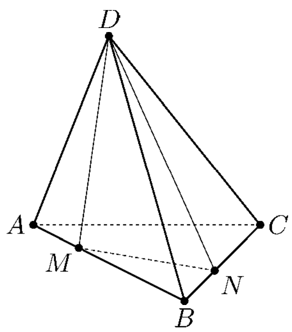


Рис. 11.3а

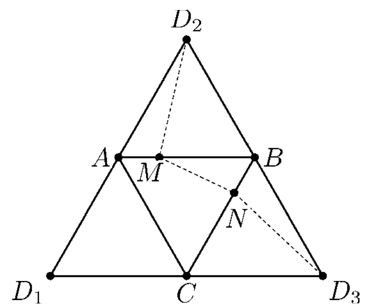


Рис. 11.3б

Первый способ. Рассмотрим развертку $D_2AD_1CD_3B$ тетраэдра $ABCD$ на плоскость треугольника ABC (см. рис. 11.3б). Так как в правильном тетраэдре все плоские углы при вершинах A, B и C равны по 60°, то точки A, B и C лежат на отрезках D_1D_2, D_2D_3 и D_1D_3 соответственно и являются их серединами. Тогда $P = DM + MN + DN = D_2M + MN + ND_3 > D_2D_3 = 2a$, что и требовалось.

Отметим, что указанным свойством обладает не только развертка правильного тетраэдра, но и развертка любого равногранного тетраэдра (то есть тетраэдра, у которого все грани — равные между собой треугольники).

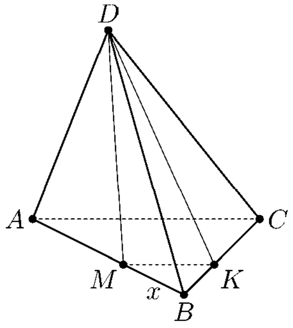


Рис. 11.3в

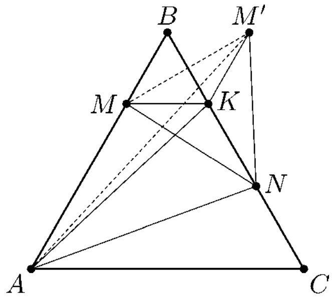


Рис. 11.3г

Второй способ. Докажем сначала, что периметры треугольных сечений тетраэдра, проходящих через его вершину и параллельных ребру основания, удовлетворяют указанному неравенству. Действительно, пусть треугольник DMK является таким сечением ($DMK||AC$, см. рис. 11.3в). Обозначим: $BM = MK = BK = x$, тогда, по теореме косинусов, $DM = DK = \sqrt{a^2 + x^2 - ax}$. Рассмотрим периметр треугольника DMK как функцию от x: $P(x) = x + 2\sqrt{x^2 - ax + a^2}$, $x \in [0; a]$. Эта функция непрерывна и дифференцируема на рассматриваемом промежутке; $P'(x) = 1 + \dfrac{2x - a}{\sqrt{x^2 - ax + a^2}}$. Решая уравнение $P'(x) = 0$ получим, что $x = 0$ или $x = a$. Для всех $x \in (0; a)$ $P'(x) > 0$, следовательно $P(x)$ возрастает на $[0; a]$. Таким образом, $P(x) > P(0) = 2a$.

Рассмотрим теперь произвольное треугольное сечение DMN, где M и N лежат на ребрах AB и BC соответственно (см. рис. 11.3а), и докажем, что его периметр больше, чем периметр сечения DMK, где $DMK||AC$. Для этого достаточно доказать, что $MN + DN > MK + DK$. Так как AN и DN — соответствующие отрезки в равных треугольниках ABC и DBC, то $AN = DN$. Аналогично, $AK = DK$. Таким образом, достаточно доказать неравенство $MN + AN > MK + AK$, где все отрезки лежат в плоскости треугольника ABC.

Для доказательства этого неравенства рассмотрим точку M', симметричную точке M относительно прямой BC, тогда $KM' = KM$ и $NM' = NM$ (см. рис. 11.3г). Используя известный факт (∗), что длина ломаной ANM' больше длины ломаной AKM', лежащей внутри треугольника ANM', получим, что требуемое неравенство выполняется.

Таким образом, периметр произвольного треугольного сечения больше, чем $2a$.

∗ *Этот факт можно доказать различными способами, например, используя, что в треугольниках MKN и $M'KN$ против большего угла лежит большая сторона, или, используя свойство эллипса, у которого AM' — больший диаметр, а точка N лежит на эллипсе. Если школьник четко сформулировал указанный факт, то он может его не доказывать, то есть в этом случае снижать оценку за отсутствие доказательства не следует.*

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *при доказательстве первым способом присутствует идея развертки, но не доказано, что точки A, B и C лежат на отрезках D_1D_2, D_2D_3 и D_1D_3*

$\mp$ *при доказательстве вторым способом утверждение доказано только для сечений, параллельных ребру (либо для другого частного случая той же степени трудности)*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.4. Две окружности касаются внешним образом. A — точка касания их общей внешней касательной с одной из окружностей, B — точка той же окружности, диаметрально противоположная точке A. Докажите, что длина касательной, проведенной из точки B ко второй окружности, равна диаметру первой окружности.

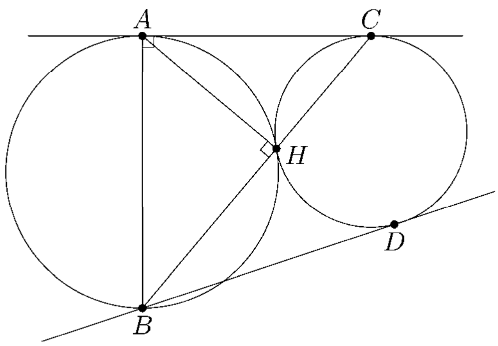


Рис. 11.4а

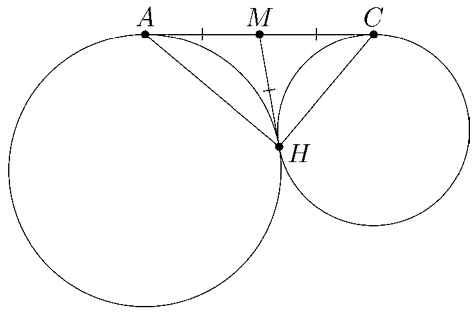


Рис. 11.4б

Решение. Пусть C — точка касания данной общей касательной и второй окружности, BD — касательная ко второй окружности, проведенная из точки B (см. рис. 11.4 а, в). Докажем, что $BD = AB$. Далее приведем два способа возможных рассуждений.

Первый способ. Пусть H — точка касания окружностей. Так как AB — диаметр окружности, то вписанный угол AHB — прямой (см. рис. 11.4а).

Докажем, что угол AHC — также прямой. Действительно, проведем к данным окружностям через точку Hобщую внутреннюю касательную, которая пересечет прямую AC в точке M (см. рис. 11.4б). Отрезки MA, MH и MC касательных, проведенных из точки M к окружностям,равны. Следовательно, треугольник AHC — прямоугольный, значит, точки B, H и C лежат на одной прямой.

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник ABC ($\angle BAC = 90^\circ$, см. рис. 11.4а). Так как AH — высота этого треугольника, проведенная к гипотенузе, то $AB^2 = BH \cdot BC$. С другой стороны, по теореме о касательной и секущей: $BD^2 = BH \cdot BC$. Следовательно, $BD = AB$, что и требовалось.

Второй способ. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, R_1 и R_2 — их радиусы, тогда $O_1O_2 = R_1 + R_2$ (см. рис. 11.4в).

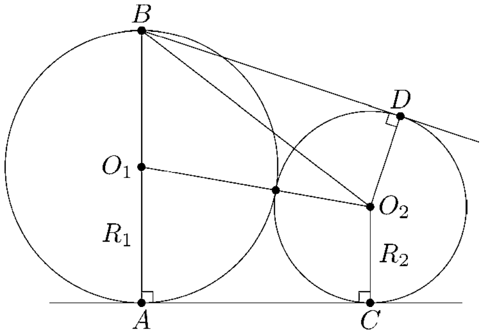


Рис. 11.4в

Из прямоугольной трапеции AO_1O_2C находим, что $AC^2 = O_1O_2^2 - (O_1A - O_2C)^2 = (R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2$.

Тогда, из прямоугольной трапеции ABO_2C: $BO_2^2 = AC^2 + (AB - O_2C)^2 = 4R_1R_2 + (2R_1 - R_2)^2 = 4R_1^2 + R_2^2$.

Теперь, из прямоугольного треугольника BO_2D, получим: $BD^2 = BO_2^2 - O_2D^2 = 4R_1^2 = AB^2$, то есть $BD = AB$, что и требовалось.

Отметим, что в приведенных решениях никак не использовалось, что AB — диаметр именно большей окружности, поэтому рассматривать два случая не требуется.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено полное обоснованное решение, в котором явно используется, что AB — диаметр большей (меньшей) окружности и второй случай не разобран*

$\mp$ *ход рассуждений соответствует первому способу и решение доведено до конца, но при этом не доказано, что точки B, H и C лежат на одной прямой*

$-$ *задача решена неверно*

11.5. Известно, что A — наибольшее из чисел, являющихся произведением нескольких натуральных чисел, сумма которых равна 2011. На какую наибольшую степень тройки делится число A?

Ответ: на 3^{669}.

Решение. 1) Докажем, что среди множителей, входящих в A, нет единиц. Пусть это не так, тогда в представлении числа 2011 в виде суммы можно два слагаемых 1 и a заменить на одно слагаемое $(1+a)$ и произведение при этом увеличится, так как $1 + a > 1 \cdot a$.

2) Докажем, что среди множителей, входящих в A, нет натуральных чисел, больших четырех. Действительно, если $a \geqslant 5$, то $2a - 9 > 0 \Leftrightarrow a < 3(a - 3)$. То есть, заменив слагаемое a на два слагаемых $(a - 3)$ и 3, можно сохранить сумму и при этом увеличить произведение.

3) Если заменить число 4 на две двойки, то ни сумма, ни произведение не изменятся. Следовательно, можно считать, что среди множителей, входящих в A, четверок также нет. Таким образом, в произведении A встречаются только множители 2 и 3 (с какими-то показателями степеней).

4) Двоек может быть не более двух, так как $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, но $2^3 < 3^2$. Значит, при замене трех двоек на две тройки сумма не изменится, а произведение увеличится.

5) Числа 2011 и $2009 = 2011 - 2$ не кратны трем, а число $2007 = 2011 - 2 - 2$ кратно трем. Следовательно, число A содержит ровно две двойки. Таким образом, $A = 2^2 \cdot 3^{669}$.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено, в целом, обоснованное решение и получен верный ответ, но не проведены в явном виде рассуждение из пункта 1), либо из пункта 3)*

$\mp$ *получен верный ответ, но рассуждение содержит существенные пробелы (например, не обоснованы утверждения пункта 2) или пункта 4))*

$-$ *приведен только ответ или задача решена неверно*

11.6. Какое наименьшее количество клеток требуется отметить на шахматной доске, чтобы каждая клетка доски (отмеченная или неотмеченная) граничила по стороне хотя бы с одной отмеченной клеткой?

Ответ: 20.

Докажем сначала, что необходимо отметить не менее двадцати клеток. Для этого покажем, что с черными клетками должно соседствовать не менее десяти «отмеченных» белых клеток. Действительно, выберем 20 черных клеток и выделим их знаком «×» (см. рис. 11.6а). Любая белая клетка соседствует не более чем двумя выделенными черными. Поэтому, чтобы обеспечить хотя бы эти черные клетки «отмеченными» соседями, потребуется отметить не менее десяти белых клеток. Выбрав аналогичным образом 20 белых клеток, получим, что для того, чтобы обеспечить «отмеченными» соседями белые клетки, потребуется не менее десяти черных клеток.

Таким образом, на доске необходимо отметить не менее двадцати клеток.

Приведем пример двадцати «отмеченных» клеток, удовлетворяющих условию задачи (см. рис. 11.6б).

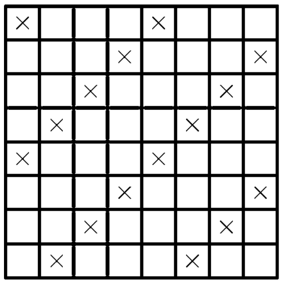


Рис. 11.6а

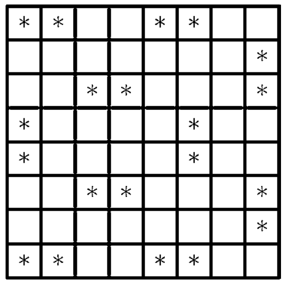


Рис. 11.6б

Существуют и другие примеры.

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный ответ и доказано, что должно быть отмечено не менее двадцати клеток, но пример не приведен*

$\mp$ *приведены только верный ответ и пример*

$-$ *приведен только ответ или задача решена неверно*