7 класс

7.1. В записи $\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}$ расставьте знаки действий и, если нужно, скобки так, чтобы значение получившегося выражения равнялось 2.

Ответ: например, $\frac{1}{4}:\frac{1}{4}+\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=2$ или $\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right):\frac{1}{4}=2$.

Существуют и другие решения.

+ *приведен верный ответ (или более одного верного ответа)*

± *вместе с верным вариантом указан и неверный*

– *приведен неверный ответ или ответ отсутствует*

Наличие лишних скобок, не влияющих на порядок действий, не меняет критериев оценки решения.

7.2. Собираясь в школу, Миша нашел под подушкой, под диваном, на столе и под столом все необходимое: тетрадь, шпаргалку, плеер и кроссовки. Под столом он нашел не тетрадь и не плеер. Мишины шпаргалки никогда не валяются на полу. Плеера не оказалось ни на столе, ни под диваном. Что где лежало, если в каждом из мест находился только один предмет? Ответ объясните.

Ответ: тетрадь была под диваном, шпаргалка — на столе, плеер — под подушкой, кроссовки — под столом.

Решение задачи может быть оформлено различными способами.

Первый способ. По условию, плеер нашелся не под столом, не на столе и не под диваном. Значит, плеер мог быть только под подушкой. Поэтому шпаргалка под подушкой лежать не могла. Но она не валялась и на полу (то есть, ее не было ни под столом, ни под диваном). Следовательно, шпаргалка лежала на столе. Тетрадь не лежала под столом, значит, ей осталось только место под диваном. Тогда под столом могли быть только кроссовки.

Возможен и другой порядок рассуждений, при котором сначала определяется местонахождение кроссовок, а затем — плеера.

Второй способ. Составим логическую таблицу: каждому столбцу соответствует предмет, каждой строке — местонахождение. Если из условия следует, что предмет не может находиться в определенном месте, то на пересечении соответствующих строки и столбца ставим минус. Если предмет именно в этом месте и находится, то ставим плюс. В каждом столбце и в каждой строке должен быть ровно один плюс.

Сначала, в соответствии с условием, расставим минусы:

	Тетрадь	Шпаргалка	Плеер	Кроссовки
Под подушкой				
Под диваном		–	–	
На столе			–	
Под столом	–	–	–	

Поставим теперь два плюса в единственно возможных местах: в третьем столбце и в четвертой строке. Это означает, что плеер находится под подушкой, а под столом могут быть только кроссовки. Заполнив минусами оставшиеся клетки в столбце кроссовок и в строке «Под подушкой», видим, что под диваном может быть только тетрадь, а шпаргалка может лежать только на столе:

	Тетрадь	Шпаргалка	Плеер	Кроссовки
Под подушкой	–	–	+	–
Под диваном		–	–	–
На столе			–	–
Под столом	–	–	–	+

Третий способ. Решение может быть оформлено в виде графа. Роль минусов играют штриховые линии, а плюсов — сплошные. После проведения всех штриховых линий в соответствии с условием получим рис. 7.2а.

Из него видно, что плеера нет ни на столе, ни под столом, ни под диваном; он может лежать только под подушкой. А под столом не может быть ничего, кроме кроссовок.

Проводим сплошные линии от плеера «под подушку», а от кроссовок — «под стол» (см. рис. 7.2б). Из получившегося рисунка ясно, что под диваном может найтись только тетрадь, а на столе лежит шпаргалка.

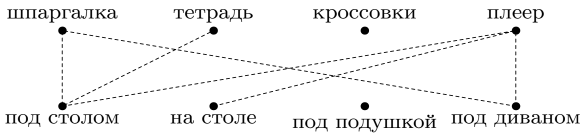


Рис. 7.2а

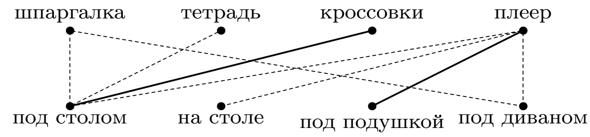


Рис. 7.2б

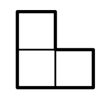
$+$ *получен верный ответ, который обоснован любым из способов: словесными рассуждениями, графической схемой, логической таблицей и пр. (при наличии таблицы или графа словесные пояснения необязательны)*

$\mp$ *верно определено и обосновано местонахождение одного или двух предметов, а места остальных перепутаны или вовсе не установлены*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$-$ *в ответе содержится хотя бы одна ошибка, а обоснования отсутствуют*

7.3. Можно ли сложить какой-нибудь квадрат из трехклеточных уголков (см. рис.)?



Ответ: да, можно. Например, см. рис. 7.3а.

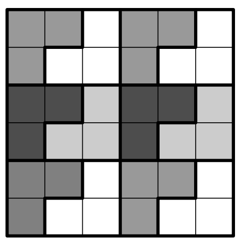


Рис. 7.3а

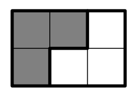


Рис. 7.3б

Комментарий. Из двух уголков можно сложить прямоугольник 2×3 (см. рис. 7.3б), а из таких прямоугольников уже легко сложить квадраты со стороной, кратной шести.

$+$ *приведен верный пример квадрата с разбиением его на заданные уголки (или более одного верного примера)*

$+$ *объяснено, как из данных уголков можно сложить прямоугольник 2×3, а затем из этих прямоугольников получить квадрат (независимо от наличия поясняющего чертежа)*

$\pm$ *вместе с верным примером приведен и неверный*

$-$ *нет ни верного примера, ни пояснения, как его построить*

7.4. Малыш подарил Карлсону 111 конфет. Сколько-то из них они тут же съели вместе, 45% оставшихся конфет пошли Карлсону на обед, а треть конфет, оставшихся после обеда, нашла во время уборки фрекен Бок. Сколько конфет она нашла?

Ответ: 11.

Первый способ. Пусть у Карлсона перед обедом было n конфет. Тогда, после обеда их осталось $\frac{55}{100}n$, а фрекен Бок нашла $\frac{1}{3} \cdot \frac{55}{100}n = \frac{11n}{60}$ конфет. Так как количество конфет должно быть целым числом, то $11n$ делится на 60. Поскольку числа 11 и 60 — взаимно простые, то n будет кратно 60. Существует единственное число, делящееся на 60 и меньшее 111, — это число 60. Таким образом, $n = 60$, значит, фрекен Бок нашла 11 конфет.

Похожее рассуждение: если у Карлсона перед обедом было n конфет, то он съел $0{,}45n = \frac{9n}{20}$ конфет, а так как числа 9 и 20 — взаимно простые, то n делится на 20. После обеда осталось $0{,}55n = \frac{11n}{20}$ конфет, и это число должно делиться на 3. Но 11 не делится на 3, поэтому на 3 делится число n. Таким образом, n делится на 3 и на

20. *Поскольку числа* 3 *и* 20 — *взаимно простые, то* n *делится на их произведение, то есть на* 60. *Далее – см. выше.*

Второй способ. Пусть фрекен Бок нашла x конфет. Значит, после обеда оставалось $3x$ конфет, что составляет 55% конфет, имевшихся у Карлсона перед обедом. То есть, перед обедом у него было $\frac{3x \cdot 100}{55} = \frac{60x}{11}$ конфет. Поскольку количество конфет должно быть целым числом, то $60x$ делится на 11. Так как числа 11 и 60 — взаимно простые, то x будет делиться на 11, то есть $x = 11n$, где n — целое число. Из условия задачи следует, что $\frac{60x}{11} < 111$, то есть $60n < 111$. Значит, $n = 1$, тогда $x = 11$.

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный ответ и, в целом, верное рассуждение с небольшими пробелами* (*например, отсутствует ссылка на взаимную простоту чисел*)

$\pm$ *приведено полное обоснованное решение, но перепутан ответ* (*например,* 60 *вместо* 11)

$\mp$ *использовано, но не доказано, что количество конфет перед обедом кратно* 60, *и получен верный ответ*

$\mp$ *установлено одно из условий делимости, которому должно удовлетворять количество конфет перед обедом* (*например,* n *кратно* 3 *или* n *кратно* 20), *но решение не завершено или завершено неверно*

$\mp$ *приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию, но не доказано, что других ответов нет*

$-$ *приведен только ответ*

7.5. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа (см. рисунок слева).

Разрешается к числам, стоящим в двух соседних клетках, одновременно прибавлять одно и то же число, *не обязательно положительное*. Можно ли в какой-то момент получить такой квадрат с числами, как на рисунке справа? (*Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону*).

2	6	2
4	7	3
3	6	5

1	0	0
0	2	0
0	0	1

Ответ: нет, нельзя.

Разобьем все клетки квадрата на две группы. В одну группу войдут центральная клетка и 4 угловые, а в другую — оставшиеся 4 клетки. Тогда, из любых двух соседних клеток квадрата одна попадет в первую группу, а другая — во вторую.

Заметим, что в исходном квадрате суммы чисел в каждой группе между собой равны: $2 + 7 + 5 + 2 + 3 = 19$ и $6 + 4 + 3 + 6 = 19$.

Прибавляя к числам, стоящим в соседних клетках, одно и то же число, мы одинаково изменяем *сумму* всех чисел первой группы и *сумму* всех чисел второй группы. Поэтому равенство сумм чисел в группах не может нарушиться. Но во втором квадрате сумма чисел в клетках одной группы равна $1+2+1+0+0 = 4$, а сумма чисел в клетках другой группы равна $0 + 0 + 0 + 0 = 0$, поэтому такой квадрат не может получиться из исходного.

Разделение клеток квадрата на две группы соответствует «шахматной» раскраске (*см. рис.* 7.5).

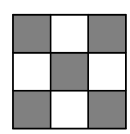


Рис. 7.5

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное и полное решение, основанное на прибавлении только целых чисел*

$-$ *приведен только ответ, или ответ, подкрепленный только разбором частных случаев*

8 класс

8.1. Сравните числа: $A = 2011 \cdot 20122012 \cdot 201320132013$ и $B = 2013 \cdot 20112011 \times \times 201220122012$.

Ответ: $A = B$.

$A = 2011 \cdot 20122012 \cdot 201320132013 = 2011 \cdot 2012 \cdot 10001 \cdot 2013 \cdot 100010001$;
$B = 2013 \cdot 20112011 \cdot 201220122012 = 2013 \cdot 2011 \cdot 10001 \cdot 2012 \cdot 100010001$.
Заметим, что каждое из произведений равно 8146492851648619183716.

$+$ *полное обоснованное решение (в том числе, и непосредственное вычисление)*
$\mp$ *верный ответ получен разложением на множители, но имеется однотипная вычислительная ошибка (например, неверное количество нулей)*
$-$ *приведен только ответ*

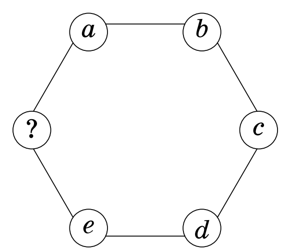
8.2. В формулу линейной функции $y = kx + b$ вместо букв k и b впишите числа от 1 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось 10 функций, графики которых проходят через одну и ту же точку.

Ответ: например, $\mathbf{y = 1x + 20}$, $\mathbf{y = 2x + 19}$, ..., $\mathbf{y = 10x + 11}$ или $\mathbf{y = 1x + 2}$, $\mathbf{y = 3x + 4}$, ..., $\mathbf{y = 19x + 20}$.

В первом случае график каждой функции пройдет через точку $(1; 21)$, а во втором случае — через точку $(-1; 1)$.

Возможны и другие примеры.

$+$ *приведен верный ответ и указана точка, через которую проходят все графики*
$\pm$ *приведен верный ответ, но общая точка графиков не указана*
$-$ *приведен неверный ответ*



8.3. Шесть кружков последовательно соединили отрезками. На каждом отрезке записали некоторое число, а в каждом кружке — сумму двух чисел, записанных на входящих в него отрезках. После этого стёрли все числа на отрезках и в одном из кружков (см. рис.). Можно ли найти число, обозначенное знаком вопроса?

Ответ: да, можно.

Раскрасим кружки, чередуя два цвета, например, белый и черный. Тогда каждый отрезок войдет по одному разу в кружок каждого цвета, поэтому сумма чисел в белых кружках будет равна сумме чисел в черных кружках (каждая из них равна сумме всех чисел, которые были записаны на отрезках).

Пусть x — стертое число. Тогда $x + b + d = a + c + e$. Из этого равенства однозначно находится значение x ($x = a + c + e - b - d$).

$+$ *доказано, что стертое число однозначно восстанавливается*
$\mp$ *равенство, из которого можно найти стертое число, указано, но не обосновано*
$-$ *приведен только ответ («можно» или «нельзя»)*

8.4. В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза меньше основания AD. Из вершины D опущен перпендикуляр DE на сторону AB. Докажите, что $CE = CD$.

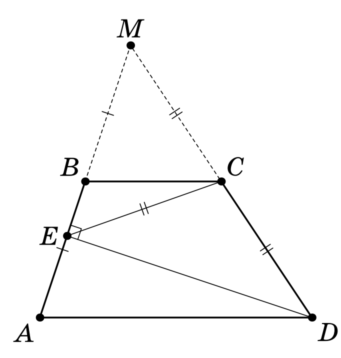


Рис. 8.4а

Первый способ. Продолжим боковые стороны AB и DC до их пересечения в точке M (см. рис. 8.4а). Тогда BC — средняя линия треугольника AMD (так как $BC || AD$ и $BC = 0{,}5AD$). EC — медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника MED, следовательно, $CE = MC = CD$, что и требовалось.

Второй способ. Через вершину C проведем прямую, параллельную AB, которая пересечет AD в точке K, а DE — в точке P (см. рис. 8.4б). Тогда $ABCK$ — параллелограмм, поэтому $BC = AK = KD$. По теореме Фалеса $EP = PD$, то есть CP — медиана треугольника CDE.

Кроме того, $AB \perp DE$, $CP || AB$, значит, $CP \perp DE$, то есть CP — высота треугольника CDE. Так как CP — медиана и высота треугольника CDE, то этот треугольник — равнобедренный: $CE = CD$, что и требовалось.

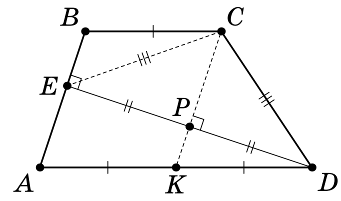


Рис. 8.4б

Существуют и другие способы решения.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное доказательство с незначительными пробелами*

$\mp$ *указано одно из возможных дополнительных построений, но доказательство не завершено*

$-$ *приведено неверное рассуждение или доказательство отсутствует*

8.5. Десять футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по x очков. Каково наибольшее возможное значение x? (Победа — 3 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0.)

Ответ: 13.

Оценка. Докажем, что x не может быть больше, чем 13. Действительно, в каждом матче разыграно либо 3 очка (если победила одна из команд), либо 2 очка (если была ничья). Всего было сыграно $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ матчей, значит, разыграно не более, чем 135 очков, то есть сумма очков, набранных всеми командами, не больше, чем 135. Таким образом, $10x \leqslant 135$, то есть $x \leqslant 13{,}5$. Так как x — целое число, то $x \leqslant 13$.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
A		1	3	3	3	3	0	0	0	0	**13**
B	1		3	3	3	3	0	0	0	0	**13**
C	0	0		1	3	3	3	3	0	0	**13**
D	0	0	1		3	3	3	3	0	0	**13**
E	0	0	0	0		1	3	3	3	3	**13**
F	0	0	0	0	1		3	3	3	3	**13**
G	3	3	0	0	0	0		1	3	3	**13**
H	3	3	0	0	0	0	1		3	3	**13**
I	3	3	3	3	0	0	0	0		1	**13**
K	3	3	3	3	0	0	0	0	1		**13**

Пример. Покажем, что по 13 очков команды набрать могли. Расположим команды по кругу и разобьём их последовательно на 5 пар. Пусть команды каждой пары сыграли между собой вничью, каждая из них выиграла у четырёх команд, следующих за данной парой по часовой стрелке, а остальным командам проиграла. Тогда каждая команда набрала ровно 13 очков.

Аналогичный пример можно предъявить и в виде таблицы.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *приведены верный ответ и пример*

$\mp$ *доказано только, что* $x \leqslant 13$.

$-$ *приведен только ответ*

8.6. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол MKN — прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

Продлим отрезок MK за точку K на его длину и получим точку P (см. рис. 8.6). Из равенства треугольников BKP и AMK (либо, из того, что $APBM$ — параллелограмм) получим, что $BP = AM$ и $BP || AM$. Так как $BP || AM$, то $BP \perp BN$.

В треугольнике MPN отрезок NK является высотой и медианой, следовательно, этот треугольник — равнобедренный: $NP = MN$.

Таким образом, прямоугольный треугольник NBP — искомый. Действительно, его стороны: $BP = AM$, BN и $NP = MN$.

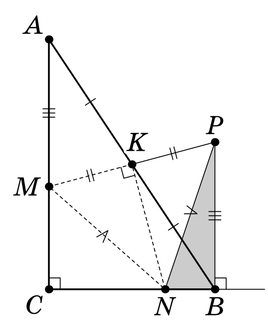


Рис. 8.6

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *приведено верное построение, но доказательство отсутствует*

9 класс

9.1. На некоторые клетки квадратной доски 4×4 выкладывают стопкой золотые монеты, а на остальные клетки — серебряные. Можно ли положить монеты так, чтобы в каждом квадрате 3×3 серебряных монет было больше, чем золотых, а на всей доске золотых было больше, чем серебряных?

Ответ: да, можно.

Например, положим, на одну из клеток центрального квадрата 2×2 стопку из девяти серебряных монет, а на остальные клетки доски — по одной золотой монете. Тогда в каждом квадрате 3×3 будет 9 серебряных монет и 8 золотых, а на всей доске — 15 золотых и 9 серебряных.

Существует и много других примеров.

$+$ *приведен верный пример (в том числе, и без пояснений)*

$\pm$ *наряду с верным примером приведен и неверный*

$-$ *приведен только ответ без примера*

9.2. Купец купил в Твери несколько мешков соли и продал их в Москве с прибылью в 100 рублей. На все вырученные деньги он снова купил в Твери соль (по тверской цене) и продал в Москве (по московской цене). На этот раз прибыль составила 120 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?

Ответ: 500 рублей.

Первый способ. Пусть килограмм соли стоит в Твери x рублей, а в Москве — y рублей, и купец в первый раз купил a кг соли. Тогда, по условию, $a(y - x) = 100$.

Вырученная сумма составила ay рублей, значит, во второй раз купец смог купить $\frac{ay}{x}$ кг соли. В этом случае прибыль составила $\frac{ay}{x} \cdot y - ay = \frac{ay(y-x)}{x}$ рублей. По условию, $\frac{ay(y-x)}{x} = 120$.

Из двух полученных уравнений следует, что $\frac{100y}{x} = 120$, то есть $y = \frac{6}{5}x$. Подставляя этот результат в первое уравнение, получим, что $ax = 500$.

Второй способ. Пусть купец заплатил при первой покупке в Твери за соль x рублей. Тогда он продал ее в Москве за $x + 100$ рублей. Во второй раз он потратил в Твери $x + 100$ рублей, а выручил в Москве $x + 100 + 120 = x + 220$ рублей. Так как соотношение московских и тверских цен не изменилось, составим пропорцию: $\frac{x}{x+100} = \frac{x+100}{x+220}$. Решив уравнение, получим $x = 500$.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *верное решение с небольшими пробелами или отдельными невнятными местами*

$\mp$ *верный ответ получен, исходя из рассуждений с конкретными числовыми данными*

$\mp$ *приведен верный ответ и проверено только, что он удовлетворяет условию*

$-$ *приведен только ответ или ответ с малопонятными выкладками без пояснений*

Если ученик предполагает, что всякий раз покупалось целое количество одинаковых мешков и рассматривает цены одного мешка, то оценка не снижается.

9.3. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC в два раза больше стороны AB. На стороне BC выбрана точка K так, что $\angle KDB = \angle BDA$. Найдите отношение $BK : KC$.

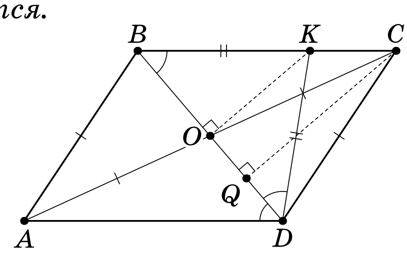


Рис. 9.3

Ответ: 2 : 1.

Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Из условия задачи следует, что $AB = AO = OC = CD$ (см. рис. 9.3). Так как $\angle KDB = \angle BDA = \angle DBK$, то $BK = KD$, поэтому медиана KO треугольника BKD является его высотой. Так как $OC = CD$, то медиана CQ треугольника OCD также является его высотой. Таким образом, $CQ \| KO$, тогда, по теореме о пропорциональных отрезках (*или из подобия треугольников BOK и BQC*) получим, что $BK : KC = BO : OQ = 2 : 1$.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *доказано только, что треугольники BKD и OCD — равнобедренные*

$-$ *рассмотрен какой-либо частный случай или приведен только ответ*

9.4. Под ёлкой лежат 2012 шишек. Винни-Пух и ослик Иа-Иа играют в игру: по очереди берут себе шишки. Своим ходом Винни-Пух берёт 1 или 4 шишки, а Иа-Иа — 1 или 3. Первым ходит Пух. Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто из игроков сможет гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

Ответ: Винни-Пух.

Первым ходом Винни должен взять 4 шишки, а в дальнейшем, после любого хода Иа-Иа брать каждый раз одну шишку. В этом случае, после каждого хода ослика под ёлкой будет оставаться нечетное количество шишек. Так как количество шишек под елкой постепенно будет уменьшаться, то неизбежно настанет момент, когда под елкой останется одна шишка. Взяв ее, Пух выиграет.

Существуют и другие стратегии.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный ответ и указана верная стратегия игры, но не объяснено, почему эта стратегия приводит к успеху*

$-$ *приведен верный ответ и сказано про четность, но стратегия игры отсутствует*

$-$ *приведен только ответ*

9.5. Могут ли все корни уравнений $x^2 - px + q = 0$ и $x^2 - (p+1)x + q = 0$ оказаться целыми числами, если: а) $q > 0$; б) $q < 0$?

Ответ: а) да; б) нет.

а) Например, $x^2 - 7x + 12 = 0$ и $x^2 - 8x + 12 = 0$. Корни первого уравнения 3 и 4, а второго 2 и 6.

Существуют и другие примеры.

б) Пусть $q < 0$, тогда каждое из данных уравнений имеет корни разных знаков. Пусть $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$ — корни первого уравнения, а $x_3 > 0$ и $x_4 < 0$ — корни второго.

По теореме Виета, $x_1x_2 = q$ и $x_3x_4 = q$, значит $x_1(-x_2) = x_3(-x_4) = -q > 0$. Кроме того, $x_1 \neq x_3$, иначе $x_2 = x_4$, а одинаковые наборы корней данные уравнения иметь не могут.

Пусть $x_1 < x_3$, тогда $-x_2 > -x_4$, то есть $x_2 < x_4$ (случай, когда $x_1 > x_3$ и $x_2 > x_4$ рассматривается аналогично). Так как все корни — целые числа, то $x_3 - x_1 \geqslant 1$ и $x_4 - x_2 \geqslant 1$. Используя опять теорему Виета, получим, что $x_1 + x_2 = p$ и $x_3 + x_4 = p + 1$. Тогда $(p+1) - p = (x_3 + x_4) - (x_1 + x_2) = (x_3 - x_1) + (x_4 - x_2) \geqslant 2$. Вместе с тем, $(p+1) - p = 1$.

Полученное противоречие показывает, что при $q < 0$ условие задачи выполняться не может.

$+$ *полное обоснованное решение обоих пунктов*

$\pm$ *приведено полное решение пункта б), а пункт а) отсутствует или выполнен неверно*

$\pm$ *приведено в целом верное рассуждение в пункте б), в котором есть незначительные пробелы и приведен верный пример в пункте а)*

$\mp$ *приведено в целом верное рассуждение в пункте б), в котором есть незначительные пробелы, а пункт а) отсутствует или выполнен неверно*

$\mp$ *верно выполнен только пункт а)*

9.6. Через концы основания BC трапеции $ABCD$ провели окружность, которая пересекла боковые стороны AB и CD трапеции в точках M и N соответственно. Известно, что точка T пересечения отрезков AN и DM также лежит на этой окружности. Докажите, что $TB = TC$.

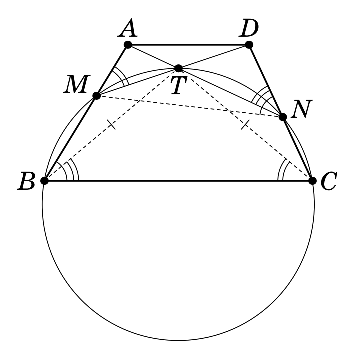


Рис. 9.5

Так как четырёхугольник $MBCN$ — вписанный, то $\angle MBC = \angle MND$ (см. рис. 9.6). Поскольку $ABCD$ — трапеция, то $\angle MBC + \angle MAD = 180^\circ$. Следовательно, $\angle MND + \angle MAD = 180^\circ$, поэтому четырехугольник $MADN$ — также вписанный, значит, $\angle TND = \angle TMA$. Кроме того, вписанными являются четырехугольники $TBCN$ и $TCBM$, значит, $\angle TBC = \angle TND$ и $\angle TCB = \angle TMA$. Таким образом, $\angle TBC = \angle TCB$, откуда $TB = TC$, что и требовалось.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *доказано только, что $MADN$ — вписанный*

10 класс

10.1. Расставьте в кружках, расположенных в вершинах квадрата и в его центре, пять натуральных чисел так, чтобы каждые два числа, соединенные отрезком, имели общий делитель, больший 1, а любые два числа, не соединенные отрезком, были бы взаимно просты.

Ответ: один из возможных примеров приведен на рисунке 10.1а.

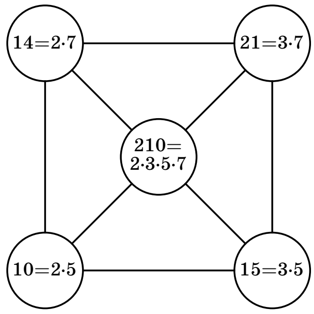


Рис. 10.1а

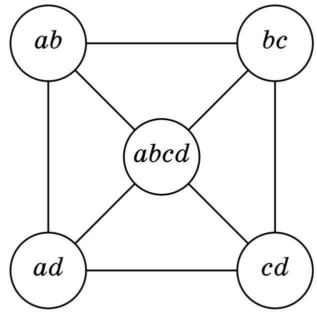


Рис. 10.1б

Пример может быть построен из таких соображений: возьмем четыре попарно взаимно простых числа a, b, c, d и запишем в двух противоположных вершинах квадрата числа ab и cd, в других вершинах — числа ad и bc, а в центре — $abcd$ (см. рис. 10.1б).

$+$ *приведен верный пример (в том числе и такой, как на рисунке* 10.1б)

$\pm$ *приведено два примера, один из которых — верный, а другой — неверный*

$-$ *приведен любой неверный пример*

10.2. Квадратный трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ имеет два различных корня, а квадратный трехчлен $a^2x^2 + 2b^2x + c^2$ корней не имеет. Докажите, что у первого трехчлена корни разного знака.

Пусть x_1, x_2, D_1 — корни и упрощенный дискриминант первого трехчлена, D_2 — упрощенный дискриминант второго трехчлена. Заметим, что достаточно доказать неравенство $ac < 0$. Действительно, по теореме Виета $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, поэтому корни первого трехчлена имеют разные знаки тогда и только тогда, когда a и c имеют разные знаки.

Докажем, что $ac < 0$. Это можно сделать различными способами.

Первый способ. Пусть это не так, тогда $ac \geqslant 0$. Из условия следует, что $D_1 = b^2 - ac > 0$, то есть, $b^2 > ac \geqslant 0$. Следовательно, $b^4 > (ac)^2$, откуда $D_2 = b^4 - a^2c^2 > 0$, то есть, второй трехчлен также имеет корни, что противоречит условию задачи.

Второй способ. У первого трехчлена есть два различных корня, поэтому $D_1 = b^2 - ac > 0$. У второго трехчлена корней нет, поэтому $D_2 = b^4 - a^2c^2 < 0$. Так как $b^4 - a^2c^2 = (b^2 - ac)(b^2 + ac)$, из двух записанных неравенств следует, что $b^2 + ac < 0$, то есть $ac < 0$.

$+$ *приведено верное обоснованное решение*

$\pm$ *в доказательстве от противного используется, что* $ac > 0$ (*вместо* $ac \geqslant 0$)

10.3. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC отмечены точки L и K соответственно, M — точка пересечения отрезков AK и CL. Известно, что площадь треугольника AMC равна площади четырехугольника $LBKM$. Найдите угол AMC.

Из равенства площадей треугольника AMC и четырехугольника $LBKM$ следует равенство площадей треугольников ACK и CBL (см. рис. 10.2). Действительно, добавив к обеим частям равенства площадь треугольника CMK, получим требуемое.

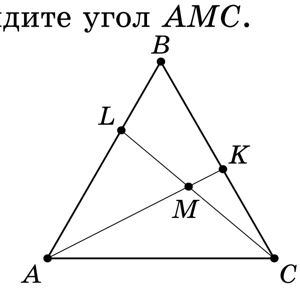


Рис. 10.2

Заметим, что $S_{ACK} = \frac{1}{2}AC \cdot CK \cdot \sin\angle ACK$, а $S_{CBL} = \frac{1}{2}BC \cdot BL \times \sin\angle CBL$. Учитывая равенство сторон и углов в равностороннем треугольнике ABC, получим, что $CK = LB$, то есть $\triangle ACK = \triangle CBL$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle CKA = \angle BLC$. Учитывая, что $\angle BLC + \angle BCL = 180^\circ - \angle LBC = 120^\circ$, получим: $\angle AMC = \angle MCK + \angle MKC = \angle LCB + \angle BLC = 120^\circ$.

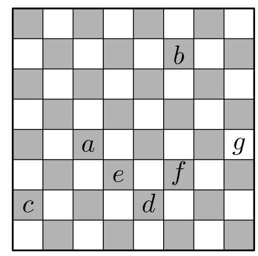
Комментарий. После того, как доказано, что $CK = LB$, далее можно рассуждать иначе.

При повороте вокруг центра равностороннего треугольника ABC на угол 120° точка A переходит в точку C, а точка K в точку L, то есть, отрезок AK переходит в отрезок CL. Следовательно, $\angle AMC = 120^\circ$.

$+$ *приведено верное обоснованное решение*

$\mp$ *доказано только, что $CK = LB$*

10.4. Вася придумал новую шахматную фигуру «супер-слон». Один «супер-слон» (обозначим его A) бьет другого (обозначим его B), если они стоят на одной диагонали, между ними нет фигур, и следующая по диагонали клетка за «супер-слоном» B свободна. Например, на рисунке фигура a бьет фигуру b, но не бьет ни одну из фигур c, d, e, f и g.



Какое наибольшее количество «супер-слонов» можно поставить на шахматную доску так, чтобы каждый из них бился хотя бы одним другим?

Ответ: 32 фигуры.

Пример приведен на рисунке 10.4.

Докажем, что больше 32 фигур разместить не удастся. Заметим сначала, что на крайних клетках доски «супер-слоны» стоять не могут (иначе их никто не бьет).

Разобьем внутренний квадрат 6×6 на четыре квадрата 3×3 (см. рис. 10.4). В каждом из этих квадратов все клетки занятыми быть не могут, поскольку в противном случае «супер-слон», стоящий в центральной клетке маленького квадрата, никем не бьется. Следовательно, можно поставить не более $6 \cdot 6 - 4 = 32$ фигур.

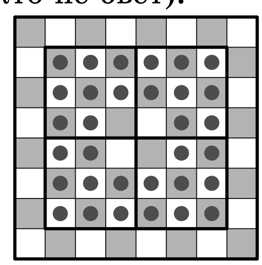


Рис. 10.4

$+$ *приведено верное обоснованное решение*

$\mp$ *приведен только верный пример*

10.5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD||BC$). На дуге AD (не содержащей точек B и C) описанной окружности этой трапеции произвольно выбрана точка M. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из вершин A и D на отрезки BM и CM, лежат на одной окружности.

Пусть K, L, N и S — основания перпендикуляров (см. рис. 10.5). Докажем, что K, L, N и S лежат на одной окружности.

Заметим, что из равенства сторон AB и CD трапеции следует равенство соответствующих дуг, а следовательно и вписанных углов, опирающихся на эти дуги. То есть $\angle AMB = \angle DMC$.

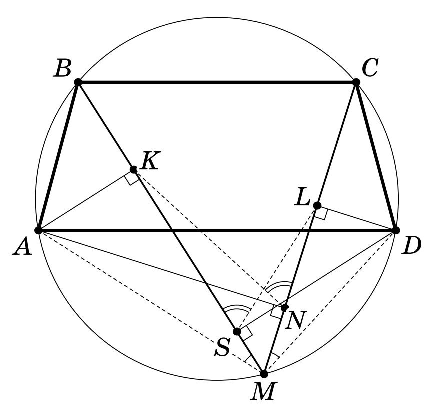


Рис. 10.5

Далее можно рассуждать по-разному:

Первый способ. Так как $\angle AKM = \angle ANM = 90^\circ$, то точки A, K, N и M лежат на одной окружности. Аналогично, точки D, L, S и M лежат на одной окружности.

Используя равенство вписанных углов, получим, что $\angle KNL = 90^\circ - \angle KNA = 90^\circ - \angle KMA = 90^\circ - \angle LMD = 90^\circ - \angle LSD = \angle KSL$, то есть точки K, L, N и S лежат на одной окружности.

Комментарий. Другие случаи расположения точек рассматриваются аналогично.

Второй способ. Заметим, что $\triangle MSD \sim \triangle MNA$ и $\triangle MLD \sim \triangle MKA$ по двум углам. Следовательно, $\frac{MD}{MA} = \frac{MS}{MN}$ и $\frac{MD}{MA} = \frac{ML}{MK}$, то есть $\frac{MS}{MN} = \frac{ML}{MK}$, откуда $ML \cdot MN = MS \cdot MK$.

Используя утверждение, обратное свойству секущих, получим требуемое.

Комментарий для проверяющих. Не предполагается рассмотрение различных случаев расположения оснований перпендикуляров. То есть, за рассмотрение только одного случая оценка не снижается.

$+$ *приведено верное обоснованное решение*

10.6. Даны $n+1$ попарно различных натуральных числа, меньших $2n$ ($n > 1$). Докажите, что среди них найдутся три таких числа, что сумма двух из них равна третьему.

Первый способ. Воспользуемся методом математической индукции.

База. При $n = 2$ выбранными оказываются числа 1, 2, 3. Утверждение задачи верно, поскольку $1 + 2 = 3$.

Переход. Пусть утверждение верно для некоторого значения n. Докажем, что оно верно и для $n + 1$, то есть, среди $n + 2$ натуральных чисел, меньших $2n + 2$, есть три числа таких, что сумма двух из них равна третьему.

Возможны два случая:

1) Среди выбранных чисел нет числа $2n + 1$. Тогда из чисел, меньших $2n$, выбрали по-крайней мере $n + 1$ число (даже, если в наборе есть число $2n$, останется еще $n + 1$ число). Тогда, по предположению индукции, найдутся три числа, сумма которых равна третьему.

2) Среди выбранных чисел есть число $2n + 1$. Разобьем числа 1, 2, ..., $2n$ на пары чисел, в сумме дающих $2n + 1$: 1 и $2n$, 2 и $2n - 1$, ..., n и $n + 1$. Таких пар n. Поскольку в набор входит еще $n + 1$ число, то какая-то из пар входит в набор целиком. Следовательно, числа этой пары и число $2n + 1$ образуют искомую тройку.

Второй способ. Рассмотрим два случая.

1) Среди выбранных чисел есть число $2n - 1$. Разобьем числа 1, 2, ..., $2n - 2$ на пары чисел, в сумме дающих $2n - 1$: 1 и $2n - 2$, 2 и $2n - 3$, ..., $n - 1$ и $n + 1$. Таких пар $n - 1$. Поскольку в набор входит еще n чисел, помимо $2n - 1$, то какая-то из пар входит в набор целиком. Следовательно, числа этой пары и число $2n - 1$ образуют искомую тройку.

2) Среди выбранных чисел нет числа $2n - 1$. Тогда достаточно доказать, что если выбрали n чисел, меньших $2n - 2$, то найдутся три числа, удовлетворяющих условию. Таким образом, задача сводится к аналогичной, но при этом n уменьшится на 1.

Следовательно, мы либо на каком-то шаге найдем нужную тройку, либо дойдем до чисел 1, 2, 3, которые удовлетворяют условию.

$+$ *приведено верное обоснованное решение*

$-$ *решение приведено только для конкретных значений n*

11 класс

11.1. Известно, что $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = 2$ и $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 3$. Найдите $\operatorname{tg}(A+B)$.

Ответ: 6.

Найдем сначала произведение тангенсов: $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 3$; $\frac{1}{\operatorname{tg} A} + \frac{1}{\operatorname{tg} B} = 3$; $\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} = 3$; $\frac{2}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} = 3$; $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B = \frac{2}{3}$. А теперь найдем тангенс суммы: $\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \frac{2}{1 - \frac{2}{3}} = 6$.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *ход решения верен, но в конце, при вычислении* $\operatorname{tg}(A+B)$ *допущена арифметическая ошибка*

$-$ *приведен только ответ*

11.2. Туристическая фирма провела акцию: «Купи путевку в Египет, приведи четырех друзей, которые также купят путевку, и получи стоимость путевки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

Ответ: 29.

Пусть каждый из x потенциальных «счастливчиков» привел по 4 друга. Тогда «приведенных» клиентов $4x$, еще 13 пришли сами, значит, всего туристов было $13 + 4x$.

С другой стороны, x человек привели новых клиентов, а 100 человек — не привели, то есть всего туристов было $x + 100$.

Получим уравнение: $13 + 4x = x + 100$, откуда $x = 29$.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *уравнение составлено верно и получен верный ответ, но отсутствуют какие-либо пояснения*

$\mp$ *в решении допущена арифметическая ошибка*

$-$ *уравнение составлено неверно*

$-$ *приведен только ответ*

11.3. Функция $f(x)$ такова, что для всех значений x выполняется равенство $f(x+1) = f(x) + 2x + 3$. Известно, что $f(0) = 1$. Найдите $f(2012)$.

Ответ: $4052169 = 2013^2$.

Запишем условие задачи в виде: $f(x+1) - f(x) = 2x + 3$. Подставим вместо x числа 0, 1, 2, ..., 2011. Получим: $f(1) - f(0) = 2 \cdot 0 + 3$, $f(2) - f(1) = 2 \cdot 1 + 3$, ..., $f(2012) - f(2011) = 2 \cdot 2011 + 3$.

Сложим полученные равенства почленно: $f(2012) - f(0) = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 2011) + 3 \cdot 2012$. Учитывая, что $1 + 2 + \ldots + 2011 = \frac{2012 \cdot 2011}{2}$, получим, что $f(2012) = 1 + 2011 \cdot 2012 + 3 \cdot 2012 = 1 + 2 \cdot 2012 + 2012^2 = 2013^2 = 4052169$.

Школьник имеет право записать ответ в любом из двух указанных видов.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *путем рассмотрения отдельных примеров замечено, но не доказано, что искомое значение является квадратом, и приведен верный ответ*

$-$ *приведен только ответ*

11.4. Точка X расположена на диаметре AB окружности радиуса R. Точки K и N лежат на окружности в одной полуплоскости относительно AB, а $\angle KXA = \angle NXB = 60^\circ$. Найдите длину отрезка KN.

Ответ: $KN = R$.

Первый способ (*осевая симметрия*). Рассмотрим точку K', симметричную точке K относительно диаметра AB (см. рис. 11.4a). Она лежит на той же окружности и $\angle KXA = 60^\circ$. Тогда сумма трех углов с вершиной в точке X (*отмеченных на чертеже*) равна 180°. Следовательно, точки K', X и N лежат на одной прямой.

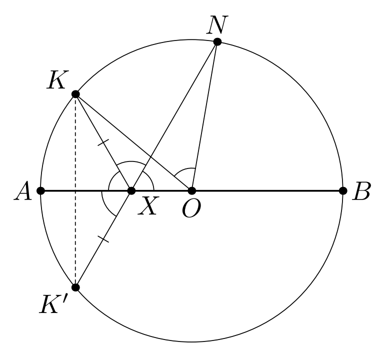


Рис. 11.4a

Треугольник $K'XK$ — равнобедренный с углом 120° при вершине. Следовательно, вписанный угол $KK'N$ равен 30°. Тогда центральный угол KON равен 60°. Таким образом, треугольник KON — равнобедренный с углом 60°, то есть он равносторонний. Значит, $KN = R$.

Второй способ (*вспомогательная окружность*). Докажем следующий факт: если точки X и O лежат на прямой a, лучи XK и XN образуют с ней равные углы, а точка O равноудалена от точек K и N, то точки K, N, X и O лежат на одной окружности.

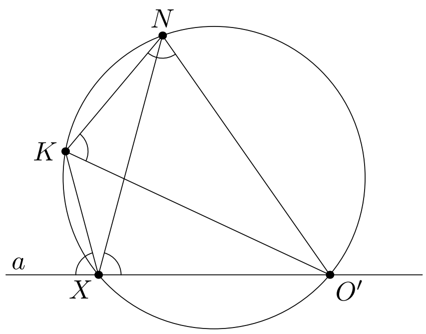


Рис.11.4б

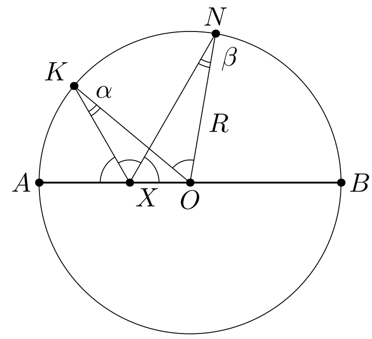


Рис.11.4в

Действительно, опишем окружность около треугольника KXN. Пусть она вторично пересекает прямую a в точке O' (см. рис. 11.4б). Тогда $\angle NKO' = \angle NXO'$ (*вписанные углы, опирающиеся на одну дугу*), а внешний угол при вершине X вписанного четырехугольника $NKXO'$ равен внутреннему углу KNO'. Следовательно, в треугольнике NKO' равны углы, прилежащие к стороне NK, поэтому $O'K = O'N$, то есть точка O' совпадает с точкой O.

Применив доказанное утверждение, в нашем случае получим, что $\angle KON = \angle KXN = 60^\circ$. Таким образом, треугольник KON — равнобедренный с углом 60°, то есть он равносторонний. Значит, $KN = R$.

Третий способ (*теорема синусов*). Пусть $\angle XKO = \alpha$; $\angle XNO = \beta$. По теореме синусов для треугольников XKO и XNO (см. рис. 11.4в): $\frac{R}{\sin 120^\circ} = \frac{XO}{\sin\alpha}$ и $\frac{R}{\sin 60^\circ} = \frac{XO}{\sin\beta}$.

Так как $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, то $\sin\alpha = \sin\beta$. Поскольку углы α и β — острые, то $\alpha = \beta$. Следовательно, точки X, K, O и N лежат на одной окружности. Дальнейшее описано выше.

Возможны и другие способы решения.

$+$ *полное обоснованное решение* (*любым способом*)

$\pm$ *приведено в целом верное решение с некоторыми незначительными пробелами*

$-$ *приведен только ответ*

11.5. В десятичной записи некоторого числа цифры расположены слева направо в порядке убывания. Может ли это число быть кратным числу 111?

Ответ: нет, не может.

Первый способ. Предположим, что существует число $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ такое, что $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ и кратное числу 111. Тогда заметим, что:

1) если в таком числе на последнем месте стоит 0, то его можно зачеркнуть и новое число $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}}$ будет обладать теми же свойствами: оно кратно числу 111 и цифры в нем будут также расположены в порядке убывания;

2) число $A = \overline{a_1a_2\ldots a_n} - 111$ будет обладать теми же свойствами.

Будем теперь последовательно отнимать 111 от числа $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ и, если в конце какой-нибудь разности будет получатся 0, то его зачеркивать и продолжать операцию.

Через какое-то количество шагов мы получим трехзначное число $\overline{b_1b_2b_3}$, цифры которого расположены в порядке убывания, и которое кратно числу 111. Но это невозможно, так как в записи трехзначного числа, кратного числу 111, все цифры должны быть равны. Следовательно, одновременное выполнение двух условий невозможно.

Второй способ. Предположим, что числа, указанные в условии, существуют. Пусть A — наименьшее среди них. Возможны два случая:

1) Число A кратно числу 111 и кратно числу 10, тогда, так как 10 и 111 взаимно просты, то число $\frac{A}{10}$ кратно 111 и цифры в его записи расположены в порядке убывания.

2) Число A кратно числу 111 и не кратно числу 10, тогда число A — 111 также кратно 111 и цифры в его записи также расположены в порядке убывания;

В обоих случаях получаем противоречие с тем, что число A — наименьшее. Следовательно, одновременное выполнение двух условий невозможно.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *найдены какие-то из указанных закономерностей, но решение не доведено до конца*

$-$ *приведен только ответ*

11.6. В правильной четырёхугольной усеченной пирамиде середина N ребра B_1C_1 верхней грани $A_1B_1C_1D_1$ соединена с серединой M ребра AB нижней грани $ABCD$. Прямые B_1C_1 и AB не лежат в одной плоскости. Докажите, что проекции ребер B_1C_1 и AB на прямую MN равны между собой.

Заметим, что требуемое утверждение равносильно тому, что равны проекции на прямую MN отрезков MB и B_1N (вдвое меньшей длины, см. рис. 11.6а, в).

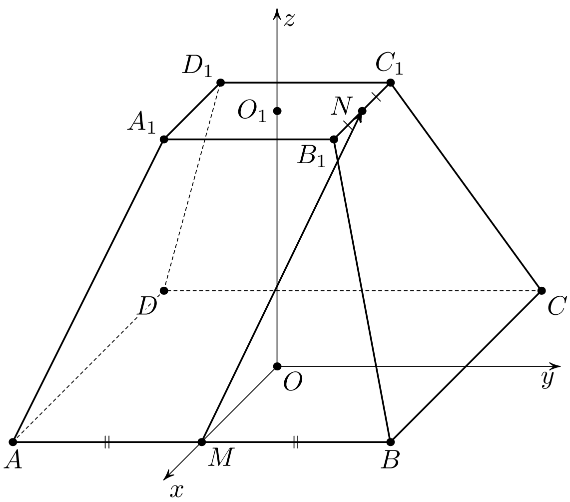


Рис. 11.6а

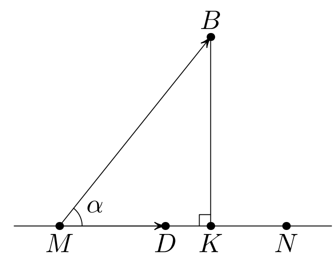


Рис. 11.6б

Первый способ. Пусть отрезок MK — проекция отрезка MB на прямую MN (см. рис. 11.6б). Тогда $MK = MB\cos\alpha$, где α — угол между прямыми MN и MB. Пусть также $\overrightarrow{MD}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{MN}$. Тогда $MK = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$.

Аналогично, если PN — проекция отрезка B_1N на прямую MN, то $PN = \overrightarrow{B_1N}\cdot\overrightarrow{MD}$.

Введем прямоугольную декартову систему координат $OXYZ$ так, как показано на рис. 11.6а (O — *центр нижнего основания* $ABCD$, *оси* x *и* y *параллельны сторонам основания*).

Пусть длины ребер большего и меньшего оснований равны $2a$ и $2b$ соответственно, а высота пирамиды равна h.

Тогда $B(a;a;0)$; $B_1(b;b;h)$; $M(a;0;0)$; $N(0;b;h)$. Следовательно, $\overrightarrow{MN}(-a;b;h)$; $\overrightarrow{MB}(0;a;\ 0)$; $\overrightarrow{B_1N}(-b;0;0)$.

Значит, $MK = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB}\cdot\dfrac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \dfrac{\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \dfrac{ab}{|\overrightarrow{MN}|}$;

$$PN = \overrightarrow{B_1N}\cdot\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{B_1N}\cdot\frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{\overrightarrow{B_1N}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{(-b)(-a)}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{ab}{|\overrightarrow{MN}|}.$$

Таким, образом, $MK = PN$, что и требовалось.

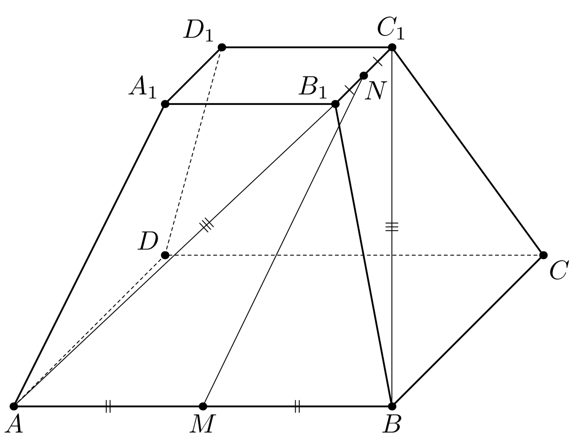


Рис. 11.6в

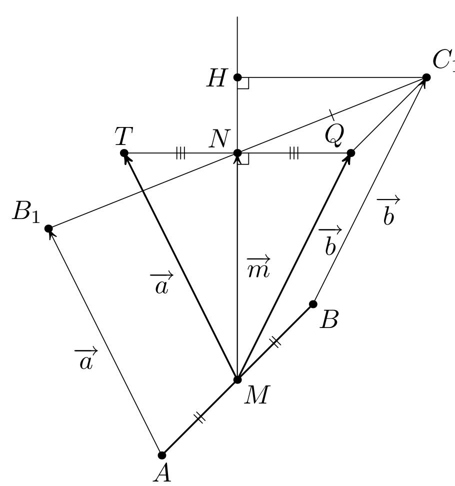


Рис. 11.6г

Второй способ. Пусть $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{b}$, тогда $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.

Отложим векторы $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{b}$ от точки M (см. рис. 11.6г).

Заметим, что $AB_1 = BC_1$, то есть $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, поэтому треугольник TMQ — равнобедренный. Значит, его медиана MN является и высотой. Тогда N — проекция точки Q на прямую MN.

Пусть H — проекция точки C_1 на прямую MN. Тогда в отрезок HN проектируется как отрезок QC_1, так и отрезок NC_1.

Поскольку MBC_1Q — параллелограмм, то отрезки MB и C_1Q равны и параллельны. Следовательно, их проекции на прямую MN равны. Следовательно, равны и проекции отрезков MB и NC_1 на прямую MN.

Случай, когда проектируемый отрезок и прямая «скрещиваются» (прямые MN и QC_1 в решении) можно рассмотреть подробнее.

Направим вдоль прямой MN ось z прямоугольной системы координат. Тогда проекция отрезка на ось z равна модулю разности координат по этой оси концов отрезка, то есть равна координате по оси z вектора, начало и конец которого совпадает с концами отрезка. Тогда координаты векторов QC_1 и NC_1 по оси z равны. Следовательно, равны и их проекции.

Возможно также решение, аналогичное приведенному выше, но использующее проекцию вектора на прямую. Это позволяет «переносить» вектор в любую точку, не изменяя его проекцию. Этот факт, равно как и формулу $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ для вектора, соединяющего середины сторон пространственного четырехугольника, можно считать общеизвестными, поэтому школьники могут их не доказывать.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено в целом верное решение с некоторыми незначительными пробелами*