LXXVII Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва, 2014

Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Московское математическое общество
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты mmo@mccme.ru

☞ Материалы данной книги размещены на странице

www.mccme.ru/mmo

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

☞ Председатель оргкомитета LXXVII ММО

член-корр. РАН *Д. О. Орлов*.

☞ Сборник подготовили:

В. Д. Арнольд, *Е. В. Бакаев*, *А. Г. Банникова*, *А. В. Бегунц*, *М. А. Берштейн*, *А. Д. Блинков*, *И. И. Богданов*, *В. В. Буланкина*, *А. А. Гаркавый*, *С. Б. Гашков*, *Т. И. Голенищева-Кутузова*, *Д. В. Горяшин*, *А. С. Гусев*, *С. А. Дориченко*, *Г. К. Жуков*, *А. А. Заславский*, *Д. А. Звонкин*, *Ф. А. Ивлев*, *Т. В. Казицына*, *В. А. Клепцын*, *К. А. Кноп*, *О. Н. Косухин*, *Н. Ю. Медведь*, *Л. Э. Медников*, *А. Б. Меньщиков*, *Г. А. Мерзон*, *Д. О. Орлов*, *А. А. Пахарев*, *А. А. Пономарев*, *М. А. Раскин*, *И. В. Раскина*, *А. Н. Семёнов*, *М. Б. Скопенков*, *Н. П. Стрелкова*, *Ю. В. Тихонов*, *А. В. Устинов*, *Б. Р. Френкин*, *А. В. Хачатурян*, *А. В. Шаповалов*, *Д. Э. Шноль*, *И. В. Ященко*.

☞ Проведение олимпиады и издание книги осуществлены при поддержке фирмы «НИКС», компании «Яндекс» и фонда «Математические этюды».

6 класс

1. Дети ходили в лес по грибы. Если Аня отдаст половину своих грибов Вите, у всех детей станет поровну грибов, а если вместо этого Аня отдаст все свои грибы Саше, то у Саши станет столько же грибов, сколько у всех остальных вместе взятых. Сколько детей ходило за грибами?

(*И. В. Раскина*)

2. Из шести костяшек домино (см. рис. 1) сложите прямоугольник 3×4 так, чтобы во всех трех строчках точек было поровну и во всех четырех столбцах точек было тоже поровну. (*Н. П. Стрелкова*)

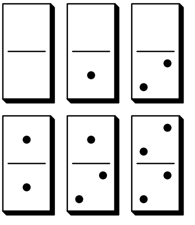

Рис. 1

3. Одуванчик утром распускается, два дня цветет желтым, на третий день утром становится белым, а к вечеру облетает. Вчера днем на поляне было 20 желтых и 14 белых одуванчиков, а сегодня 15 желтых и 11 белых.

а) Сколько желтых одуванчиков было на поляне позавчера?

б) Сколько белых одуванчиков будет на поляне завтра? (*Д. Э. Шноль*)

4. Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать на четыре фигурки, изображенные на рис. 2 слева, а можно — на пять фигурок, изображенных справа. (Фигурки можно поворачивать.)

(*А. В. Шаповалов*)

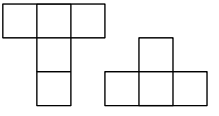

Рис. 2

5. Мама испекла пирожки — три с рисом, три с капустой и один с вишней — и выложила их на блюдо по кругу (см. рис. 3). Потом поставила блюдо в микроволновку подогреть. На вид все пирожки одинаковые. Маша знает, как они лежали, но не знает, как повернулось блюдо. Она хочет съесть пирожок с вишней, а остальные считает невкусными. Как Маше наверняка добиться этого, надкусив как можно меньше невкусных пирожков? (*А. В. Хачатурян*)

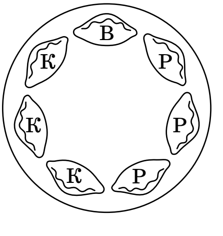

Рис. 3

6. Известный преступник профессор Мориарти долго скрывался от Шерлока Холмса и лондонской полиции. И вот однажды полицейским удалось перехватить телеграмму, которую Мориарти прислал сообщнику:

Встречай завтра поезд СТО вагон О

Инспектор Лестрейд уже распорядился было послать наряд полиции искать нулевой вагон сотого поезда, но тут принесли еще две перехваченные телеграммы на тот же адрес:

СЕКРЕТ – ОТКРОЙ = ОТВЕТ – ТВОЙ

СЕКРЕТ – ОТКРЫТ = 20010

Лестрейд задумался. А Холмс воскликнул: «Теперь ясно, какой поезд надо встречать!» Инспектор удивился. «Элементарно, Лестрейд! — пояснил сыщик. — Это же шифр. В этих примерах одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные — разные, а черточка — это минус! Мориарти едет в поезде № ...»

Напишите номер поезда и вагона. Объясните, как мог рассуждать Холмс. (*И. В. Раскина*)

7 класс

1. См. задачу 1 для 6 класса.

2. Два одинаковых прямоугольных треугольника из бумаги удалось положить один на другой так, как показано на рис. 4 (при этом вершина прямого угла одного попала на сторону другого). Докажите, что заштрихованный треугольник равносторонний. (*Е. В. Бакаев*)

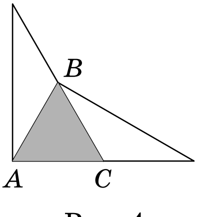

Рис. 4

3. Замените в слове МАТЕМАТИКА буквы цифрами и знаками сложения и вычитания так, чтобы получилось числовое выражение, равное 2014. (Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры или знаки, разными — разные. Достаточно привести пример.) (*А. В. Хачатурян*)

4. Одуванчик утром распускается, три дня цветет желтым, на четвертый день утром становится белым, а к вечеру пятого дня облетает. В понедельник днем на поляне было 20 желтых и 14 белых одуванчиков, а в среду — 15 желтых и 11 белых. Сколько белых одуванчиков будет на поляне в субботу? (*Д. Э. Шноль*)

5. Незнайка рисует замкнутые пути внутри прямоугольника 5×8, идущие по диагоналям прямоугольников 1×2. На рис. 5 изображен пример пути, проходящего по 12 таким диагоналям. Помогите Незнайке нарисовать путь как можно длиннее.

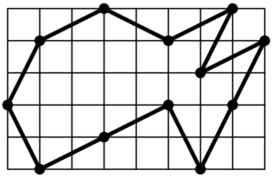

Рис. 5

Пересекать уже проведенные диагонали или проходить второй раз через уже посещенные вершины не разрешается. (*Е. В. Бакаев*)

6. На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно

– либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа;

– либо разделить одно из чисел пополам, если оно четное.

Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник? Опишите его стратегию и докажите, что она выигрышная. (*А. В. Шаповалов*)

8 класс

1. Витя хочет найти выражение, состоящее из единиц, скобок, знаков «+» и «×», такое, что

– его значение равно 10;

– если в этом выражении заменить все знаки «+» на знаки «×», а знаки «×» на знаки «+», всё равно получится 10.

Приведите пример такого выражения. (*В. А. Клепцын*)

2. Будем называть *змейкой* ломаную, у которой все углы между соседними звеньями равны, причём для любого некрайнего звена соседние с ним звенья лежат в разных полуплоскостях от этого звена (пример змейки — на рис. 6).

Барон Мюнхгаузен заявил, что отметил на плоскости 6 точек и нашёл 6 разных способов соединить их (пятизвенной) змейкой (вершины каждой из змеек — отмеченные точки). Могут ли его слова быть правдой? (*Е. В. Бакаев*)

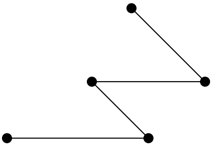

Рис. 6

3. Натуральные числа от 1 до 2014 как-то разбили на пары, числа в каждой из пар сложили, а полученные 1007 сумм перемножили. Мог ли результат оказаться квадратом натурального числа? (*А. В. Хачатурян*)

4. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD. (*А. А. Гаркавый*)

5. В городе Плоском нет ни одной башни. Для развития туризма жители города собираются построить несколько башен общей высотой в 30 этажей.

Инспектор Высотников, поднимаясь на каждую башню, считает число более низких башен, а потом складывает получившиеся величины. После чего инспектор рекомендует город тем сильнее, чем получившаяся величина больше. Сколько и какой высоты башен надо построить жителям, чтобы получить наилучшую возможную рекомендацию?

(*В. А. Клепцын*)

6. На столе лежат 9 яблок, образуя 10 рядов по 3 яблока в каждом (см. рис. 7). Известно, что у девяти рядов веса одинаковы, а вес десятого ряда отличается.

Есть электронные весы, на которых за рубль можно узнать вес любой группы яблок. Какое наименьшее число рублей надо заплатить, чтобы узнать, вес какого именно ряда отличается?

(*А. В. Шаповалов*)

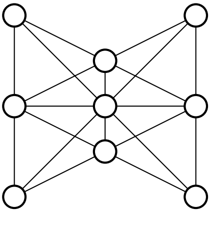

Рис. 7

1. Все коэффициенты квадратного трехчлена — нечетные целые числа. Докажите, что у него нет корней вида $1/n$, где n — натуральное число. (*Фольклор*)

2. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд. (*И. И. Богданов*)

3. Дано n палочек. Из любых трех можно сложить тупоугольный треугольник. Каково наибольшее возможное значение n? (*Б. Р. Френкин*)

4. На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, ее размеры могут отличаться от размеров стола.) (*Е. В. Бакаев*)

5. *Радикалом* натурального числа N (обозначается $\mathrm{rad}(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, $\mathrm{rad}(120) = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$.

Существует ли тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C таких, что $A+B=C$ и $C > 1000 \times \mathrm{rad}(ABC)$? (*Фольклор*)

6. На окружности отмечены 10 точек, занумерованные по часовой стрелке: A_1, A_2, ..., A_{10}, причем известно, что их можно разбить на пары симметричных относительно центра окружности.

Изначально в каждой отмеченной точке сидит по кузнечику. Каждую минуту один из кузнечиков прыгает *вдоль окружности* через своего соседа так, чтобы расстояние между ними не изменилось. При этом нельзя пролетать над другими кузнечиками и попадать в точку, где уже сидит кузнечик.

Через некоторое время оказалось, что какие-то 9 кузнечиков сидят в точках A_1, A_2, ..., A_9, а десятый кузнечик сидит на дуге $A_9A_{10}A_1$. Можно ли утверждать, что он сидит именно в точке A_{10}? (*Е. В. Бакаев*)

10 класс

1. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $1/a$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трехчлена $f(x)$ имеют разные знаки. (*Г. К. Жуков*)

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает отрезок BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

(*Е. В. Бакаев*)

4. Дано несколько белых и несколько черных точек. Из каждой белой точки идет стрелка в каждую черную, на каждой стрелке написано натуральное число.

Известно, что если пройти по любому замкнутому маршруту, то произведение чисел на стрелках, идущих по направлению движения, равно произведению чисел на стрелках, идущих против направления движения.

Обязательно ли тогда можно поставить в каждой точке натуральное число так, чтобы число на каждой стрелке равнялось произведению чисел на ее концах?

(*А. В. Пахарев*)

5. Дан треугольник, у которого нет равных углов. Петя и Вася играют в такую игру: за один ход Петя отмечает точку на плоскости, а Вася красит ее по своему выбору в красный или синий цвет. Петя выиграет, если какие-то три из отмеченных им и покрашенных Васей точек образуют одноцветный треугольник, подобный исходному.

За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть (каков бы ни был исходный треугольник)? (*К. А. Кноп*)

6. Многочлен $P(x)$ обладает следующими свойствами: $P(0) = 1$, $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100} \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x)+1)^{100}$ равен нулю. (*Д. А. Звонкин*)

11 класс (1 день)

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Найдите все значения a, для которых найдутся такие x, y и z, что числа $\cos x$, $\cos y$ и $\cos z$ попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа $\cos(x+a)$, $\cos(y+a)$ и $\cos(z+a)$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. (*Д. В. Горяшин*)

3. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ с центром O отмечены такие точки P и Q соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$.

а) Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

б) Докажите, что прямые AQ и CP пересекаются на описанной окружности треугольника ABC. (*А. А. Заславский*)

4. Саша обнаружил, что на калькуляторе осталось ровно n исправных кнопок с цифрами. Оказалось, что любое натуральное число от 1 до 99 999 999 можно либо набрать, используя лишь исправные кнопки, либо получить как сумму двух натуральных чисел, каждое из которых можно набрать, используя лишь исправные кнопки. Каково наименьшее n, при котором это возможно? (*О. Н. Косухин*)

5. См. задачу 6 для 10 класса.

6. В королевстве некоторые пары городов соединены железной дорогой. У короля есть полный список, в котором поименно перечислены все такие пары (каждый город имеет свое собственное имя). Оказалось, что для любой упорядоченной пары городов принц может переименовать все города так, чтобы первый город оказался названным именем второго города, а король не заметил бы изменений. Верно ли, что для любой пары городов принц может переименовать все города так, чтобы первый город оказался названным именем второго города, второй город оказался названным именем первого города, а король не заметил бы изменений?

(*А. А. Пахарев, М. Б. Скопенков, А. В. Устинов*)

11 класс (2 день)

1. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+$ $+bx+c$ с целыми коэффициентами и a, не кратным 2014, что все числа $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014? Ответ обоснуйте.

(*Фольклор, С. Б. Гашков*)

2. Найдите все такие a и b, что $|a|+|b|\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}$ и при всех x выполнено неравенство $|a\sin x+b\sin(2x)|\leqslant 1$.

(*С. Б. Гашков по мотивам С. Н. Бернштейна*)

3. Докажите, что для любого натурального n найдется натуральное число, десятичная запись квадрата которого начинается n единицами, а заканчивается какой-то комбинацией из n единиц и двоек. (*С. Б. Гашков*)

4. У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнает количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет? (*О. Н. Косухин*)

5. Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где i, j, k меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трех отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.

(*О. Н. Косухин*)

6 класс

1. *Ответ.* 6 детей.

Решение. Пусть Аня отдала половину грибов Вите. Теперь у всех ребят поровну грибов (это означает, что у Вити своих грибов не было). Чтобы Саша теперь получил все Анины грибы, ему надо забрать грибы у Вити и Ани. У него тогда будут грибы трех ребят — Вити, Ани и его собственные. Еще столько же будет у остальных, значит, с Витей, Аней и Сашей в лес ходило еще трое детей.

2. *Ответ.* Одно из возможных решений приведено на рис. 8.

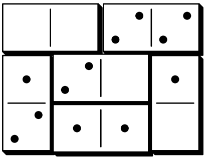

Рис. 8

Комментарий. Всего точек 12, значит, в каждой строчке будет по 4, а в каждом столбике по 3. Пустую доминошку и доминошку с четырьмя точками нельзя ставить вертикально, иначе в соответствующем столбике никак не получится трех точек. Поэтому их естественно расположить горизонтально в одной строчке. После этого нужный пример уже довольно просто нарисовать.

3. *Ответ.* а) 25 желтых одуванчиков; б) 9 белых одуванчиков.

Решение. а) Все одуванчики, которые позавчера были желтыми, стали белыми вчера или сегодня. Поэтому их было $14+11=25$.

б) Из вчерашних желтых одуванчиков 11 побелели сегодня, а остальные $20-11=9$ побелеют завтра.

4. *Ответ.* Одна из возможных фигур показана на рис. 9.

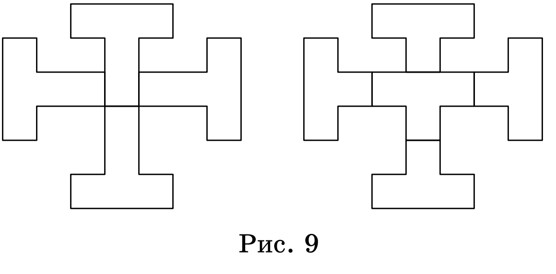

Рис. 9

Комментарий. Придумать такую фигуру можно было, заметив, что большая буква Т уже содержит в себе маленькую, а поэтому нужно взять четыре больших Т и соединить их «ножками» друг с другом так, чтобы лишние клеточки образовали недостающую пятую фигурку.

5. *Решение*. Понятно, что за одно надкусывание Маша справиться с задачей не сможет. Если Маша, например, попробовала пирожок с капустой, то она не в состоянии определить, какой именно из трех ей достался, а поэтому не сможет с уверенностью найти пирожок с вишней.

Покажем, как Маша справится с задачей за два надкусывания.

Пусть Маша надкусила пирожок, а он оказался не с вишней, а с капустой. Тогда она может попробовать пирожок, лежащий через один от него по часовой стрелке. Если это пирожок с вишней, то Маша добилась своего, если с рисом, то искомый пирожок между надкусанными, а если снова с капустой, то надо брать следующий по часовой стрелке, и это точно будет пирожок с вишней.

Если первый пирожок будет с рисом, Маша может действовать аналогично, но двигаться против часовой стрелки.

Комментарий. Подобным образом Маша может действовать и при большом числе «невкусных» пирожков. Пусть на блюде лежит N холодных пирожков с капустой, потом пирожок с вишней и снова N пирожков с рисом. Маша может заметить средний пирожок с капустой (а если N четно, то любой из двух средних) и запомнить, сколько пирожков от него надо отсчитать по часовой стрелке, чтобы взять пирожок с вишней. Когда пирожки согреются, Маша пробует один пирожок. Пусть ей не повезло, и он оказался с капустой. Маша тогда может представить себе, что она попробовала тот самый средний пирожок, и отсчитать от него сколько нужно. Если она и впрямь угадала, ей достанется вишня, если же нет, то она поймет, оказалась ли она ближе к желанному пирожку, чем выбранный средний, или дальше от него. В любом случае неопределенность уменьшилась вдвое: после одной пробы у Маши «под подозрением» осталось не больше половины пирожков с капустой.

Много интересного о задачах на количество информации можно узнать из книги К. А. Кнопа «Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам» (М., МЦНМО, 2013).

6. *Ответ*. Поезд № 392, вагон № 2.

Решение. Посмотрим на самую длинную телеграмму. Видно, что в правой и левой частях равенства в двух последних разрядах написано одно и то же: ЕТ – ОЙ. Это значит, что и в старших разрядах справа и слева будет одно и то же:

$$\text{СЕКР} - \text{ОТКР} = \text{ОТВ} - \text{ТВ}.$$

Теперь если выполнить вычитания, то и справа и слева сократятся по две буквы, то есть на концах будет по два нуля. Когда мы сократим на 100, получится вот что:

$$\text{СЕ} - \text{ОТ} = \text{О}.$$

Теперь посмотрим на последнюю телеграмму. Если записать ее как пример на сложение в столбик,

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} \text{О Т К Р Ы Т} \\ 2\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{array} \\ \hline \text{С Е К Р Е Т} \end{array}$$

то видно, что ОТ + 2 = СЕ. Сопоставив это с предыдущим равенством, мы понимаем, что О = 2, а тогда С = 3. Кроме того, при сложении произошел перенос из разряда единиц в разряд десятков, а поэтому Т = 8 или Т = 9. Однако если предположить, что Т = 8, то Е = 0, а тогда при сложении Ы + 1 = Е (то есть Ы + 1 = 0) неизбежно произошел бы перенос в следующий разряд. Но этого не было, значит, Т = 9. Мы узнали значения всех нужных букв.

Комментарий. Из решения следует также, что Е = 1 и Ы = = 0. Буквы К, Р, В, Й могут заменять любые четыре из пяти оставшихся цифр: 4, 5, 6, 7, 8, но номера поезда и вагона с ними не связаны.

7 класс

1. *Решение*. См. решения задачи 1 для 6 класса.

2. *Решение*. В треугольнике ABC углы A и C равны (как соответствующие углы равных бумажных треугольников); значит, его стороны AB и BC равны. Но и его стороны AB и AC равны (как соответствующие стороны равных бумажных треугольников); значит, треугольник ABC равносторонний.

Комментарии. 1. В решении никак не используется то, что бумажные треугольники имеют прямой угол, важно только то, что они равны.

2. Разумеется, так можно расположить не любые треугольники, а только треугольники с углом 60°.

3. *Ответ*. 1 8 3 + 1 8 3 9 − 8 = 2014
М А Т Е М А Т И К А

Комментарий. Чтобы найти решение (а также доказать его единственность), полезно задуматься над тем, какие из букв являются знаками действий.

Ясно, что это не может быть А (как последний символ выражения). Тогда между двумя первыми цифрами А должен стоять хотя бы один знак. Знак Т не может быть ни минусом, ни плюсом (даже МА + ЕМА + ИКА заведомо меньше 99 + 999 + 899 < < 2000). Небольшой перебор показывает, что (даже если считать, что выражение может начинаться со знака плюс или минус) М тоже не может быть знаком.

Остается случай, когда плюс — это Е, а еще где-то стоит минус. Выражение МАТ + МАТ − КА заведомо меньше 2000, поэтому минус — это не И, а К. Выражение МАТ + МАТИ − А равно МАТ · 11 + (И − А), поэтому МАТ · 11 = 2013 (другие числа, деляющиеся на 11, далеки от 2014) — это приводит к единственному ответу.

4. *Ответ*. 6 белых одуванчиков.

Решение. Распустившийся одуванчик бывает белым на четвертый и пятый день. Значит, в субботу будут белыми те одуванчики, которые распустились во вторник или среду. Определим, сколько их.

14 одуванчиков, которые были белыми в понедельник, к среде облетели, а 20 желтых заведомо дожили до среды (быть может, став белыми).

В среду на поляне было $15+11=26$ одуванчиков. Мы знаем, что 20 из них были на поляне еще в понедельник, а остальные $26-20=6$ как раз распустились во вторник и среду.

Комментарий. Нетрудно заметить, что число белых одуванчиков в понедельник никак на ответ не влияет.

5. *Ответ*. Наиболее длинный известный жюри замкнутый путь (24 диагонали) изображен на рис. 10. Есть ли более длинные пути, жюри неизвестно.

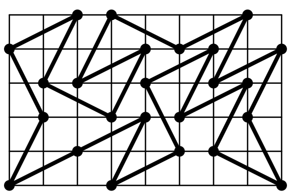

Рис. 10

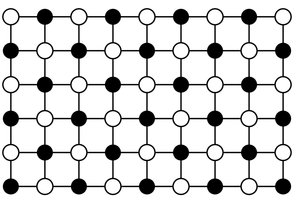

Рис. 11

Комментарии. 1. При первом взгляде на задачу может возникнуть подозрение, что путь длиннее 20 диагоналей нарисовать нельзя: «так как каждая диагональ занимает две клетки, всего их не больше $5\cdot 8:2=20$». Но в действительности прямоугольники, «занимаемые» разными диагоналями, могут пересекаться. Именно поэтому в примере выше так много острых углов.

2. Можно заметить, что любой путь, удовлетворяющий условию задачи, имеет четную длину. Действительно, если мы покрасим узлы сетки в шахматном порядке (см. рис. 11), то каждая диагональ («ход коня») соединяет узлы разных цветов; значит, чтобы закончить путь в том же узле, в котором он начинался, нужно сделать четное число ходов.

6. *Ответ.* Петя может выиграть.

Решение. Пускай Петя первым ходом заменит 2015 на 2014, а каждым следующим ходом будет уравнивать числа (он всегда может это сделать, повторив ход Васи с тем числом, которое Вася не менял):

$$
\begin{tikzcd}
(2014, 2015) \arrow[d, "п"'] & (2014, A) \arrow[d, "п"'] & (A, B) \arrow[d, "п"'] & \dots \\
(2014, 2014) \arrow[ur, "в"] & (A, A) \arrow[ur, "в"] & (B, B) \arrow[ur, "в"] &
\end{tikzcd}
$$

Если Петя будет действовать так всю игру, то, конечно, в некоторый момент Вася сделает из одного из двух одинаковых чисел однозначное и выиграет.

Но посмотрим на этот момент внимательнее. Если Вася выиграл, заменив одно из двух чисел X на однозначное, то перед этим, на ходу Пети, одно из двух чисел X на доске уже было. В этот момент Петя может заменить X на однозначное число и выиграть:

$$
\begin{tikzcd}
 & & (Y, \text{однозначное}) \\
 & (Y, X) \arrow[ur, "п"] \arrow[d, "п"', "\times" marking] & (X, \text{однозначное}) \\
(Y, Y) \arrow[ur, "в"] & (X, X) \arrow[ur, "в"] &
\end{tikzcd}
$$

(Петя может так пойти, потому что у него есть все возможности, которые были у Васи на последнем, выигрышном ходе: делить число X пополам, если оно четное, и вычитать из него его же цифру.)

Итак, сформулируем стратегию Пети полностью: «если одно из чисел можно заменить на однозначное — сделать это; в противном случае уравнять два числа».

8 класс

1. *Решение.* Подойдет, например,

$$\underbrace{1 + \ldots + 1 +}_{9\ \text{операций}} 1 \underbrace{\times 1 \times \ldots \times 1}_{9\ \text{операций}}.$$

Комментарий. Вообще можно любым образом расставить между 19 единицами 9 знаков «$+$» и 9 знаков «$\times$». Есть и другие решения.

2. *Ответ*. Да.

Решение. Подойдет, например, правильный шестиугольник (каждая из змеек состоит из двух противоположных сторон шестиугольника и трех диагоналей; змейки получаются друг из друга поворотами и симметриями шестиугольника).

Есть и примеры «по клеточкам» — скажем, изображенный на рис. 12.

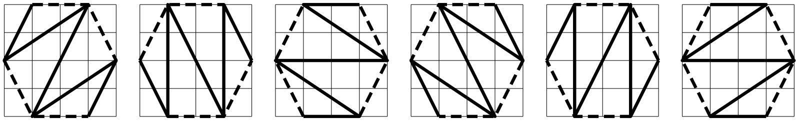

Рис. 12

3. *Решение*. Да, мог. Разбиение чисел от 7 до 2014 на пары «первое — с последним, второе — с предпоследним, и т. д.» дает четное число пар с суммой 2021. Ну а числа от 1 до 6 можно разбить как $(3+6)\cdot(2+4)\cdot(1+5)=3^2\cdot 6^2$.

4. *Первое решение*. Пусть продолжение перпендикуляра, опущеного на прямую BD из точки M, пересекает сторону AD в точке E (см. рис. 13). Мы хотим доказать, что прямые CE и BM перпендикулярны.

Обозначим через F точку пересечения прямых ME и BC и посмотрим на треугольник BDF: в нем высоты DC и FE

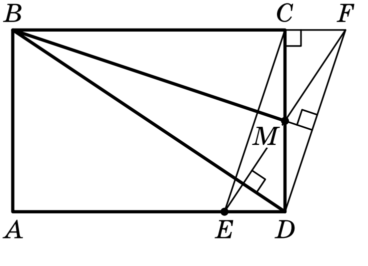

Рис. 13

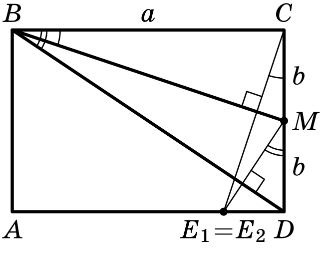

Рис. 14

пересекаются в точке M. Значит, и прямая BM является высотой этого треугольника, $BM \perp DF$.

Но четырехугольник $CFDE$ является параллелограммом (действительно, треугольники EMD и FMC равны по катету и острому углу, поэтому отрезки CF и ED равны и параллельны). Поэтому раз прямая BM перпендикулярна прямой DF, она перпендикулярна и прямой CE.

Второе решение. Пусть $BC = a$ и $CM = MD = b$. Пусть перпендикуляр, опущенный из C на BM, пересекает AD в точке E_1 (см. рис. 14). Из равенства углов $\angle E_1CD = \angle MBC$ следует равенство их тангенсов: $\frac{E_1D}{2b} = \frac{b}{a}$, откуда $E_1D = \frac{2b^2}{a}$. Аналогично, пусть перпендикуляр, опущенный из M на BD, пересекает AD в точке E_2. Из равенства углов $\angle E_2MD = \angle DBC$ следует равенство их тангенсов: $\frac{E_2D}{b} = \frac{2b}{a}$, откуда $E_2D = \frac{2b^2}{a}$. Итак, $E_1D = E_2D$, откуда $E_1 = E_2$.

Эти же соотношения можно объяснить, указывая на подобие треугольников: $\triangle E_1CD \sim \triangle MBC$ и $\triangle E_2MD \sim \triangle DBC$.

5. *Решение*. Докажем сначала, что башни высоты больше 2 строить бессмысленно.

Действительно, пусть какая-то из башен имеет высоту $h > 2$. Сбросим с нее верхний этаж, превратив его в новую башню высоты 1. Как после этого изменится сумма у инспектора? С укороченной нами башни теперь не видны башни высоты $h - 1$. Зато, так как $h > 2$, со всех этих башен (включая укороченную) стала видна новая башня. Значит, вся сумма увеличилась.

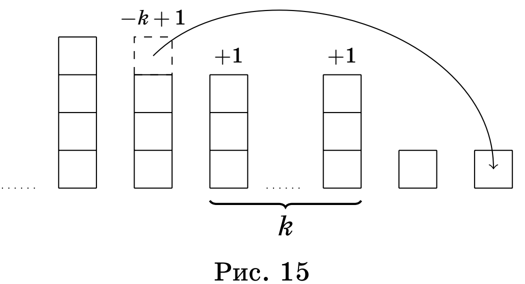

Рис. 15

Осталось изучить случай, в котором все башни имеют высоту 1 или 2. Если первых X, а вторых Y (по условию

$X+2Y=30$), то сумма у инспектора равна

$$XY=(30-2Y)Y=2Y(15-Y)=2(7{,}5^2-(Y-7{,}5)^2).$$

Для целых Y это выражение принимает максимальное значение при $Y=7$ и $Y=8$ и равно 112.

Ответ. Нужно построить либо 16 одноэтажных и 7 двухэтажных, либо 14 одноэтажных и 8 двухэтажных башен.

6. *Решение*. Прежде чем тратить деньги, подумаем.

Пусть l_1, l_2, l_3 — веса трех выделенных жирным (см. рис. 16) наклонных рядов, v_1, v_2, v_3 — веса трех вертикальных рядов. Тогда $l_1+l_2+l_3=v_1+v_2+v_3$: и то, и другое — это просто сумма весов всех девяти яблок. Но по меньшей мере пять из шести этих величин равны одной и той же величине t, значит, равны и все шесть (действительно, перенеся пять слагаемых, равных t, в одну часть, мы получаем, что и оставшаяся величина равна $3t-2t=t$).

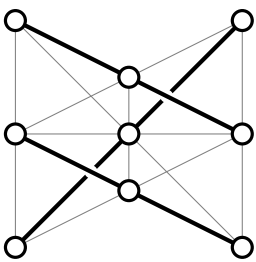

Рис. 16

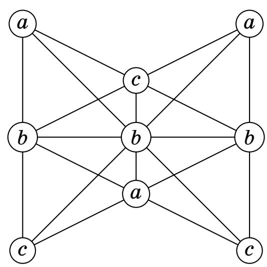

Рис. 17

Аналогичным образом получаем, что веса остальных трех наклонных рядов тоже равны t. Мы нашли девять рядов, веса которых равны. Значит, отличается вес оставшегося ряда, горизонтального.

Комментарий. Описанная ситуация действительно возможна — см. рис. 17 (подойдут любые a, b, c, такие, что $2b\neq a+c$; можно показать, что все примеры имеют такой вид).

9 класс

1. *Решение*. Пусть трехчлен ax^2+bx+c (a, b, c — нечетные числа) имеет корень вида $1/n$. Домножив равенство на

n^2, получаем $a+bn+cn^2=0$. Если n четно, то первое слагаемое нечетно, а следующие два четны, поэтому результат нечетный и нулем оказаться не может. Если же n нечетно, то все три слагаемых нечетны, и получаем аналогичное противоречие. Значит, корня вида $1/n$ у такого трехчлена не бывает.

Комментарий. Аналогично можно доказать, что у квадратного трехчлена с нечетными целыми коэффициентами вообще не бывает рациональных корней.

2. *Ответ.* 10.

Решение. Сначала покажем, что k, равного 10, нам хватит.

Способ 1. Будем идти вдоль ряда рубашек и считать отдельно белые и фиолетовые рубашки. Как только мы насчитаем 11 одноцветных — допустим, без ограничения общности, фиолетовых — рубашек, остановимся. Теперь снимем все белые рубашки, которые мы прошли (их не больше 10), и все фиолетовые рубашки, до которых мы еще не дошли (их ровно 10). При необходимости снимем еще несколько белых рубашек. Очевидно, что все 11 фиолетовых рубашек висят подряд (все белые рубашки, висевшие между ними, мы сняли). Оставшиеся белые рубашки тоже висят подряд: все оставшиеся фиолетовые рубашки мы сняли.

Способ 2. Встанем между 21-й и 22-й рубашкой, тогда слева и справа будет по 21 рубашке. Не умаляя общности, можно считать, что слева белых рубашек не больше, чем фиолетовых. Тогда слева не больше чем 10 белых рубашек, а справа не больше чем 10 фиолетовых (потому что их должно быть столько же, сколько белых слева). Снимем все белые рубашки слева и все фиолетовые рубашки справа. После этого все оставшиеся фиолетовые рубашки будут висеть слева, а все оставшиеся белые — справа. Если мы сняли $n<10$ рубашек какого-то цвета, то можно снять еще $10-n$ рубашек этого цвета — выполнение желаемого условия от этого не нарушится.

Теперь покажем, что рубашки могут висеть так, что меньшего k нам может не хватить.

Способ 1. Допустим, что рубашки висят в следующем порядке: сначала идут 10 белых рубашек, затем 21 фиолетовая и затем еще 11 белых. В этом случае после снятия $k < 10$ рубашек каждого цвета первой и последней рубашкой будут белые. Следовательно, белые рубашки не будут идти подряд.

Способ 2. Подходит также любой пример, в котором среди первых 21 рубашки есть 10 белых и 11 фиолетовых, а среди последних — наоборот: 11 белых и 10 фиолетовых. В этом случае после снятия $k < 10$ рубашек в левой и правой половинах останется хотя бы по одной рубашке каждого цвета. Следовательно, рубашки обоих цветов не могут идти подряд.

3. *Ответ*. 4.

Решение. Из трех палочек длин $a \leqslant b \leqslant c$ можно составить треугольник, если $a + b > c$. По теореме косинусов этот треугольник тупоугольный тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 < c^2$. Пусть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ — длины палочек. Предположим, что $n \geqslant 5$. Тогда

$$a_5^2 > a_4^2 + a_3^2 \geqslant 2a_3^2 > 2a_2^2 + 2a_1^2.$$

С другой стороны, по неравенству треугольника $a_5 < a_1 + a_2$. Возведем в квадрат (обе части неравенства положительны): $a_5^2 < a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$. Сравнив с предыдущим, получаем $a_1^2 + a_2^2 < 2a_1a_2$, что невозможно.

Пример для $n = 4$ можно построить следующим образом. Возьмем $a_1 = 1$ и $a_2 = 1$, выберем a_3 чуть больше, чем $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, а a_4 чуть больше, чем $\sqrt{a_2^2 + a_3^2}$. Например, подходят значения 1; 1; 1,5; 1,9.

4. *Первое решение*. Обозначим вершины квадрата-скатерти через A, B, C, D, а соответствующие «свисающие» треугольные куски как $\triangle_A$, $\triangle_B$, $\triangle_C$, $\triangle_D$. Заметим, что все эти треугольники подобны (в силу равенства углов). Обозначим через h_A высоту треугольника $\triangle_A$, опущенную из вершины A; аналогично обозначим h_B, h_C, h_D.

Пусть нам известно, что треугольники $\triangle_A$ и $\triangle_B$, заштрихованные на рис. 18, равны. Проведем через вершину A прямую l_A, перпендикулярную h_A; аналогично проведем прямые l_B, l_C, l_D. Пусть $P = l_A \cap l_B$, $Q = l_B \cap l_C$, $R = l_C \cap l_D$, $S = l_D \cap l_A$. Очевидно, что $PQRS$ — это прямоугольник, стороны которого содержат соответственно A, B, C, D. Заме-

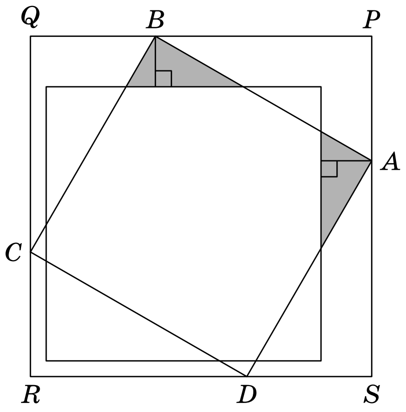

Рис. 18

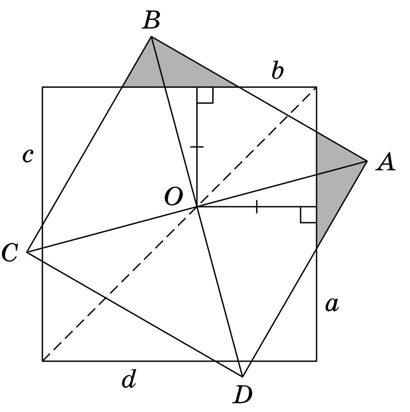

Рис. 19

тим, что это также и квадрат, так как прямоугольные треугольники APB, BQC, CRD и DSA равны (они подобны, а их гипотенузы — это различные стороны квадрата $ABCD$). Обозначим сторону полученного квадрата через $m = PQ = PS$, а сторону квадрата-стола через n. Заметим, что $m = h_A + n + h_C = h_B + n + h_D$. Так как из равенства $\triangle_A$ и $\triangle_B$ следует $h_A = h_B$, то мы получаем $h_C = h_D$. Тогда треугольники $\triangle_C$ и $\triangle_D$ подобны, а их соответствующие высоты равны. Следовательно, сами эти треугольники равны.

Второе решение. Воспользуемся обозначениями A, $\triangle_A$ и аналогичными из предыдущего решения. Обозначим центр квадрата-скатерти через O. Сторону квадрата-стола, которая содержит гипотенузу $\triangle_A$, обозначим через a; аналогично обозначим b, c, d (см. рис. 19).

Рассмотрим поворот на прямой угол, который переводит квадрат-скатерть в себя, A в B, а C в D. При этом повороте стороны скатерти перейдут в стороны скатерти, а потому и катеты треугольника $\triangle_A$ перейдут в катеты треугольника $\triangle_B$ (так как соответствующие катеты равны). Значит, и сам треугольник $\triangle_A$ перейдет в $\triangle_B$. Следовательно, прямая a перейдет в прямую b.

Это означает, что расстояния от O до двух сторон квадрата-стола, a и b, равны, то есть O лежит на диагонали квадрата-стола. Значит, и расстояния до двух других сторон, c и d, также равны. Следовательно, прямая c при повороте перейдет в прямую d. Тогда прямые, содержащие стороны треугольника $\triangle_C$, перейдут в прямые, содержащие соответствующие стороны $\triangle_D$. Отсюда следует, что $\triangle_C$ и $\triangle_D$ равны.

Комментарий. Первое решение можно изложить по-другому. Отрезки AC и BD равны и образуют равные углы с прямыми b и a соответственно. Следовательно, их проекции на прямые b и a соответственно равны. С другой стороны, первая проекция равна сумме h_A, h_C и стороны стола, а другая проекция равна сумме h_B, h_D и стороны стола. Значит, из равенства $h_A = h_B$ следует равенство $h_C = h_D$, откуда следует требуемое равенство треугольников.

5. *Ответ.* Да, такая тройка существует.

Решение. Будем искать пример в виде $C = 10^n$, $B = 1$, $A = 10^n - 1$.

Докажем сначала, что для любого натурального k существует n такое, что $10^n - 1$ кратно 3^{k+1}. Докажем это индукцией по k. База: $10^1 - 1$ кратно 3^2. Переход: если $10^n - 1$ кратно 3^{k+1}, то $10^{3n} - 1 = (10^n - 1)(10^{2n} + 10^n + 1)$ кратно 3^{k+2}, так как $10^{2n} + 10^n + 1$ делится на 3.

Возьмем теперь k такое, что $3^k > 10000$ и n такое, что $10^n - 1$ кратно 3^{k+1}. Тогда

$$\operatorname{rad}(ABC) = \operatorname{rad}(10^n(10^n - 1)) = \\ = 10 \cdot \operatorname{rad}(10^n - 1) \leqslant 10 \cdot \frac{10^n - 1}{3^k} < \frac{10^{n+1}}{10000} = \frac{C}{1000}.$$

Комментарии. 1. В доказательстве можно было воспользоваться теоремой Эйлера: так как $\varphi(3^{k+1}) = 2 \cdot 3^k$, то $10^{2\cdot 3^k} - 1$ кратно 3^{k+1}.

2. Знаменитая *ABC-гипотеза* (выдвинутая независимо Эстерле и Массером в 1980-х годах) состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая константа k, что для любых попарно взаимно простых чисел A, B, C, таких что $A + B = C$, имеет место неравенство $C < k \cdot \operatorname{rad}(ABC)^{1+\varepsilon}$.

Из ее справедливости следует целый ряд знаменитых утверждений теории чисел. Например, нетрудно видеть, что если ABC-гипотеза верна, то уравнение Ферма $x^n + y^n = z^n$ имеет лишь конечное число решений с $n > 2$.

Приведенная выше задача состоит, по существу, в том, что формулировку ABC-гипотезы нельзя усилить, заменив $1 + \varepsilon$ на 1.

Больше об ABC-гипотезе и ее следствиях можно узнать из лекции Д. О. Орлова на закрытии олимпиады или из видеозаписей лекций Д. О. Орлова [1] и К. Конрада [2] на Летней школе «Современная математика».

[1] www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=2338

[2] www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=7258

6. *Ответ*. Можно.

Решение. Десять кузнечиков разбивают окружность на 10 дуг. Покрасим эти дуги поочередно в черный и белый цвета (см. рис. 20). Изначально суммы длин черных и белых дуг равны, поскольку дуга, симметричная черной дуге относительно центра, — белая, и наоборот.

При каждом прыжке одна такая дуга отражается симметрично вдоль окружности относительно одного из ее концов (на рис. 21 дуга BC отражается относительно точки C). Значит, набор дуг одного с ней цвета останется прежним, поменяется лишь их расположение на окружности, т. е. суммарная длина дуг этого цвета не изменится. Значит, не меняется и суммарная длина дуг противоположного цвета.

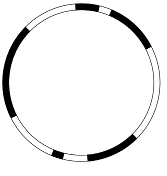

Рис. 20

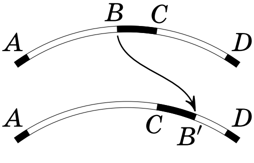

Рис. 21

Таким образом, после любого прыжка суммарная длина пяти дуг, взятых через одну, равна половине длины всей окружности.

Рассмотрим конечное расположение кузнечиков. Пусть десятый кузнечик находится в точке X, тогда сумма длин дуг $A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 + A_7A_8 + A_9X$ равна половине длины окружности. Но сумма длин дуг $A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 + A_7A_8 + A_9A_{10}$ также равна половине длины окружности, так как в этих точках кузнечики сидели вначале. Отсюда $A_9X = A_9A_{10}$ и, так как обе точки X и A_{10} лежат на дуге $A_9A_{10}A_1$, значит, $X = A_{10}$.

10 класс

1. *Решение.* По условию,

$$0 > f(c)f\left(\frac{1}{a}\right) = (ac^2 + bc + c)\left(a\frac{1}{a^2} + b\frac{1}{a} + c\right) = \frac{c}{a}(ac + b + 1)^2.$$

Следовательно, $\frac{c}{a} < 0$. Но по теореме Виета $\frac{c}{a}$ равно произведению корней $f(x)$, поэтому они разных знаков.

2. См. решение задачи 2 для 9 класса.

3. *Первое решение.* Проведем через M прямую, параллельную PQ, до пересечения со стороной BC в точке D (см. рис. 22). Тогда в треугольнике MDC отрезок PQ является средней линией и делит сторону DC пополам. Следовательно, в треугольнике ADC отрезок MQ — средняя линия, а значит, параллелен AD. Отсюда имеем равенство углов между параллельными прямыми $\angle ADM = \angle MQP$.

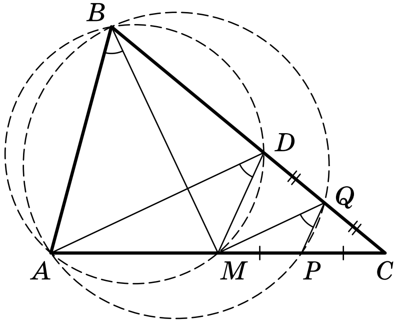

Рис. 22

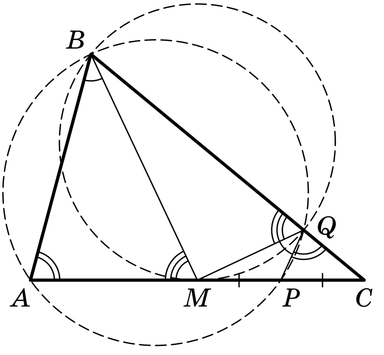

Рис. 23

Осталось заметить, что $\angle BAM = 180^\circ - \angle BQP = 180^\circ - \angle BDM$, откуда получаем вписанность четырехугольника $ABDM$ и, как следствие, равенство углов $\angle ABM = \angle ADM$.

Второе решение. Так как четырехугольник $ABQP$ вписан имеем равенство углов $\angle MAB = \angle PQC$ (см. рис. 23). Также по свойству степени точки имеем

$$CQ \cdot CB = CP \cdot CA = 4CP^2 = (2CP)^2 = CM^2.$$

Следовательно, CM является касательной к описанной окружности треугольника BMQ. Тогда по теореме об угле между хордой и касательной имеем равенство углов $\angle BQM = \angle BMA$.

Тогда $\angle ABM = 180^\circ - \angle BAM - \angle BMA = 180^\circ - \angle MQB - - \angle PQC = \angle MQP$, что и требовалось.

4. *Ответ*. Да, обязательно.

Первое решение. Проведем индукцию по произведению чисел на всех ребрах.

База: произведение равно единице. Это эквивалентно тому, что на каждой стрелке написано число 1. Тогда можно поставить и в каждой вершине число 1.

Переход: пусть произведение равно $n > 1$, и для всех меньших произведений утверждение уже доказано. Возьмем произвольный простой делитель n, обозначим его через p. Ясно, что p делит число на какой-то стрелке из точки A в точку B.

Докажем следующее утверждение: числа на всех стрелках, выходящих из A, делятся на p, или числа на всех стрелках, входящих в B, делятся на p. Пусть это не так. Тогда есть стрелка из A в C, число на которой не кратно p, и стрелка из D в B, число на которой не кратно p. Пройдем по замкнутому маршруту $A \to B \to D \to C \to A$. По условию, произведение чисел на стрелках AB и DC равно произведению чисел на стрелках DB и AC. Заметим, что первое из произведений кратно p, а второе — не кратно. Противоречие. Утверждение доказано.

Пусть вышло так, что все числа на всех стрелках из A кратны p. Поделим их все на p. Заметим, что расстановка чисел на стрелках все еще удовлетворяет условию. Действительно, в каждом замкнутом маршруте, проходящем через A ровно k раз, произведение чисел на стрелках по направлению движения и произведение чисел на стрелках против направления движения уменьшились ровно в p^k раз. Так как произведение чисел на стрелках при этой операции строго уменьшилось, можно воспользоваться предположением индукции и должным образом расставить числа в точках. После этого увеличим число в точке A в p раз. Получившаяся расстановка чисел решает исходную задачу. Случай, в котором числа на всех стрелках в B кратны p, разбирается полностью аналогично.

Второе решение. Для начала сделаем расстановку *рациональных* чисел в точках, удовлетворяющую условию. Выберем произвольную точку O и поставим в ней 1. Для любой другой точки X применим следующий алгоритм. Пройдем каким-нибудь путем от точки O до точки X и поставим в X произведение всех чисел на ребрах по направлению пути, деленное на произведение всех чисел на ребрах против направления пути. Из условия немедленно следует, что число, поставленное в вершину X, не зависит от выбора пути от O до X (проверьте!). После того как мы поставили в каждую точку по числу, обратим все числа, написанные в белых вершинах. Теперь число на каждой стрелке будет являться произведением чисел на ее концах.

Пронумеруем каждую белую точку и каждую черную точку. Пусть в i-й белой вершине записана несократимая дробь $\frac{a_i}{b_i}$, в j-й черной — несократимая дробь $\frac{c_j}{d_j}$. Так как произведение $\frac{a_i \cdot c_j}{b_i \cdot d_j}$ является целым для любой пары i, j, получаем, что $b_i \mid c_j$ и $d_j \mid a_i$ для каждой пары i и j. Пусть B — НОК всех b_i, а D — НОК всех d_j. Тогда B делит каждое c_j и D делит каждое a_i. Теперь поставим в i-й белой точке целое число $\frac{B \cdot a_i}{b_i \cdot D}$, а в j-й черной — целое число $\frac{D \cdot c_j}{d_j \cdot B}$. Ясно, что такая расстановка чисел в точках удовлетворяет требованиям.

5. *Ответ*. За 5 ходов.

Решение. Ясно, что за 4 хода Петя не сможет гарантированно выиграть. Действительно, если Вася закрасит первые две точки в первый цвет, а вторые две точки — во второй, то одноцветных треугольников не будет.

Покажем теперь, что за 5 ходов Петя гарантированно сможет выиграть. Для этого он будет действовать следующим образом. Первыми тремя ходами Петя отметит на плоскости точки, являющиеся вершинами треугольника ABC, подобного исходному. Заметим, что Вася либо покрасит все отмеченные точки в один цвет, тогда Петя уже победил, либо какие-то две в один цвет, а третью — в другой. Без ограничения общности будем считать, что вершины A и B покрашены в первый цвет, а вершина C — во второй. Тогда следующими двумя ходами Петя отмечает в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и точка C, точки P и Q такие, что $\triangle ABC \sim \triangle PAB \sim \triangle BQA$ (см. рис. 24). Тогда, если Вася покрасит хотя бы одну из точек P и Q в первый цвет, то образуется треугольник, подобный исходному, у которого все вершины будут покрашены в первый цвет. Если же Вася покрасит обе эти вершины во второй цвет, то образуется одноцветный треугольник CPQ, который также подобен исходному. Докажем это.

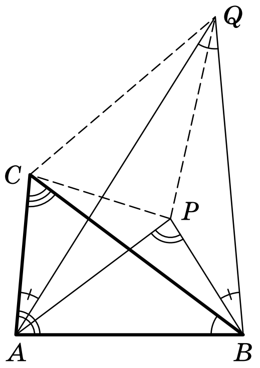

Рис. 24

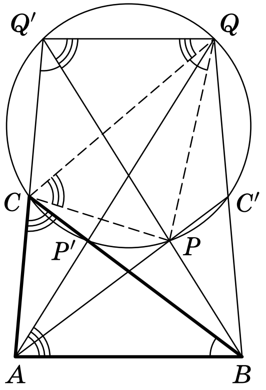

Рис. 25

П е р в ы й с п о с о б. Покажем, что треугольники CAQ и PBQ подобны. Действительно, из построения видно, что

$$\angle CAQ = \angle CAB - \angle QAB = \angle CAB - \angle ACB = \\ = \angle QBA - \angle PBA = \angle PBQ,$$

а также

$$\frac{AC}{AQ} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AQ} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AC}{CB} = \frac{BA}{BQ} \cdot \frac{BP}{BA} = \frac{BP}{BQ}.$$

Следовательно, эти треугольники подобны по второму признаку, причем коэффициент подобия равен $\frac{QB}{QA} = \frac{BA}{BC}$.

Значит,

$$\angle CQP = \angle CQA + \angle AQP = \angle CQA + \angle AQB - \angle PQB = \\ = \angle AQB = \angle CBA$$

и $\frac{QP}{QC} = \frac{BA}{BC}$, откуда имеем подобие $\triangle CQP \sim \triangle CBA$, что и требовалось.

В т о р о й с п о с о б. Отметим точки C', P' и Q', симметричные точкам C, P и Q относительно серединного перпендикуляра к AB соответственно (см. рис. 25). Покажем, что точки C, P, Q, C', P' и Q' лежат на одной окружности. Из равенств углов очевидно следует, что каждая тройка точек A, C, Q'; A, P', Q; A, P, C' и B, P', C; B, P, Q'; B, C', Q лежит на одной прямой. Имеем $\angle ACB = \angle QAB = \angle AQQ'$, откуда получаем, что четырехугольник $CQ'QP'$ вписан. Серединный перпендикуляр к QQ' совпадает с серединным перпендикуляром к AB и проходит через центр описанной окружности четырехугольника $CQ'QP'$. Значит, эта окружность симметрична относительно него, а следовательно, на ней лежат еще и точки C' и P.

Для завершения доказательства осталось заметить, что из того, что шестиугольник $Q'QC'PP'C$ вписанный, имеем $\angle ACB = \angle Q'BA = \angle BQ'Q = \angle PCQ$ и $\angle CBA = \angle BQ'A = \angle CQP$. Получаем подобие треугольников ABC и PQC по двум углам.

Комментарий. Для равнобедренного треугольника также хватает 5 ходов, а вот для равностороннего треугольника потребуется уже 6.

6. *Решение.* Так как $P(0) = 1$, то $P(x) - 1 = x \cdot S(x)$, где $S(x)$ — некоторый многочлен. Тогда многочлен

$$T(x) = (P(x)+1)^{100} + (P(x)-1)^{100} = \\ = (P(x)+1)^{100} + x^{100}S(x)^{100}$$

имеет такой же коэффициент перед x^{99}, что и многочлен $(P(x)+1)^{100}$. Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} T(x) &= (P(x)+1)^{100} + (P(x)-1)^{100} = \\ &= P(x)^{100} + C_{100}^1 P(x)^{99} + C_{100}^2 P(x)^{98} + \ldots + 1 + \\ &\qquad + P(x)^{100} - C_{100}^1 P(x)^{99} + C_{100}^2 P(x)^{98} - \ldots + 1 = \\ &= 2P(x)^{100} + 2C_{100}^2 P(x)^{98} + 2C_{100}^4 P(x)^{96} + \ldots + 2 = \\ &= 2(1 + x + x^{100}Q(x))^{50} + 2C_{100}^2 (1 + x + x^{100}Q(x))^{49} + \\ &\qquad + 2C_{100}^4 (1 + x + x^{100}Q(x))^{48} + \ldots + 2. \end{aligned}$$

Каждый из многочленов в последней сумме имеет коэффициент 0 перед x^{99}. Следовательно, многочлены $T(x)$ и $(P(x)+1)^{100}$ также имеют нулевой коэффициент перед x^{99}.

11 класс (1 день)

1. См. решение задачи 1 для 10 класса.

2. *Ответ.* $a=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Числа $\cos(x+a)$, $\cos(y+a)$, $\cos(z+a)$ образуют арифметическую прогрессию, значит,

$$2\cos(y+a)=\cos(x+a)+\cos(z+a),$$

$$2\cos y\cos a-2\sin y\sin a=$$
$$=\cos x\cos a-\sin x\sin a+\cos z\cos a-\sin z\sin a,$$

$$(2\cos y-\cos x-\cos z)\cos a=(2\sin y-\sin x-\sin z)\sin a.$$

По условию числа $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$ также образуют арифметическую прогрессию, значит, $2\cos y=\cos x+\cos z$ и поэтому левая часть этого равенства равна нулю. Следовательно, либо $\sin a=0$ и $a=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, либо $2\sin y=\sin x+\sin z$, т. е. числа $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ также образуют арифметическую прогрессию. Но в последнем случае точка с координатами $(\cos y, \sin y)$ является серединой отрезка с концами в точках $(\cos x, \sin x)$, $(\cos z, \sin z)$ и при этом все три точки лежат на единичной окружности с центром в начале координат, что невозможно. Для $a=\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$, подходящим примером являются числа $x=0$, $y=\pi/2$, $z=\pi$.

3. *Решение.* а) Заметим, что $\angle CDA=\angle ABC$ как противоположные углы параллелограмма. Тогда $\angle CDA+\angle POC=$ $=\angle AOP+\angle POC=180^\circ$. Следовательно, точки P, O, C и D лежат на одной окружности (см. рис. 26). Аналогично, точки Q, O, A и D лежат на одной окружности. По теореме об отрезках секущих имеем $CQ\cdot CD=CO\cdot CA=AO\cdot AC=$ $=AP\cdot AD$. Отсюда получаем, что $AP:CQ=CD:AD=BA:BC$. Следовательно, треугольники BAP и BCQ подобны по равным углам $\angle BAP=\angle BCQ$ и пропорциональным сторонам $BA:BC=AP:CQ$. Значит, $\angle ABP=\angle CBQ$.

б) Заметим, что $\angle OAQ=\angle ODQ$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу OQ. Аналогично, $\angle OCP=\angle ODP$. Пусть R — точка пересечения AQ и CP. Тогда $\angle ABC+\angle ARC=$

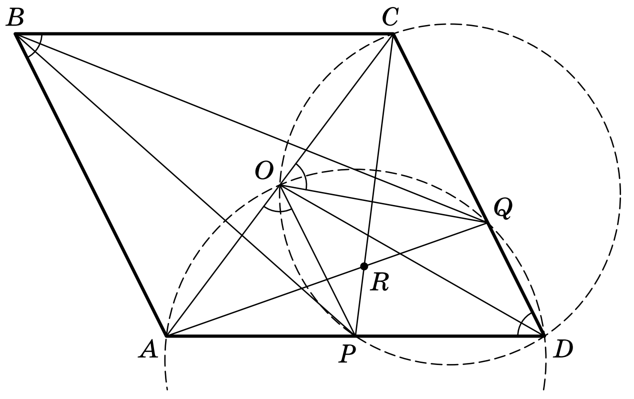

Рис. 26

$= \angle ADC + \angle ARC = \angle ODP + \angle ODQ + \angle ARC = \angle OCP + \angle OAQ + \angle ARC = 180^\circ$. Следовательно, точки A, B, C и R лежат на одной окружности.

4. *Ответ*. 5.

Решение. Покажем, что условия задачи выполнены, если исправными остались кнопки с цифрами 0, 1, 3, 4, 5. Действительно, любая цифра от 0 до 9 может быть представлена в виде суммы некоторых двух «рабочих» цифр. Пусть число от 1 до 99 999 999, которое мы хотим получить, состоит из цифр a_1, a_2, ..., a_8 (некоторые из них, в том числе и первые, могут быть нулевыми). Представим каждую из них в виде суммы двух «рабочих» цифр: $a_1 = b_1 + c_1$, $a_2 = b_2 + c_2$, ..., $a_8 = b_8 + c_8$. Тогда число, составленное из «рабочих» цифр b_1, b_2, ..., b_8, и число, составленное из «рабочих» цифр c_1, c_2, ..., c_8, дают в сумме желаемое число.

Предположим, что добиться желаемого можно для некоторого набора из четырех или меньше «рабочих» цифр. Пусть a — какая-либо из цифр 0, 1, 2, ..., 9. Среди чисел от 1 до 99 999 999 найдется такое, которое заканчивается на a и содержит в своей десятичной записи нерабочие цифры. Тогда это число можно представить в виде суммы двух чисел, в записи которых содержатся только рабочие цифры. Поэтому для любой цифры a от 0 до 9 найдутся такие две «рабочие» цифры (возможно, совпадающие), что их сумма оканчивается на a. С другой стороны, нетрудно видеть, что среди всех сумм пар «рабочих» цифр может быть не более четырех нечетных чисел. Поэтому какая-то из цифр 1, 3, 5, 7 или 9 не встречается в конце таких сумм. Пришли к противоречию с предположением.

5. См. решение задачи 6 для 10 класса.

6. *Ответ*. Не всегда верно.

Решение. Пусть города королевства расположены и соединены железными дорогами так, как указано на рис. 27.

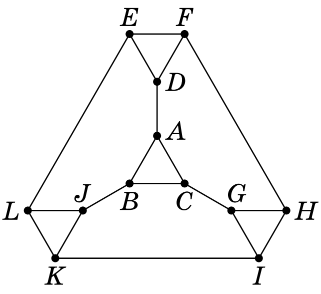

Рис. 27

Тогда условие задачи выполнено. Действительно, можно представить, что на рисунке изображен многогранник с равными ребрами, который получается из правильного тетраэдра отсечением четырех его вершин плоскостями. Тогда для любой упорядоченной пары его вершин можно совершить такое движение этого многогранника, при котором вторая вершина пары перейдет в первую ее вершину и все вершины многогранника поменяются местами. Соответствующее такому движению переименование городов останется незамеченным королем, так как любые два города с новыми названиями будут соединены железной дорогой тогда и только тогда, когда такой дорогой были соединены города, прежде носившие эти имена.

Рассмотрим такое переименование всех городов, при котором города B и D поменялись именами. Покажем, что в этом случае король обязательно заметит изменения. Действительно, если город A изменил свое название, то король обязательно заметит изменения, ведь единственный город, который был соединен дорогой и с B, и с D, теперь называется иначе. Если же город A не изменил свое имя, то новый город C теперь не будет соединен и с городом A, и с новым городом B, ведь новый город B раньше был городом D, а городов, соединенных и с A, и с D, не было. В этом случае король также заметит изменения.

1. *Ответ*. Существует.

Решение. Пусть $f(x) = 1007x^2 + 1008x$. Тогда

$$f(x) = 1007x(x+1) + x.$$

Поскольку произведение $x(x+1)$ является четным числом при всех натуральных x, то $1007x(x+1)$ делится на 2014 при всех таких x. Следовательно, $f(x)$ дает такой же остаток при делении на 2014, как и x. Значит, все числа $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014.

2. *Ответ*. $a = \pm\frac{4}{3\sqrt{3}}$, $b = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Решение. Рассмотрим случай, когда числа a и b имеют один знак. В этом случае $|a| + |b| = |a+b|$. Пусть $x = \frac{\pi}{3}$. Тогда

$$2x = \frac{2\pi}{3}, \quad \sin x = \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и

$$1 \geqslant |a \sin x + b \sin 2x| = |a+b|\frac{\sqrt{3}}{2} = (|a| + |b|)\frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant 1.$$

Отсюда получаем, что $|a| + |b| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, а в точке $x = \frac{\pi}{3}$ функция $f(x) = a \sin x + b \sin 2x$ принимает либо свое наибольшее значение 1, либо свое наименьшее значение -1. Значит, точка $x = \frac{\pi}{3}$ является точкой экстремума для функции $f(x)$ и $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Имеем

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \cos \frac{\pi}{3} + 2b \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{a - 2b}{2} = 0.$$

Следовательно, $a = 2b$. Учитывая равенство $|a| + |b| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, получаем, что возможны лишь два варианта:

$$a = \frac{4}{3\sqrt{3}},\ b = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \text{или} \quad a = -\frac{4}{3\sqrt{3}},\ b = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда числа a и b имеют разные знаки. В этом случае $|a| + |b| = |a - b|$. Пусть $x = \frac{2\pi}{3}$. Тогда

$$2x = \frac{4\pi}{3}, \quad \sin x = -\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и

$$1 \geqslant |a \sin x + b \sin 2x| = |a-b|\frac{\sqrt{3}}{2} = (|a|+|b|)\frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant 1.$$

Отсюда получаем, что $|a|+|b| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, а в точке $x = \frac{2\pi}{3}$ функция $f(x) = a \sin x + b \sin 2x$ принимает либо свое наибольшее значение 1, либо свое наименьшее значение -1. Значит, точка $x = \frac{2\pi}{3}$ является точкой экстремума для функции $f(x)$ и $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$. Имеем

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a \cos \frac{2\pi}{3} + 2b \cos \frac{4\pi}{3} = \frac{-a-2b}{2} = 0.$$

Следовательно, $a = -2b$. Учитывая равенство $|a|+|b| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, получаем, что возможны лишь два варианта:

$$a = \frac{4}{3\sqrt{3}},\ b = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \text{или} \quad a = -\frac{4}{3\sqrt{3}},\ b = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Проверим, что четыре найденные пары значений $a = \pm\frac{4}{3\sqrt{3}}$, $b = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$ удовлетворяют условию задачи. Действительно, $|a|+|b| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Функция $f(x)$ принимает свои наибольшие и наименьшие значения в таких точках x, для которых $f'(x) = 0$. Найдем такие x. Имеем

$$f'(x) = a \cos x + 2b \cos 2x = a(\cos x \pm \cos 2x) = 0,$$

где знак в скобках выбирается положительным, если a и b одного знака, и отрицательным иначе. Следовательно, во всех точках экстремума функции $f(x)$ имеем $|\cos x| = |\cos 2x|$. Значит, при таких x выполнено также равенство $|\sin x| = |\sin 2x|$. Отсюда

$$|\sin x| = 2|\sin x||\cos x|$$

и либо $\sin x = 0$, либо $|\cos x| = \frac{1}{2}$. В первом случае $f(x) = 0$, во втором $|\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\sin 2x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и

$$|f(x)| \leqslant |a|\frac{\sqrt{3}}{2} + |b|\frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$$

Таким образом, во всех точках экстремума функции $f(x)$, а следовательно, и во всех вообще точках x, имеем $|f(x)| \leqslant 1$.

3. *Решение*. Покажем сначала с помощью метода математической индукции, что для любого натурального n найдется такое натуральное m_n, что его десятичная запись оканчивается на единицу, а десятичная запись числа m_n^2 оканчивается на комбинацию из n единиц и двоек.

При $n=1$ в качестве m_1 можно взять число 1. Предположим, что для $n=k$ доказано, что найдется число m_k с указанными свойствами. Тогда рассмотрим числа вида $p_a = m_k + a \cdot 10^k$, где $a = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Десятичная запись каждого из них оканчивается на 1. Кроме того, имеем

$$p_a^2 = (m_k + a \cdot 10^k)^2 = m_k^2 + 2am_k \cdot 10^k + a^2 \cdot 10^{2k}.$$

Посмотрим на последние $k+1$ цифр десятичной записи каждого из слагаемых этой суммы.

По предположению индукции десятичная запись числа m_k^2 оканчивается на комбинацию из k единиц и двоек. Обозначим через b $(k+1)$-ю с конца цифру числа m_k^2. Нетрудно видеть, что десятичная запись $2am_k \cdot 10^k$ оканчивается на k нулей, перед которыми идет последняя цифра числа $2a$ (так как m_k оканчивается на единицу). Десятичная же запись слагаемого $a^2 \cdot 10^{2k}$ оканчивается на $2k$ нулей. Следовательно, последние k цифр десятичной записи чисел p_a^2 совпадают с последними k цифрами десятичной записи числа m_k^2. При этом $(k+1)$-я с конца цифра числа p_a^2 совпадает с последней цифрой суммы $b+2a$. Если b нечетно, то для некоторого a сумма $b+2a$ оканчивается на единицу. Если b четно, то для некоторого a сумма $b+2a$ оканчивается на двойку. Следовательно, одно из чисел p_a можно взять в качестве числа m_{k+1}.

Покажем теперь, что для любого натурального n найдется такое натуральное p_n, десятичная запись квадрата которого начинается на n единиц. Пусть $c_n = 11\ldots1 \cdot 10^{4n}$, где первый множитель записывается n единицами, и $d_n = c_n + 10^{4n}$. Тогда

$$\sqrt{d_n} - \sqrt{c_n} = \frac{d_n - c_n}{\sqrt{d_n} + \sqrt{c_n}} = \frac{10^{4n}}{\sqrt{d_n} + \sqrt{c_n}} > \frac{10^{4n}}{2 \cdot 10^{3n}} > 1.$$

Следовательно, найдется такое натуральное число, которое не меньше $\sqrt{c_n}$, но меньше $\sqrt{d_n}$. Десятичная запись квадрата такого числа начинается на n единиц.

Рассмотрим число $p_n \cdot 10^k + m_n$, где k больше, чем количество цифр в десятичных записях чисел $2p_nm_n$ и m_n^2. Тогда первые n цифр десятичной записи числа

$$(p_n \cdot 10^k + m_n)^2 = p_n^2 \cdot 10^{2k} + 2p_nm_n \cdot 10^k + m_n^2$$

совпадают с первыми n цифрами десятичной записи числа p_n^2, а последние n цифр — с последними цифрами десятичной записи числа m_n^2. Следовательно, число $p_n \cdot 10^k + m_n$ удовлетворяет условию задачи.

4. *Ответ*. Сможет.

Решение. Пусть дежурства проходили по такой схеме: первые девять поварят сначала дежурили поодиночке, а затем дежурили все возможные пары из этих поварят. Так как из 9 поварят всего можно выбрать 36 пар, то на такое дежурство ушло ровно $9 + 36 = 45$ рабочих дней.

Покажем теперь, как повар сможет определить, кто из поварят дружит между собой, а кто нет. Если оба интересующих нас поваренка A и B были среди первых девяти, то посмотрим на количества пропавших пирожных в такие три дня: когда дежурил A, когда дежурил B и когда A и B дежурили вместе. Поварята A и B не дружат между собой тогда и только тогда, когда количество пирожных, пропавших в третий день, равно сумме количеств пирожных, пропавших в первый и второй дни.

Если теперь мы хотим выяснить, дружат ли между собой поваренок A из первых девяти поварят и десятый поваренок B, то из количества пропавших пирожных в день одиночного дежурства A вычтем количество его друзей среди первых девяти поварят (это количество мы можем определить как указано выше). Если при этом получится ноль, то A и B не дружат между собой, иначе — дружат.

5. *Решение*. Пусть A, B и C — середины отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 соответственно. Для доказательства утверждения задачи покажем, что векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ компланарны.

Пусть P_1, P_2, ..., P_8 — точки касания сферы из условия задачи с гранями многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$, а S_1, S_2, ..., S_8 — площади соответствующих граней. Обозначим через R радиус этой сферы. Сформулируем и докажем два вспомогательных утверждения.

Утверждение 1. $S_1 \cdot \overrightarrow{OP_1} + S_2 \cdot \overrightarrow{OP_2} + \ldots + S_8 \cdot \overrightarrow{OP_8} = \vec{0}$.

Доказательство утверждения 1. Пусть $\vec{u}$ — произвольный единичный вектор, а натуральное число q меняется от 1 до 8. Тогда $S_q \cdot \overrightarrow{OP_q} \cdot \vec{u} = R \cdot S_q \cos \alpha_q$, где α_q — угол между векторами $\vec{u}$ и $\overrightarrow{OP_q}$. Число $S_q \cos \alpha_q$ по модулю равно площади ортогональной проекции q-й грани многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ на плоскость π, ортогональную вектору $\vec{u}$, имеет знак «$-$», если векторы $\vec{u}$ и $\overrightarrow{OP_q}$ образуют тупой угол, и знак «$+$» иначе.

Следовательно, скалярное произведение вектора

$$\vec{w} = S_1 \cdot \overrightarrow{OP_1} + S_2 \cdot \overrightarrow{OP_2} + \ldots + S_8 \cdot \overrightarrow{OP_8}$$

на вектор $\vec{u}$ равно $R \cdot S$, где S — сумма площадей проекций всех граней многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ на плоскость π, в которой каждая из этих площадей берется со знаком «$+$» или «$-$» в зависимости от того, острый или тупой угол образуют векторы $\vec{u}$ и $\overrightarrow{OP_q}$.

Примем направление вектора $\vec{u}$ за направление «вверх». Каждая точка внутри ортогональной проекции многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ на плоскость π дважды покроется проекциями его граней на эту плоскость: один раз проекцией «верхней» грани и один раз «нижней». Площади этих двух проекций брались в сумме S с разными знаками: «$+$» и «$-$» соответственно. Поэтому площадь проекции многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ на плоскость π равна сумме площадей проекций всех его «верхних» граней. Она также равна сумме площадей проекций всех его «нижних» граней, а S равно разности этих сумм, то есть равно нулю.

Следовательно, скалярное произведение вектора $\vec{w}$ на произвольный единичный вектор $\vec{u}$ равно нулю. Значит, сам вектор $\vec{w}$ равен нулю.

Утверждение 2. При всех $q = 1, 2, \ldots, 8$ имеет место равенство $S_q \cdot \overrightarrow{OP_q} = S_{q,1} \cdot \overrightarrow{OA_i} + S_{q,2} \cdot \overrightarrow{OB_j} + S_{q,3} \cdot \overrightarrow{OC_k}$, где P_q — точка касания сферы с гранью $A_iB_jC_k$, $S_{q,1}$, $S_{q,2}$ и $S_{q,3}$ — площади треугольников $P_qB_jC_k$, $A_iP_qC_k$ и $A_iB_jP_q$ соответственно.

Доказательство утверждения 2. Имеем

$$S_q \cdot \overrightarrow{OP_q} = S_{q,1} \cdot \overrightarrow{OP_q} + S_{q,2} \cdot \overrightarrow{OP_q} + S_{q,3} \cdot \overrightarrow{OP_q} = \\ = (S_{q,1} \cdot \overrightarrow{OA_i} + S_{q,2} \cdot \overrightarrow{OB_j} + S_{q,3} \cdot \overrightarrow{OC_k}) + \\ + (S_{q,1} \cdot \overrightarrow{A_iP_q} + S_{q,2} \cdot \overrightarrow{B_jP_q} + S_{q,3} \cdot \overrightarrow{C_kP_q}).$$

Покажем, что сумма векторов во второй скобке равна $\vec{0}$. Для этого рассмотрим ее проекцию на прямую, перпендикулярную к A_iP_q. Вектор $S_{q,1} \cdot \overrightarrow{A_iP_q}$ спроектируется в нулевой вектор, проекция вектора $S_{q,2} \cdot \overrightarrow{B_jP_q}$ будет равна вектору $S_{q,2} \cdot \overrightarrow{B_jL}$, а проекция вектора $S_{q,3} \cdot \overrightarrow{C_kP_q}$ будет равна вектору $S_{q,3} \cdot \overrightarrow{C_kK}$ (см. рис. 28). Площади $S_{q,2}$ и $S_{q,3}$ относятся как

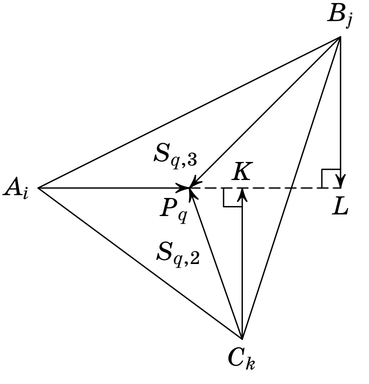

Рис. 28

высоты C_kK и B_jL соответствующих треугольников с общим основанием. Следовательно, $S_{q,2} \cdot B_jL = S_{q,3} \cdot C_kK$. Значит, векторы $S_{q,2} \cdot \overrightarrow{B_jL}$ и $S_{q,3} \cdot \overrightarrow{C_kK}$ противоположны. Отсюда получаем, что сумма $S_{q,1} \cdot \overrightarrow{A_iP_q} + S_{q,2} \cdot \overrightarrow{B_jP_q} + S_{q,3} \cdot \overrightarrow{C_kP_q}$ параллельна прямой A_iP_q. Аналогично доказывается, что эта сумма параллельна прямым B_jP_q и C_kP_q. Таким образом, эта сумма равна нулевому вектору. Утверждение 2 доказано.

По утверждению 1 имеем

$$\vec{w} = S_1 \cdot \overrightarrow{OP_1} + S_2 \cdot \overrightarrow{OP_2} + \ldots + S_8 \cdot \overrightarrow{OP_8} = \vec{0}.$$

С помощью утверждения 2 преобразуем каждое слагаемое этой суммы в сумму вида $S_{q,1} \cdot \overrightarrow{OA_i} + S_{q,2} \cdot \overrightarrow{OB_j} + S_{q,3} \cdot \overrightarrow{OC_k}$, а затем сгруппируем коэффициенты при одинаковых векторах. Получим равенство

$$\vec{w} = k_1\overrightarrow{OA_1} + k_2\overrightarrow{OA_2} + l_1\overrightarrow{OB_1} + l_2\overrightarrow{OB_2} + m_1\overrightarrow{OC_1} + m_2\overrightarrow{OC_2} = \vec{0},$$

где k_1 — сумма площадей треугольников $P_qB_jC_k$, лежащих в одной плоскости с точкой A_1, аналогично определяются остальные коэффициенты. Заметим, что $k_1 = k_2$, ведь любые два треугольника вида $P_qB_jC_k$ с общей стороной B_jC_k симметричны друг другу относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре B_jC_k. Аналогично доказываются равенства $l_1 = l_2$ и $m_1 = m_2$. Отсюда получаем

$$\vec{w} = k_1(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}) + l_1(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2}) + m_1(\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2}) = \\ = 2k_1\overrightarrow{OA} + 2l_1\overrightarrow{OB} + 2m_1\overrightarrow{OC} = \vec{0},$$

где k_1, l_1, m_1 — положительные числа. Следовательно, векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ компланарны, а точки O, A, B и C лежат в одной плоскости.

Комментарий. Эта задача является трехмерным аналогом известной планиметрической теоремы Ньютона: *во всяком описанном четырехугольнике середины двух диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.*

6 класс (*1963 работы*)

	1	2	3а	3б	4	5	6
0	1077	978	1169	1322	822	1491	1550
1	201	29	238	95	10	177	138
2	168	1	187	145	1	30	125
3	72	5	369	401	3	7	31
4	445	950			13	19	30
5					33	32	8
6					1081	156	9
7						51	17
8							8
9							47

7 класс (*1496 работ*)

	1	2	3	4	5	6
0	668	700	1046	1165	498	1400
1	148	7	4	65	0	14
2	176	362	39	6	354	3
3	504	10	7	12	0	2
4		417	1	15	417	2
5			4	33	0	0
6			395	200	170	25
7					0	0
8					57	50

8 класс (*721 работа*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	558	102	52	31	11	15
$\pm$	76	23	0	0	4	0
$\mp$	6	7	4	3	190	17
$-$	70	429	395	324	408	448
0	11	160	270	363	108	241

9 класс (*567 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	131	77	56	25	8	3
$\pm$	19	59	25	5	2	0
$\mp$	11	52	15	5	0	0
$-$	289	285	269	364	251	210
0	117	94	202	168	306	354

10 класс (*550 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	256	113	71	16	1	2
$\pm$	15	17	4	5	0	0
$+/2$	0	35	1	5	3	0
$\mp$	34	54	5	30	16	1
$-$	159	259	251	248	233	108
0	86	72	218	246	297	439

11 класс, первый день (*588 работ*)

	1	2	3а	3б	4	5	6
$+$	341	85	181	74	36	3	1
$\pm$	23	33	13	2	32	0	1
$\mp$	29	119	26	5	140	579	585
$-$	195	351	368	507	380	579	585

11 класс, второй день (*202 работы*)

	1	2	3	4	5
$+$	52	6	7	66	0
$\pm$	10	2	3	16	0
$+/2$	0	0	0	0	3
$\mp$	5	26	8	16	0
$-$	135	168	184	104	199

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. На факультете действуют научные школы, возглавляемые учеными самого высокого класса. Учебные планы факультета охватывают все современные направления математики и механики. Диплом механико-математического факультета признан во всем мире. Выпускники факультета трудятся во всех крупных научно-исследовательских центрах, учебных и иных учреждениях, не обязательно непосредственно связанных с математикой и механикой. На мехмате учат не столько рецептам решения конкретных задач, сколько умению думать самостоятельно, а также извлекать знания из разных источников. Именно это позволяет выпускникам факультета быстро включаться и быть эффективными практически в любой иной сфере деятельности — от компьютерной или финансовой до управления производством и политики.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ВШЭ

Факультет математики — небольшой молодой математический факультет, ориентированный на исследования. Преподают на факультете ведущие математики Москвы, активно разрабатывающие собственные направления. Особенное внимание уделяется современным направлениям в алгебре, топологии, алгебраической геометрии, математической физике. Студенты факультета получают широкую базовую математическую подготовку. Это даст выпускникам свободу выбора последующей специализации, а приобретенные исследовательские навыки пригодятся вне зависимости от специальности.

По окончании программы бакалавриата выпускники смогут совершенствоваться в магистратуре и аспирантуре факультета математики, а также других факультетов ВШЭ и других ведущих вузов России и мира.

Высшая школа экономики — государственный университет. Студенты получают отсрочку от призыва в вооруженные силы. В университете имеется военная кафедра. Иногородние студенты обеспечиваются общежитием.

Подробную информацию о факультете и преподавателях см. на сайте math.hse.ru.

Вопросы задавайте по электронной почте math@hse.ru.

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru
www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ
www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях. Приглашаем совершить познавательные экскурсии по красивым математическим задачам. Их постановка понятна школьнику, но до сих пор некоторые задачи не решены учеными.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»
www.problems.ru

Все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.) размещены на сайте www.problems.ru

Первые научно-популярные журналы начали выходить в России более двух веков назад. На их статьях выросло не одно поколение российских ученых, инженеров, просто думающих и читающих людей самых разных родов занятий. Сейчас старые номера этих журналов доступны читателям лишь в ничтожном числе библиотек. Электронные архивы призваны сделать их материалы доступными для широкой аудитории.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (1886—1917)

vofem.ru

журнал, фактически заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год его существования вышло 674 выпуска В.О.Ф.Э.М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое. Среди постоянных рубрик журнала были, например: «Статьи, посвященные вопросам преподавания математики и физики», «Опыты и приборы», «Математические мелочи», «Библиографический отдел».

Статьи составлялись настолько популярно, насколько это возможно без ущерба для научной стороны дела.

ЖУРНАЛ «ПРИРОДА» (1912—)

priroda.ras.ru

Ежемесячный научно-популярный журнал Российской академии наук (РАН) «Природа» — одно из старейших в России изданий. Первый номер этого журнала вышел в 1912 году.

Фактически перед вами огромная энциклопедия по естественным наукам, составленная и регулярно пополнявшаяся отечественными учеными на протяжении 100 лет.

ЖУРНАЛ «КВАНТ» (1970—)

kvant.ras.ru

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

ДВЕНАДЦАТАЯ ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 8—11 КЛАССОВ

состоится 13 апреля 2014 года

Олимпиада рассчитана на школьников, успешно выступающих в городских математических олимпиадах, а также на школьников, увлекающихся геометрией.

Олимпиада по геометрии проводится в рамках Девятой Всероссийской олимпиады по геометрии памяти И. Ф. Шарыгина. В ней могут принять участие школьники 8—11 классов. Призеры олимпиады будут награждены дипломами оргкомитета и математической литературой. Победители олимпиады — учащиеся 8—10 классов — будут приглашены на финальный тур Всероссийской олимпиады по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, который состоится в июле 2014 года в г. Дубне под Москвой.

Для участия в олимпиаде необходима предварительная регистрация. Подробности на сайте

olympiads.mccme.ru/ustn

ВЫЕЗДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

Подробную оперативную информацию о выездных математических и околоматематических школах смотрите на странице www.mccme.ru/leto

Четырнадцатая летняя школа
«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

пройдет с 19 по 30 июля 2014 года в Дубне (на базе санатория-профилактория «Ратмино») для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс).

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, присылайте в Оргкомитет до 10 мая заполненную анкету участника. (Персонально приглашаются на школу обладатели дипломов I—II степени в параллели 10 и 11 классов на этой или предыдущей ММО.)

Председатель научного комитета школы — профессор А. Б. Сосинский.

Предварительное согласие провести занятия на школе дали академик РАН В. А. Васильев, чл.-корр. РАН Д. О. Орлов, А. А. Разборов и И. А. Панин, проф. А. Б. Сосинский, В. М. Тихомиров, И. В. Аржанцев, М. Э. Казарян, С. К. Ландо, А. М. Райгородский, Г. Б. Шабат, а также Г. Ю. Панина, М. А. Берштейн, В. А. Клепцын, А. Г. Кузнецов, М. А. Раскин, И. В. Ященко и другие.

Материалы прошедших школ и информационное сообщение о школе-2014 смотрите на сайте

`www.mccme.ru/dubna`

Контактный e-mail оргкомитета: `dubna@mccme.ru`

ИНФОРМАЦИЯ О НАБОРЕ
в московские специализированные школы и классы
на 2014/2015 учебный год

Школа	Телефон, URL	Адрес	Классы	Сроки
2	www.sch2.ru koval-dji@yandex.ru	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	6—8 физ.-мат.; добор в 9, 10 физ.-мат.	март-май
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25 moscowschool54.ru	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	8 матем.; добор в 9 и 10 матем.	февраль-май
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58 sch57.msk.ru	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8 матем., 9 матем., гум., био.	март-апрель апрель-май
179	(495) 692-48-51 www.179.ru	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	6 изобр., 7, 8, 9 матем., 9 биол.	март
192	(499) 137-33-55 (499) 137-72-85 www.sch192.ru	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.»)	5 ест.-науч., 7 био.-хим. и физ.-мат., 9 физ.-хим.; добор в 8—10	апрель-май
218	(499) 976-19-85 blinkov@mccme.ru school218.ru	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская»)	8 (ИУП); добор в 9, 10 (ИУП)	март-май
315	(499) 264-64-45 school315.ru	Русаковская, 10 (м. «Красносельская», «Сокольники»)	10 физ.-мат., 10 мед.	март-май
444	(495) 465-23-52 (495) 465-60-52 schv444.mskobar.ru	ул. Ниж. Первомайская, 14 (м. «Первомайская»)	5; добор в 7; в 8—10 физ.-мат.	март-май
1189	(499) 193-60-23 1189.ru sch1189@szouo.ru	ул. Маршала Василевского, 9, к. 1 (м. «Щукинская»)	5, 7, 10 физ.-мат.; 10 ест.-науч.	март-май
1511	(499) 324-29-21 www.1511.ru	Пролетарский пр-т, 6 к. 3 (м. «Каширская»)	10 физ.-мат., инф.; добор в 11	март; май-июнь
1534	gym1534.ru gym1534@mail.ru	ул. Кедрова, 11 (м. «Академическая»)	7 матем.; добор в 8 матем.	март-апрель
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-44 www.1543.ru	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8 матем., физ.-хим., биол., гум.	апрель
2007	(495) 716-29-35 fmsh2007.ru	ул. Горчакова, 9, корп. 1 (м. «ул. Горчакова»)	5—7 физ.-мат.; добор в 6, 8, 9	апрель-май
«2×2»	mathbabay.ru nabor@mathbaby.ru	ул. Никулинская, 10; Университетский пр-т, 7	5, 7 матем., 8 физ.; добор в 6, 8, 9, 10 матем.	март-май
Интеллектуал	(499) 445-52-10 sch-int.ru	ул. Кременчугская, 13 (м. «Славянский бульвар»)	5; добор в 6, 7, 8, 10	март-июнь
СУНЦ	(499) 445-11-08 internat.msu.ru	ул. Кременчугская, 11 (м. «Славянский бульвар», «Кунцевская»)	10 физ.-мат., комп.-инф., хим., биол., 11 физ.-мат.	март-май

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXVII Московская математическая олимпиада
Задачи и решения

Подписано в печать 18/III 2014 г.
Формат бумаги $60 \times 90/16$. Объём 3 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 1500 экз. Заказ .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-74-83

LXXVII
Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Яндекс

Москва
Издательство МЦНМО
2014

РАСПИСАНИЕ МЕРОПРИЯТИЙ
23 марта 2014 года

Время	Мероприятие	Место проведения (аудитория ГЗ)			
		8 класс	9 класс	10 класс	11 класс
11^{30}	Разбор задач	—	16–10	13–06	—
12^{30}	Показ работ	14 этаж	16 этаж	13 этаж	12 этаж
14^{00}	Лекция Д. О. Орлова в ауд. 16–10				
15^{30}	Торжественное закрытие, награждение победителей	ауд. 02 (1 этаж)			

Награждение наградами награжденных, не награжденных наградами на награждении, будет происходить по средам с 15^{00} до 19^{00} в МЦНМО (Большой Власьевский пер., 11).
www.mccme.ru, mmo@mccme.ru

СХЕМА ПРОЕЗДА В МЦНМО