7 класс

7.1. Запишите несколько раз подряд число 2013 так, чтобы получившееся число делилось на 9. Ответ объясните.

Ответ: например, 201320132013.

Решение. Приведем несколько способов обоснования.

Первый способ. Сумма цифр записанного числа равна $(2+0+1+3)\cdot 3 = 18$, поэтому оно делится на 9 (по признаку делимости на 9).

Второй способ. Сумма цифр числа 2013 делится на 3, поэтому, если написать 2013 подряд 3 раза, то сумма цифр полученного числа будет делиться на $3\cdot 3 = 9$, значит, и само число будет делиться на 9 (по признаку делимости на 9).

Третий способ. Разделив записанное число на 9, получим: $201320132013 : 9 = 22368903557$.

Четвертый способ. Разделив записанное число на 3, получим: $201320132013 : 3 = 67106710671$. Полученное число делится на 3, так как сумма его цифр равна 42. Следовательно, исходное число делится на 9.

Существуют и другие примеры: можно записать число 2013 шесть раз подряд, девять раз подряд, и так далее (любое количество раз, кратное трем). Обоснования аналогичны приведенным выше.

Критерии проверки:

$+$ *приведены один или несколько верных вариантов ответа и даны верные объяснения*

$\pm$ *вместе с верным ответом указан и неверный, при этом верный ответ объяснен*

$\mp$ *верный ответ приведен без объяснений или с неверным объяснением*

$-$ *приведен только неверный ответ*

7.2. Высота комнаты — 3 метра. При ее ремонте выяснилось, что на каждую стену уходит краски больше, чем на пол. Может ли площадь пола этой комнаты быть больше, чем 10 квадратных метров? Ответ объясните.

Ответ: нет, не может.

Решение. Приведем несколько способов обоснования.

Первый способ. Так как на каждую стену уходит краски больше, чем на пол, то площадь пола меньше, чем площадь каждой из стен. Площадь пола равна произведению ширины комнаты и ее длины, а площадь одной из стен равна произведению ширины комнаты и ее высоты. Поэтому длина комнаты меньше ее высоты, то есть меньше, чем 3 метра. Аналогично и ширина комнаты меньше, чем 3 метра. Поэтому площадь комнаты меньше, чем 9 м^2, значит, она меньше, чем 10 м^2.

Это рассуждение может быть записано алгебраически. Пусть a и b — длина и ширина комнаты (в метрах). Тогда площадь комнаты равна ab, а площади стен равны $3a$ и $3b$. Из условия задачи следует, что $ab < 3a$ и $ab < 3b$, то есть $a < 3$ и $b < 3$. Значит, $ab < 9 < 10$.

Второй способ. Комната — это прямоугольный параллелепипед высотой 3 метра. Положим этот параллелепипед на одну из боковых граней; тогда новой высотой станет одна из сторон прежнего основания, например, длина исходного параллелепипеда. При этом объем параллелепипеда не изменится, а площадь нового основания будет больше площади первоначального основания. Поэтому высота перевернутого параллелепипеда меньше, чем 3 метра. Положив теперь параллелепипед на соседнюю боковую грань и проведя аналогичные рассуждения, получим, что в этом случае новой высотой параллелепипеда станет ширина исходного и она также меньше, чем 3 метра. Таким образом, как длина, так и ширина исходного параллелепипеда меньше, чем 3 метра, значит, площадь его основания меньше, чем 9 м^2.

Критерии проверки:

$+$ *приведен верный ответ с полным обоснованием*

$\pm$ *приведен верный ответ и верное, в целом, обоснование, в котором есть пробелы или неточности*

$\mp$ *приведен верный ответ без обоснований*

$-$ *приведен неверный ответ*

7.3. Вчера Саша варил суп и положил мало соли, суп пришлось досаливать. Сегодня он положил соли в два раза больше, но все равно суп пришлось досаливать, правда, уже вдвое меньшим количеством соли, чем вчера. Во сколько раз Саше нужно увеличить сегодняшнюю порцию соли, чтобы завтра не пришлось досаливать? (*Каждый день Саша варит одинаковые порции супа.*)

Ответ: в 1,5 раза.

Решение. Приведем два способа решения: «арифметический» и «алгебраический».

Первый способ. Увеличение количества соли вдвое скомпенсировало половину вчерашней добавки, следовательно, вчерашнее количество соли, которое Саша положил первоначально, составляет треть от необходимого. Значит, сегодняшнее количество соли, которое Саша положил первоначально, составляет две трети от необходимого. Следовательно, завтра надо положить еще в полтора раза больше.

Второй способ. Пусть вчера Саша положил в суп x г соли, а добавил — y г. Тогда сегодня он положил $2x$ г, а добавил — $0{,}5y$ г. По условию: $x + y = 2x + 0{,}5y$, то есть $x = 0{,}5y$. Таким образом, всего требуется положить $2x + 0{,}5y = 3x$ г соли, а сегодня Саша положил $2x$ г. Следовательно, сегодняшнюю порцию соли надо увеличить в $3x : 2x = 1{,}5$ раза.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и верное решение с полным обоснованием*

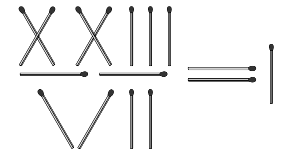
$\pm$ *приведено верное рассуждение с полным обоснованием, но ответ дан не на тот вопрос, который задан*

$\mp$ *приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию, но не обосновано, что он единственный*

$\mp$ *верный ответ получен рассмотрением конкретных числовых значений*

$-$ *приведен только ответ*

7.4. Из спичек выложено неверное равенство (см. рисунок). Покажите, как переложить одну спичку, чтобы получилось равенство, в котором значения левой и правой частей различаются меньше, чем на 0,1.



Ответ: см., например, рис. 7.4а, б.

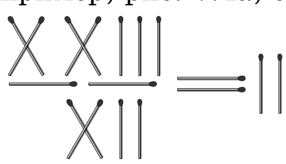


Рис. 7.4а

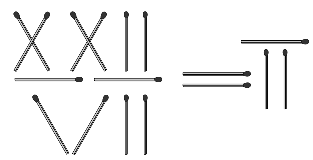


Рис. 7.4б

Решение. В равенстве на рис. 7.4а значение левой части равно $\frac{23}{12}$, а значение правой части равно 2. $2 - \frac{23}{12} = \frac{1}{12} < 0{,}1$. В равенстве на рис. 7.4б значение левой части равно $\frac{22}{7} = 3{,}1428\ldots$, а справа — стилизованная запись числа $\pi = 3{,}1415\ldots$. Эти числа различаются меньше, чем на 0,002, что существенно меньше требуемого.

Отметим, что приближение числа π дробью $\frac{22}{7}$ было известно еще Архимеду. Оно является одним из «наилучших приближений», то есть любое приближение числа π в виде обыкновенной дроби с большей точностью имеет знаменатель, больше чем 7.

Критерии проверки:

$+$ *приведены один или несколько верных вариантов ответа*

$\pm$ *вместе с верным вариантом ответа указан и неверный*

$-$ *приведен неверный ответ*

7.5. В сумме $+1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$ можно вычеркивать любые слагаемые и изменять некоторые знаки перед оставшимися числами с «+» на «−». Маша хочет таким способом сначала получить выражение, значение которого равно 1, затем, начав сначала, получить выражение, значение которого равно 2, затем (снова начав сначала) получить 3, и так далее. До какого наибольшего целого числа ей удастся это сделать без пропусков?

Ответ: до числа 1093 (включительно).

Решение. Число 1 получается вычеркиванием всех слагаемых, кроме первого. Затем Маша сможет получить числа $2 = -1 + 3$, $3 = +3$ и $4 = +1 + 3$.

Покажем, что добавив слагаемое 9, можно получить любое целое число от $5 = 9 - 4$ до $13 = 9 + 4$. Действительно, $5 = -1 - 3 + 9$; $6 = -3 + 9$; $7 = +1 - 3 + 9$; $8 = -1 + 9$; $9 = +9$; $10 = +1 + 9$; $11 = -1 + 3 + 9$; $12 = +3 + 9$; $13 = +1 + 3 + 9$.

Добавив 27 и действуя аналогично, можно получить любое целое число от $14 = -1 - 3 - 9 + 27$ до $40 = +1 + 3 + 9 + 27$, затем получить все числа от $41 = -1 - 3 - 9 - 27 + 81$ до $121 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$ и так далее. Следовательно, Маша постепенно сумеет получить все целые числа от 1 до $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1093$.

По сути, в этом решении использовано рассуждение по индукции. Вначале получено несколько первых чисел, а затем показано, что, умея получать все целые числа от 1 до k и добавляя следующее слагаемое, равное $2k + 1$, Маша сумеет получить все целые числа от $k + 1 = (2k + 1) - k$ до $3k + 1 = (2k + 1) + k$.

Заметим, что слагаемые в заданной сумме являются последовательными степенями числа 3, то есть в троичной системе счисления эта сумма записывается в виде $\overline{1111111}_3$. Предложенная задача на конкретном примере иллюстрирует тот факт, что любое целое число можно записать в виде суммы степеней тройки с коэффициентами 0, 1 и −1 вместо обычных 0, 1 и 2. (Можно доказать, что запись в таком виде также единственна.)

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и верное решение с полным обоснованием*

$\pm$ *приведено верное рассуждение с полным обоснованием, но при записи ответа допущена арифметическая ошибка*

$\mp$ *приведен верный ответ и присутствует идея его обоснования, но само обоснование отсутствует*

$-$*приведен только ответ*

8 класс

8.1. В записи $* + * + * + * + * + * + * + * = **$ замените звёздочки различными цифрами так, чтобы равенство было верным.

Ответ: $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 + 0 = 36$.

Отметим, что приведенный пример единственен с точностью до порядка слагаемых в левой части равенства. Действительно, пусть в правой части стоит число $\overline{ab}$. *Так как сумма десяти различных цифр равна* 45, *то данное равенство можно записать в виде* $45 - a - b = 10a + b$. *Упрощая его, получим:* $11a + 2b = 45$.

Простейший перебор показывает, что $a = 3$, $b = 6$.

Критерии проверки:

$+$ *приведен верный ответ*

$-$ *приведен неверный ответ (в частности, с повторяющимися цифрами)*

8.2. Про различные числа a и b известно, что $\frac{a}{b} + a = \frac{b}{a} + b$. Найдите $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Ответ: -1.

Решение. Данное равенство можно записать в виде $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = b - a$, откуда $\frac{a^2 - b^2}{ab} = b - a$ или $\frac{(a-b)(a+b)}{ab} = b - a$. Так как числа a и b различны, то разделим обе части равенства на $a - b$, после чего получим: $\frac{a+b}{ab} = -1$. Это и есть искомое значение, так как $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верные в целом выкладки, но отсутствует обоснование возможности деления на* $(a - b)$

$\mp$ *приведен верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка*

$-$ *приведен только ответ*

8.3. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN, а из вершины D — высоты DP и DQ. Докажите, что точки M, N, P и Q являются вершинами прямоугольника.

Решение. Пусть, для определённости, точка N лежит на прямой AD, а точка Q — на прямой AB (см. рис. 8.3). Тогда диагонали BD и PN прямоугольника $PBND$ равны и пересекаются в их общей середине O. Аналогично, диагонали BD и QM прямоугольника $QBMD$ равны и пересекаются в их общей середине O. Значит, и диагонали PN и QM четырехугольника $PQNM$ равны и пересекаются в их общей середине O. Следовательно, $PQNM$ — прямоугольник.

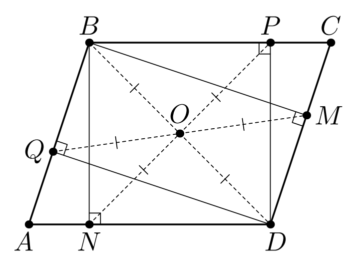


Рис. 8.3

Заметим, что предложенное рассуждение справедливо независимо от того, попадают ли основания высот на стороны параллелограмма или на продолжения сторон.

Возможны и другие способы решения, в частности, использующие вспомогательные окружности и вписанные углы.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное решение*

$\mp$ *доказано только, что указанные точки являются вершинами параллелограмма*

$-$ *разобран только частный случай*

8.4. На доске были записаны числа 3, 9 и 15. Разрешалось сложить два записанных числа, вычесть из этой суммы третье, а результат записать на доску вместо того числа, которое вычиталось. После многократного выполнения такой операции на доске оказались три числа, наименьшее из которых было 2013. Каковы были два остальных числа?

Ответ: 2019 и 2025.

Решение. Заметим, что $9 - 3 = 6$ и $15 - 9 = 6$. Покажем, что в любой момент одно из чисел на доске будет на 6 меньше второго и на 6 больше третьего.

Действительно, пусть это свойство выполнено, и на доске записаны числа $x - 6$, x и $x + 6$. Если сложить два крайних числа и вычесть среднее, то тройка чисел не изменится. Если сложить первых два числа и вычесть третье, то получится тройка $x - 6$, x и $x - 12$, а если сложить два последних числа и вычесть первое, то получится тройка $x + 12$, x и $x + 6$. Во всех случаях указанное свойство сохраняется, поэтому оно будет выполняться после каждого шага. Значит, искомые числа: $2013 + 6 = 2019$ и $2019 + 6 = 2025$.

Ту же идею решения можно изложить иначе: например, можно показать, что тройки, которые могут получиться, образуют «цепочку», и каждый раз мы делаем по этой цепочке шаг вперёд или шаг назад (или остаёмся на месте).

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\mp$ *приведен верный ответ и указано без доказательства свойство, которое является инвариантом*

$-$ *приведен только ответ*

8.5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30^\circ$. Найдите $\angle AKD$.

Ответ: 75°.

Решение. Из условия задачи следует, что $\angle BMA = \angle CMK = 60^\circ$, а тогда и $\angle AMK = 60^\circ$ (см. рис. 8.5а). Далее можно рассуждать по-разному.

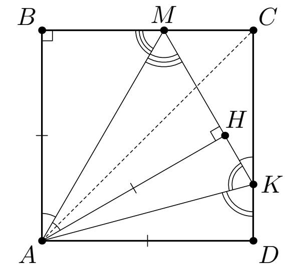


Рис. 8.5а

Первый способ. Пусть AH — перпендикуляр из вершины A на MK. Тогда прямоугольные треугольники AMB и AMH равны по гипотенузе и острому углу, откуда $AH = AB$. Используя это равенство, получим, что прямоугольные треугольники AKH и AKD равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle AKD = \frac{1}{2}\angle MKD = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$.

В приведенном рассуждении используется, что точка H лежит на отрезке MK, а не на его продолжении за точку K. Это действительно так, иначе бы AH пересекал сторону CD в точке X, но тогда $AH > AX > AD$, что противоречит равенству $AH = AD$. За отсутствие этого пояснения у школьника снижать ему оценку не следует.

Второй способ. Диагональ CA квадрата является биссектрисой внутреннего угла треугольника CMK, а луч MA — биссектрисой его внешнего угла, поэтому вершина A — центр вневписанной окружности этого треугольника. Следовательно, KA также является биссектрисой внешнего угла треугольника CMK, поэтому $\angle AKD = \frac{1}{2}\angle MKD = 75^\circ$.

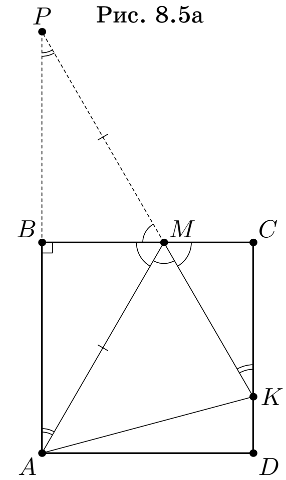


Рис. 8.5б

Третий способ. Продлим отрезок KM до пересечения с прямой AB в точке P (см. рис. 8.5б). Тогда $\angle PMB = \angle CMK = \angle AMB$. Следовательно, прямоугольный треугольники PMB и AMB равны (по катету и острому углу), тогда $PB = AB$, то есть $AP = 2a$, где a — сторона данного квадрата, и $PM = AM$.

По свойству катета, противолежащего углу в 30° в прямоугольном треугольнике, $AM = 2BM$ и $MK = 2MC$. Следовательно, $PK = PM + MK = 2(BM + MC) = 2BC = 2a$.

Таким образом, треугольник APK — равнобедренный с углом 30° при вершине P, поэтому его угол при основании равен 75°. Так как $\angle MKD = 150^\circ$, а $\angle MKA = 75^\circ$, то $\angle AKD = 75^\circ$.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$-$ *приведен только ответ*

8.6. Саша начертил квадрат размером 6×6 клеток и поочередно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма. (*Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.*)

Решение. Рассмотрим все единичные отрезки, которые являются общими сторонами для двух клеток. Таких отрезков ровно шестьдесят — **30** вертикальных и **30** горизонтальных. Если отрезок разграничивает две закрашенные клетки, то будем говорить, что он «окрашен». Заметим, что когда Саша пишет какое-то число в клетке, он указывает количество отрезков, которые не были окрашены до закрашивания этой клетки, а теперь стали окрашенными. Когда Саша приступает к суммированию, окрашены все **60** отрезков, то есть сумма чисел, которые записывает Саша, всегда будет равна **60**.

Отметим, что описывать «материализацию» указанной суммы можно по-разному, например, вместо окрашенного отрезка можно говорить о парах соседних закрашенных клеток и т. п.

Отметим также, что у этой задачи безусловно существует переборное решение, но изложить его в работе физически невозможно.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$-$ *указано, но не обосновано, что Саша всегда получит число* 60 (*в том числе, путем неполного перебора или демагогических рассуждений типа «по-любому так получится...»*)

9 класс

9.1. На доске записано несколько последовательных натуральных чисел. Ровно 52% из них — четные. Сколько четных чисел записано на доске?

Ответ: 13.

Решение. Так как записанные натуральные числа являются последовательными, то четные и нечетные числа чередуются. По условию четных чисел больше, значит, записанная последовательность начинается и заканчивается четными числами.

Первый способ. Пусть записано n четных чисел, тогда нечетных — $(n-1)$. Значит, четные числа составляют $\frac{n}{2n-1}\cdot 100\%$ от всех записанных на доске. Получаем уравнение $100n = 52(2n-1)$, откуда $n = 13$.

Второй способ. Пусть всего записано x чисел. Тогда среди них $\frac{13}{25}x$ четных и $\frac{12}{25}x$ нечетных, причем четных больше ровно на одно. Следовательно, $\frac{13}{25}x - \frac{12}{25}x = 1$, откуда $x = 25$. Значит, $\frac{13}{25}x = 13$.

Третий способ. Четных чисел больше на одно, значит, одно число составляет $(52-48)\%$ от их общего количества. Следовательно, искомое количество четных чисел равно $\frac{52}{52-48} = 13$.

Критерии проверки:

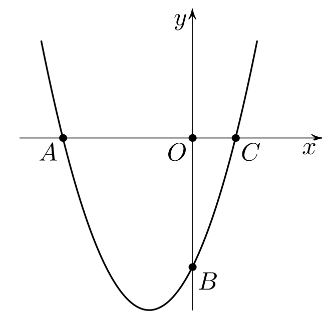
$+$ *приведены верный ответ и полное решение (любым способом)*

$\pm$ *приведены верные, в целом, рассуждения, но ответ дан не на тот вопрос (например, найдено только общее количество записанных чисел)*

$\mp$ *приведен верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка*

$-$ *приведен только ответ*

9.2. На рисунке изображен график функции $y = x^2 + ax + b$. Известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$. Найдите длину отрезка OC.



Ответ: 1.

Решение. Так как $y(0) = b$, то $B(0; b)$. Найдем теперь длину отрезка OA.

Первый способ. Так как прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$, то она параллельна прямой $y = -x$. Кроме того, эта прямая проходит через точку $B(0; b)$. Значит, она задается уравнением $y = -x + b$. Так как $y = 0$ при $x = b$, то $OA = -b$.

Второй способ. Из условия задачи следует, что биссектриса треугольника AOB, проведенная к стороне AB, лежит на прямой $y = x$, поэтому совпадает с высотой этого треугольника. Следовательно, $OA = OB = -b$.

Таким образом, число b и искомая длина c отрезка OC являются корнями квадратного уравнения $x^2+ax+b = 0$. По теореме Виета: $bc = b$. Так как $b \neq 0$, то $c = 1$.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное решение с незначительными пробелами в обоснованиях*

$\mp$ *доказано только, что $OA = OB$, а дальнейших продвижений нет*

$\mp$ *равенство $OA = OB$ использовано без доказательства, после чего обоснованно получен верный ответ*

$\mp$ *верный ответ получен, исходя из конкретных числовых значений a и b*

$-$ *приведен только ответ*

9.3. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O, которая касается стороны AB в точке E. На продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $AD = \frac{1}{2}AC$. Докажите, что прямые DE и AO параллельны.

Решение. Пусть M — точка касания окружности со стороной AC (см. рис. 9.3). Так как треугольник ABC — равнобедренный, то M — середина AC. Таким образом, $DA = AM = MC$.

С другой стороны, $AE = AM$ (отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки). Из равенства $AE = AM = AD$ следует, что треугольник DEM — прямоугольный с прямым углом E, то есть $DE \perp EM$. Кроме того, в равнобедренном треугольнике EAM биссектриса AO является также высотой, то есть $AO \perp EM$. Следовательно, DE и AO параллельны.

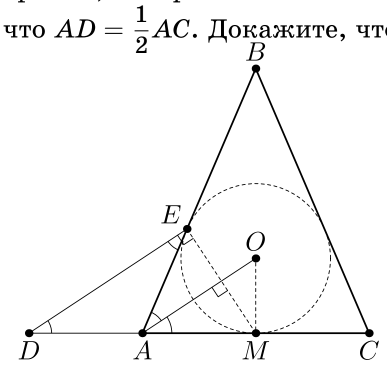


Рис. 9.3

Обосновав, что $AD = AE$, можно также сослаться на известный факт: биссектриса AO внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника DAE параллельна основанию DE. Этот факт несложно и доказать: если $\angle AED = \angle ADE = \alpha$, то $\angle CAE = 2\alpha$, значит, $\angle OAE = \alpha$. Таким образом, $DE \parallel AO$ (по признаку параллельности прямых).

Возможны и другие способы решения.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное решение с незначительными неточностями или пробелами*

$\mp$ *доказано только, что $AE = DA = AM = MC$, а дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют*

$-$ *приведено неверное рассуждение или решение отсутствует*

9.4. В квадратной таблице размером 100×100 некоторые клетки закрашены. Каждая закрашенная клетка является единственной закрашенной клеткой либо в своем столбце, либо в своей строке. Какое наибольшее количество клеток может быть закрашено?

Ответ: 198.

Решение. *Пример.* Закрасим все клетки одной строки и все клетки одного столбца, за исключением их общей клетки. В этом случае условие задачи выполнено и закрашено ровно 198 клеток.

Оценка. Докажем, что требуемым образом не могло быть закрашено больше, чем 198 клеток. Для каждой закрашенной клетки выделим ту линию (строку или столбец), в которой она единственная закрашенная. При таком выделении не может быть выделено больше, чем 99 строк. Действительно, если выделено 100 строк, то каждая закрашенная клетка — единственная именно в своей строке, но тогда закрашенных клеток — не более, чем 100. Аналогично, не может быть выделено и больше, чем 99 столбцов. Поэтому выделенных линий, а значит, и закрашенных клеток, не более, чем 198.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *приведен верный ответ и описан пример раскраски, но оценка отсутствует или проведена неверно*

$-$ *приведен только ответ*

9.5. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG, если $DE = 5$ см.

Ответ: 10 см.

Решение. Пусть $\angle HBF = \alpha$ (см. рис. 9.5). Тогда $\angle FAH = \angle HBF = \alpha$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Из прямоугольного треугольника ADC: $\angle C = 90^\circ - \alpha$, а из прямоугольного треугольника ECB: $\angle EBC = 90^\circ - \angle C = \alpha$.

Таким образом, BE — высота и биссектриса треугольника FBC, следовательно, этот треугольник равнобедренный и BE является его медианой, то есть $FE = EC$. Аналогично доказывается, что $CD = DG$. Значит, ED — средняя линия треугольника FCG. Поэтому $FG = 2DE = 10$ (см).

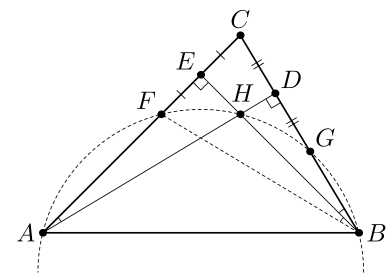


Рис. 9.5

Критерии проверки:

$+$ $-$ *приведено полное обоснованное решение*

$-$ *приведен только ответ*

9.6. Двадцать пять монет раскладывают по кучкам следующим образом. Сначала их произвольно разбивают на две группы. Затем любую из имеющихся групп снова разбивают на две группы, и так далее до тех пор, пока каждая группа не будет состоять из одной монеты. При каждом разбиении какой-либо группы на две записывается произведение количеств монет в двух получившихся группах. Чему может быть равна сумма всех записанных чисел?

Ответ: 300.

Решение. *Первый способ.* Изобразим монеты точками и соединим каждую пару точек отрезком. Получим $\frac{25(25-1)}{2} = 300$ отрезков. При каждом разбиении одной группы монет на две будем стирать все отрезки, соединяющие точки, соответствующие монетам, оказавшимся в разных группах. Пусть на некотором шаге мы разбили монеты одной из уже имевшихся групп на две группы по x и y монет. Тогда мы стираем xy отрезков. Это же число мы записываем. Таким образом, сумма записанных чисел — это количество всех стертых отрезков. Так как изначально было 300 отрезков, а в итоге все отрезки стерты, то общее количество стертых отрезков равно 300.

Второй способ. Рассмотрим переменную величину S, равную в каждый момент половине суммы квадратов количеств монет в кучках. Изначально $S = \frac{25^2}{2} = 312,5$, а в самом конце $S = \frac{1^2+1^2+\ldots.+1^2}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$. Если кучка, в которой было $x+y$ монет разбивается на две кучки по x и y монет, то S уменьшается на $\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{x^2+y^2}{2} = xy$. Таким образом, при каждом разбиении величина S уменьшается на очередное записываемое число. Следовательно, сумма всех записанных чисел равна общему уменьшению величины S, которое равно $312{,}5 - 12{,}5 = 300$.

Третий способ. Докажем по индукции, что если изначально имеется n монет, то искомая сумма равна $\frac{n(n-1)}{2}$.

База индукции. При $n = 2$ после первого же шага получаем две кучки по одной монете в каждой и записываем число $1 \cdot 1 = 1$. Так как равенство $\frac{2(2-1)}{2} = 1$ верное, то при $n = 2$ доказываемое утверждение верно.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение верно для всех $n < k$ и докажем, что тогда оно верно и для $n = k$. Пусть на первом шаге k монет разделили на две группы по x и y монет ($k = x + y$). Для x и y монет доказываемое утверждение верно по предположению индукции.

Если при таком разбиении $x \geqslant 2$ и $y \geqslant 2$, то записанная сумма равна

$$xy + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = \frac{x^2 - x + y^2 - y + 2xy}{2} = \frac{(x+y)^2 - (x+y)}{2} = \frac{k^2-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Если же $x = 1$ и $y \geqslant 2$, то $k = y + 1$ и записанная сумма в этом случае равна $1 \cdot y + \frac{y(y-1)}{2} = \frac{(y+1)^2 - (y+1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$. Согласно принципу математической индукции, утверждение доказано для любого натурального $n \geqslant 2$. В частности, для 25 монет получим: $\frac{25(25-1)}{2} = 300$.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, решение с незначительными неточностями или пробелами*

$-$ *приведен только ответ*

10 класс

10.1. Первый член последовательности равен 934. Каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 13. Найдите 2013-й член последовательности.

Ответ: 130.

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности. Получим: $a_1 = 934$; $a_2 = 16 \times 13 = 208$; $a_3 = 10 \times 13 = 130$; $a_4 = 4 \times 13 = 52$; $a_5 = 7 \times 13 = 91$; $a_6 = 10 \times 13 = 130 = a_3$. Так как при вычислении каждого следующего числа используется только предыдущее число, то далее члены последовательности будут повторяться с периодом 3. Число 2013 кратно трем, поэтому $a_{2013} = a_3 = 130$.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верные, в целом, рассуждения, в которых есть незначительные пробелы или неточности*

$\mp$ *приведен верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка*

$-$ *приведен только ответ*

10.2. Корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 + bx + c$ равны m_1 и m_2, а корни квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 + px + q$ равны k_1 и k_2. Докажите, что $f(k_1) + f(k_2) + g(m_1) + g(m_2) \geqslant 0$.

Решение. Обозначим: $A = f(k_1) + f(k_2) + g(m_1) + g(m_2)$.

Первый способ. Выразим A через корни данных трехчленов.

Так как $f(x) = x^2 + bx + c = (x - m_1)(x - m_2)$, $g(x) = x^2 + cx + d = (x - k_1)(x - k_2)$, то $f(k_1) + f(k_2) = (k_1 - m_1)(k_1 - m_2) + (k_2 - m_1)(k_2 - m_2)$, $g(m_1) + g(m_2) = (m_1 - k_1)(m_1 - k_2) + (m_2 - k_1)(m_2 - k_2)$.

Тогда, сгруппировав слагаемые и вынеся общие множители за скобки, получим:

$$A = (k_1 - m_1)(k_1 - m_2 - m_1 + k_2) + (k_2 - m_2)(k_1 - m_2 - m_1 + k_2) = (k_1 - m_2 - m_1 + k_2)^2 \geqslant 0,$$

что и требовалось.

Второй способ. Выразим A через коэффициенты данных трехчленов. Тогда

$$f(k_1) + f(k_2) = k_1^2 + bk_1 + c + k_2^2 + bk_2 + c = k_1^2 + k_2^2 + b(k_1 + k_2) + 2c = (k_1 + k_2)^2 - 2k_1k_2 + b(k_1 + k_2) + 2c.$$

Из теоремы Виета для квадратного трёхчлена $g(x)$ следует, что $k_1 + k_2 = -p$, $k_1 \cdot k_2 = q$.

Следовательно, $f(k_1) + f(k_2) = p^2 - 2q - bp + 2c$.

Аналогично, $g(m_1) + g(m_2) = b^2 - 2c - pb + 2q$. Следовательно, $A = f(k_1) + f(k_2) + g(m_1) + g(m_2) = p^2 - 2q - bp + 2c + b^2 - 2c - pb + 2q = p^2 - 2bp + b^2 = (p - b)^2 \geqslant 0$, что и требовалось.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верные, в целом, рассуждения, в которых есть незначительные пробелы или неточности*

$\mp$ *использованы верные идеи преобразования выражения, но допущены ошибки, либо решение не доведено до конца*

$-$ *рассмотрены только частные случаи*

10.3. Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведен перпендикуляр AE. Найдите угол CEF.

Ответ: $45°$.

Решение. Пусть прямая AE пересекает сторону CD квадрата в точке M (см. рис. 10.3). Тогда треугольники ADM и DCF равны (по катету и острому углу). Следовательно, точка M — середина стороны CD. Тогда треугольник CFM — прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle CMF = 45°$.

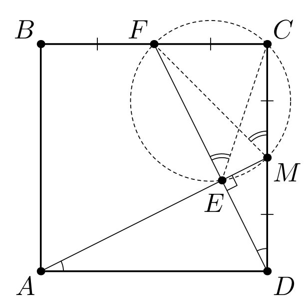


Рис. 10.3

Так как $\angle MEF = \angle MCF = 90°$, то вокруг четырехугольника $MCFE$ можно описать окружность. Вписанные углы CEF и CMF опираются на одну и ту же дугу этой окружности, значит, $\angle CEF = \angle CMF = 45°$.

Существуют также «вычислительные» способы решения, например, использующие координаты или векторы.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$-$ *приведен только ответ*

10.4. Найдите наибольшее значение выражения $a + b + c + d - ab - bc - cd - da$, если каждое из чисел a, b, c и d принадлежит отрезку $[0; 1]$.

Ответ: 2.

Решение. *Первый способ.* Значение 2 достигается, например, если $a = c = 1$, $b = d = 0$. Докажем, что при заданных значениях переменных $a + b + c + d - ab - bc - cd - da \leqslant 2$.

Заметим, что $a + b + c + d - ab - bc - cd - da = (a + c) + (b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $a + c = x$, $b + d = y$, тогда требуется доказать, что $x + y - xy \leqslant 2$, если $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Действительно, $x + y - xy = (x + y - xy - 1) + 1 = (x - 1)(1 - y) + 1$, где $-1 \leqslant x - 1 \leqslant 1$ и $-1 \leqslant 1 - y \leqslant 1$. Следовательно, $(x - 1)(1 - y) \leqslant 1$, поэтому $x + y - xy \leqslant 2$.

Введя новые переменные, можно рассуждать иначе. Зафиксируем переменную y и рассмотрим функцию $f(x) = (1-y)x+y$, где $x \in [0; 2]$. Так как она — линейная, то ее наибольшее значение достигается на одном из концов отрезка $[0; 2]$. Но $f(0) = y \leqslant 2$ и $f(2) = 2 - y \leqslant 2$, значит, при всех $x \in [0; 2]$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant 2$.

Второй способ. Ту же идею линейности можно использовать изначально. Данное выражение можно считать линейной функцией от одной из переменных, если три остальные переменные зафиксировать.

Например, зафиксируем значения переменных b, c и d и рассмотрим функцию $f(a) = (1 - b - d)a + b + c + d - bc - cd$, где $a \in [0; 1]$. В силу монотонности, ее наибольшее значение достигается на одном из концов отрезка $[0; 1]$. Аналогичная ситуация возникнет и для заданных таким же образом линейных функций от переменных b, c и d.

Следовательно, наибольшее значение исходного выражения может достигаться только в том случае, когда переменные a, b, c и d принимают одно из двух значений: 0 или 1. Учитывая симметричность данного выражения, достаточно теперь проверить следующие случаи:

1) если $a = b = c = d = 0$ или $a = b = c = d = 1$, то значение выражения равно 0;
2) если $a = b = c = 0$, $d = 1$ или $a = b = c = 1$, $d = 0$, то значение выражения равно 1;
3) если $a = b = 0$, $c = d = 1$ или $a = b = 1$, $c = d = 0$, то значение выражения равно 1;
4) если $a = c = 0$, $b = d = 1$ или $a = c = 1$, $b = d = 0$, то значение выражения равно 2.

Таким образом, наибольшее значение данного выражения равно 2.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верные, в целом, рассуждения, в которых есть незначительные пробелы или неточности (например, доказана оценка, но отсутствует пример)*

$\mp$ *приведен верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка*

$\mp$ *есть идея линейности, но она не доведена до конца*

$\mp$ *приведены верный ответ и указано, при каких значениях переменных он может достигаться, но оценка не проведена*

$-$ *приведен только ответ*

10.5. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне AC — точка M. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Оказалось, что углы APB, BPC и CPA равны по 120°, а площадь четырехугольника $AKPM$ равна площади треугольника BPC. Найдите угол BAC.

Ответ: 60°.

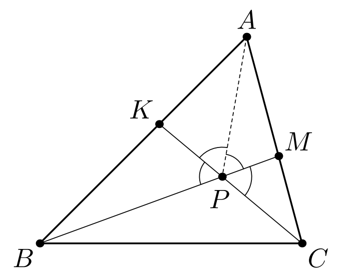


Рис. 10.5

Решение. К обеим частям равенства $S_{AKPM} = S_{BPC}$ прибавим площадь треугольника BPK (см. рис. 10.5). Получим, что $S_{ABM} = S_{BCK}$. Следовательно, $\frac{1}{2}BC \cdot BK \sin\angle B = \frac{1}{2}AB \cdot AM \sin\angle A$. Тогда $\frac{BK}{AM} = \frac{AB\sin\angle A}{BC\sin\angle B}$. Из теоремы синусов: $\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} = \frac{BC}{AC}$, значит, $\frac{BK}{AM} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{AM}{AC}$. Таким образом, точки K и M делят отрезки BA и AC в одном и том же отношении, считая от вершин B и A соответственно, то есть $\frac{BK}{KA} = \frac{AM}{MC}$ $(*)$.

Заметим теперь, что $\angle BPK = \angle KPA = \angle APM = \angle MPC = 60^\circ$ (углы, смежные с данными углами по 120°). Значит, PK и PM — биссектрисы треугольников APB и APC соответственно. По свойству биссектрисы треугольника получим: $\frac{BK}{KA} = \frac{BP}{PA}$ и $\frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC}$. Тогда, с учетом равенства $(*)$ получим, что $\frac{BP}{PA} = \frac{AP}{PC}$.

Кроме того, $\angle BPA = \angle APC = 120^\circ$. Таким образом, треугольники BPA и APC подобны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle PAC = \angle PBA$. Значит, $\angle BAC = \angle BAP + \angle PAC = \angle BAP + \angle PBA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *получено только, что точки K и M делят стороны в одном и том же отношении*

$-$ *приведен только ответ*

10.6. В клетки таблицы размером 9×9 расставили все натуральные числа от 1 до 81. Вычислили произведения чисел в каждой строке таблицы и получили набор из девяти чисел. Затем вычислили произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получили набор из девяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: нет, не могли.

Решение. Каждое из произведений чисел, стоящих в девяти строках таблицы, представим в виде произведения простых множителей. Выпишем все простые числа, большие, чем 40, но меньшие, чем 81: 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79. Заметим, что каждое из этих десяти чисел может встретиться только в одном из этих девяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них, превышают 81. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n.

Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *в решении есть идея рассмотрения простых чисел, лежащих между 40 и 81, не доведенная до конца*

$-$ *приведен только ответ*

11 класс

11.1. Сережа и Миша, гуляя по парку, набрели на поляну, окруженную липами. Сережа пошел вокруг поляны, считая деревья. Миша сделал то же самое, но начал с другого дерева (хотя пошел в ту же сторону). Дерево, которое у Сережи было 20-м, у Миши было 7-м, а дерево, которое у Сережи было 7-м, у Миши было 94-м. Сколько деревьев росло вокруг поляны?

Ответ: 100.

Решение. *Первый способ.* Пусть вокруг поляны росло n деревьев. Вычислим двумя способами количество промежутков между теми двумя деревьями, о которых сказано в условии задачи. При обходе Сережи: $20 - 7 = 13$. При обходе Миши: $7 + (n - 94) = n - 87$. Следовательно, $n - 87 = 13$, то есть $n = 100$.

Второй способ. Между первым и вторым упомянутыми деревьями Миша насчитал еще $94-7-1 = 86$ деревьев. А Сережа между вторым деревом и первым деревом насчитал $20 - 7 - 1 = 12$ деревьев. Значит, вокруг поляны растет $86 + 12 = 98$ и еще два упомянутых дерева, то есть ровно 100 деревьев.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\mp$ *приведен верный ход рассуждений, но допущена ошибка на одно дерево при «перескоке»*

$-$ *приведен только ответ*

11.2. В треугольнике ABC угол C равен 75°, а угол B равен 60°. Вершина M равнобедренного прямоугольного треугольника BCM с гипотенузой BC расположена внутри треугольника ABC. Найдите угол MAC.

Ответ: 30°.

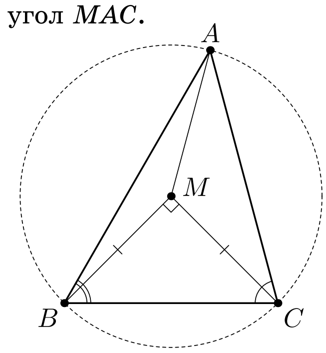


Рис. 11.2

Первый способ. Из условия задачи следует, что угол $\angle BAC = 45^\circ$. Проведем окружность с центром M и радиусом $MB = MC$ (см. рис. 11.2). Так как $\angle BMC = 90^\circ$, то большая дуга BC этой окружности является геометрическим местом точек, из которых хорда BC видна под углом 45°. Следовательно, вершина A принадлежит этой окружности. Значит, треугольник AMC — равнобедренный, тогда $\angle MAC = \angle MCA = \angle BCA - \angle MCB = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$.

Второй способ. Пусть $BC = a$, тогда из треугольника BMC: $MC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Из треугольника ABC по теореме синусов получим, что $\dfrac{BC}{sin45^\circ} = \dfrac{AC}{sin60^\circ}$, то есть $AC = a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Далее, из треугольника CMA по теореме косинусов: $AM^2 = CM^2 + CA^2 - 2CM \cdot CA \cdot cos\angle MCA = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{3a^2}{2} - 2\dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot a \times$ $\times \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$, то есть $AM = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Следовательно, треугольник AMC — равнобедренный.

Дальнейшие вычисления изложены выше.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *доказано, что треугольник AMC — равнобедренный, но в дальнейшем допущена арифметическая ошибка*

$-$ *приведен только ответ*

11.3. Для квадратного трехчлена $f(x)$ и некоторых действительных чисел l, t и v выполнены равенства: $f(l) = t + v$, $f(t) = l + v$, $f(v) = l + t$. Докажите, что среди чисел l, t и v есть равные.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Из условия задачи вытекают следующие равенства:

$$\begin{cases} al^2 + bl + c = t + v, & (1) \\ at^2 + bt + c = v + l, & (2) \\ av^2 + bv + c = l + t. & (3) \end{cases}$$

Вычитая из уравнения (1) сначала уравнение (2), а затем уравнение (3), получим:

$$\begin{cases} a(l^2 - t^2) + b(l - t) = t - l, \\ a(l^2 - v^2) + b(l - v) = v - l. \end{cases}$$

Предположим, что среди чисел l, t и v нет равных, то есть $l \neq t$ и $l \neq v$. Тогда, разделив почленно первое уравнение на $l - t$, а второе уравнение — на $l - v$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a(l + t) + b = -1, \\ a(l + v) + b = -1. \end{cases}$$

Вычитая из одного уравнения другое, получим: $a(t - v) = 0$, а это возможно только, если $t = v$. Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что среди чисел l, t и v нет равных, неверно.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *составлена первая система уравнений и получено какое-то следствие из нее, но решение до конца не доведено*

11.4. На экране компьютера — число 12. Каждую секунду число на экране умножают или делят либо на 2, либо на 3. Результат действия возникает на экране вместо записанного числа. Ровно через минуту на экране появилось число. Могло ли это быть число 54?

Ответ: нет, не могло.

Решение. Заметим, что $12 = 2^2 \cdot 3^1$, то есть суммарный показатель степени множителей (двоек и троек) равен 3. Независимо от произведенного действия, при каждой смене числа суммарный показатель степени множителей изменяется на 1. Всего должно произойти 60 таких изменений. Следовательно, через 60 секунд суммарный показатель степени должен быть той же четности, что и в исходном числе 12.

Но $54 = 2^1 \cdot 3^3$, то есть этот показатель равен 4 — четному числу. Значит, получить число 54 ровно через минуту невозможно.

Критерии проверки

+ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

± *приведены верный ответ и верное в целом решение, в котором допущены мелкие погрешности или неточности*

− *приведен только ответ*

11.5. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, ребро основания которой равно 1. Из вершин A и B основания ABC проведены медианы боковых граней, не имеющие общих точек. Известно, что на прямых, содержащих эти медианы, лежат ребра некоторого куба. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Решение. Указанные медианы AD и BE боковых граней ASB и BSC лежат на скрещивающихся прямых, а скрещивающиеся ребра куба взаимно перпендикулярны. Тогда условие существования куба с ребрами на указанных прямых равносильно перпендикулярности этих прямых. Таким образом, требуется найти длину b бокового ребра пирамиды, у которой угол между скрещивающимися медианами боковых граней равен $90°$. Возможны различные способы решения.

Первый способ. По формуле для вычисления медианы треугольника $AD = BE = \dfrac{\sqrt{2 \cdot 1^2 + 2b^2 - b^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{b^2+2}}{2}$. При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{ED}$ образом медианы BE является отрезок FD (см. рис. 11.5а). Из треугольника ABF по теореме косинусов $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2 - 2AB \cdot BF \cdot \cos 120°} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Треугольник ADF — прямоугольный и равнобедренный, поэтому $AF = AP\sqrt{2}$. Получим уравнение: $\dfrac{\sqrt{b^2+2}}{2} \cdot \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Его решением является $b = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Возможен также аналогичный способ вычисления, если от вершины S отложить отрезки параллельные данным медианам, длины которых равны удвоенной медиане.

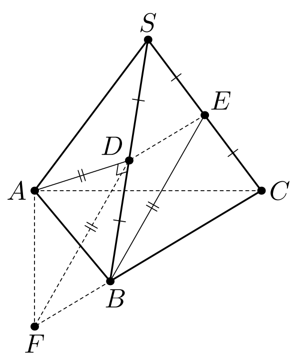


Рис. 11.5а

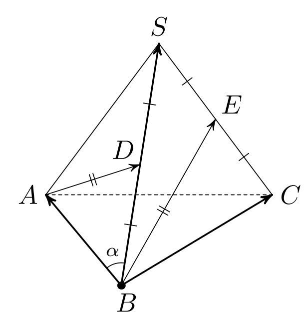


Рис. 11.5б

Второй способ. Пусть $\angle SBA = \angle SBC = \alpha$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BS}$ и выразим через них $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (см. рис. 11.5б). Тогда $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BA}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BS} - 2\overrightarrow{BA}\right) \times \times \left(\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BS}^2 + \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BS} - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right)$.

Учитывая, что $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = 1$ и $\left|\overrightarrow{BS}\right| = b$, получим:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\left(b^2 + b \cdot 1 \cdot \cos\alpha - 2b \cdot 1 \cdot \cos\alpha - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60°\right) = \frac{1}{4}\left(b^2 - b\cos\alpha - 1\right).$$

Ненулевые векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$ будут перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0. Таким образом, $\frac{1}{4}\left(b^2 - b\cos\alpha - 1\right) = 0$.

Из треугольника ABS: $b\cos\alpha = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$, значит, $b^2 = \frac{3}{2}$, то есть $b = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Векторный базис и вспомогательный угол можно ввести и по-другому, например, $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ и плоский угол при вершине S.

Возможен также способ решения, использующий вспомогательный объем.

Критерии проверки:

+ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

± *верный ход рассуждений, но при заключительном счете допущена арифметическая ошибка*

∓ *объяснено, почему задача сводится к условию перпендикулярности медиан, а дальнейшее решение отсутствует или содержит ошибки*

− *приведен только ответ*

11.6. На окружности отмечено 20 точек. Сколько существует таких троек хорд с концами в этих точках, что каждая хорда пересекает каждую (возможно, в концах)?

Ответ: 156180.

Решение. Концами искомых хорд могут являться 3, 4, 5 или 6 точек. Разберем эти случаи.

1) Концами хорд являются 3 точки (см. рис. 11.6а). Их можно выбрать C_{20}^{3} способами. Соединить каждую тройку точек хордами попарно можно единственным способом.

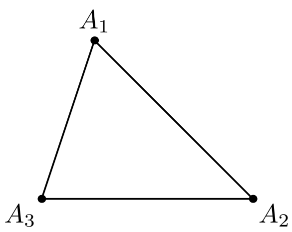


Рис. 11.6а

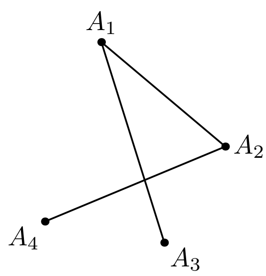


Рис. 11.6б

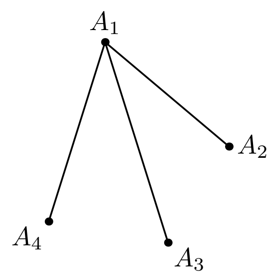


Рис. 11.6в

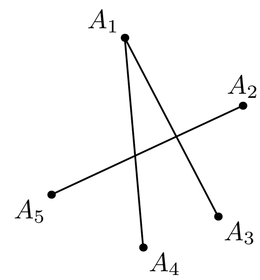


Рис. 11.6г

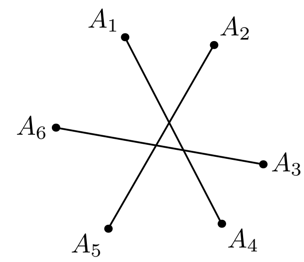


Рис. 11.6д

2) Концами хорд являются 4 точки. Возможны два случая взаимного расположения хорд (см. рис. 11.6б, в). Четыре точки можно выбрать C_{20}^{4} способами. Для каждой четверки точек существует 8 способов их соединить хордами попарно.

3) Концами хорд являются 5 точек. В этом случае ровно две хорды имеют общую вершину, третья хорда соединяет две оставшиеся точки (см. рис. 11.6д). Пять точек можно выбрать C_{20}^{5} способами. Для каждой пятерки точек существуют пять вариантов проведения хорд (по количеству точек, в которых сходятся две хорды).

4) Концами хорд являются 6 точек (см. рис. 11.6е). Шесть точек можно выбрать C_{20}^{6} способами. Для каждой шестерки точек есть единственный способ проведения хорд, так как хорды должны попарно пересекаться во внутренних точках.

Таким образом, всего способов проведения хорд будет

$$C_{20}^{3}+C_{20}^{4}\cdot 8+C_{20}^{5}\cdot 5+C_{20}^{6}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{2\cdot 3}+\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=$$
$$=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{2\cdot 3}\left(1+34+\frac{17\cdot 16}{4}+\frac{17\cdot 16\cdot 15}{4\cdot 5\cdot 6}\right)=10\cdot 19\cdot 6\cdot(35+68+34)=10\cdot 19\cdot 6\cdot 137=156180.$$

Ответ может быть оставлен в виде $C_{20}^{3}+C_{20}^{4}\cdot 8+C_{20}^{5}\cdot 5+C_{20}^{6}$.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *верно разобраны все случаи, но при итоговом подсчете допущена арифметическая ошибка*

$\mp$ *верно разобраны какие-то отдельные случаи*

$-$ *приведен только ответ*