Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **7 класс** 8.12.2013

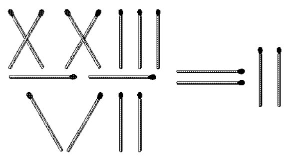
Работа рассчитана на **180** *минут*

1. Запишите несколько раз подряд число **2013** так, чтобы получившееся число делилось на **9**. Ответ объясните.

2. Высота комнаты — **3** метра. При ее ремонте выяснилось, что на каждую стену уходит краски больше, чем на пол. Может ли площадь пола этой комнаты быть больше, чем **10** квадратных метров? Ответ объясните.

3. Вчера Саша варил суп и положил мало соли, суп пришлось досаливать. Сегодня он положил соли в два раза больше, но все равно суп пришлось досаливать, правда, уже вдвое меньшим количеством соли, чем вчера. Во сколько раз Саше нужно увеличить сегодняшнюю порцию соли, чтобы завтра не пришлось досаливать? (*Каждый день Саша варит одинаковые порции супа.*)

4. Из спичек выложено неверное равенство (см. рисунок). Покажите, как переложить одну спичку, чтобы получилось равенство, в котором значения левой и правой частей различаются меньше, чем на **0,1**.



5. В сумме $+1+3+9+27+81+243+729$ можно вычеркивать любые слагаемые и изменять некоторые знаки перед оставшимися числами с «+» на «−». Маша хочет таким способом сначала получить выражение, значение которого равно **1**, затем, начав сначала, получить выражение, значение которого равно **2**, затем (снова начав сначала) получить **3**, и так далее. До какого наибольшего целого числа ей удастся это сделать без пропусков?

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **7 класс** 8.12.2013

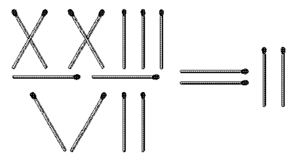
Работа рассчитана на **180** *минут*

1. Запишите несколько раз подряд число **2013** так, чтобы получившееся число делилось на **9**. Ответ объясните.

2. Высота комнаты — **3** метра. При ее ремонте выяснилось, что на каждую стену уходит краски больше, чем на пол. Может ли площадь пола этой комнаты быть больше, чем **10** квадратных метров? Ответ объясните.

3. Вчера Саша варил суп и положил мало соли, суп пришлось досаливать. Сегодня он положил соли в два раза больше, но все равно суп пришлось досаливать, правда, уже вдвое меньшим количеством соли, чем вчера. Во сколько раз Саше нужно увеличить сегодняшнюю порцию соли, чтобы завтра не пришлось досаливать? (*Каждый день Саша варит одинаковые порции супа.*)

4. Из спичек выложено неверное равенство (см. рисунок). Покажите, как переложить одну спичку, чтобы получилось равенство, в котором значения левой и правой частей различаются меньше, чем на **0,1**.



5. В сумме $+1+3+9+27+81+243+729$ можно вычеркивать любые слагаемые и изменять некоторые знаки перед оставшимися числами с «+» на «−». Маша хочет таким способом сначала получить выражение, значение которого равно **1**, затем, начав сначала, получить выражение, значение которого равно **2**, затем (снова начав сначала) получить **3**, и так далее. До какого наибольшего целого числа ей удастся это сделать без пропусков?

XXV Математический праздник (городская олимпиада для 6–7 классов) пройдёт в МГУ им. М. В. Ломоносова 16 февраля 2014 года.

Начало в 10.00. Приглашаются все желающие!

Регистрация и подробная информация на сайте

http://olympiads.mccme.ru/matprazdnik/

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **8 класс** 8.12.2013

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. В записи $*+*+*+*+*+*+*+* = **$ замените звёздочки различными цифрами так, чтобы равенство было верным.

2. Про различные числа $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ известно, что $\boldsymbol{\frac{a}{b} + a = \frac{b}{a} + b}$. Найдите $\boldsymbol{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

3. В параллелограмме $\boldsymbol{ABCD}$ из вершины тупого угла $\boldsymbol{B}$ проведены высоты $\boldsymbol{BM}$ и $\boldsymbol{BN}$, а из вершины $\boldsymbol{D}$ — высоты $\boldsymbol{DP}$ и $\boldsymbol{DQ}$. Докажите, что точки $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ являются вершинами прямоугольника.

4. На доске были записаны числа **3**, **9** и **15**. Разрешалось сложить два записанных числа, вычесть из этой суммы третье, а результат записать на доску вместо того числа, которое вычиталось. После многократного выполнения такой операции на доске оказались три числа, наименьшее из которых было **2013**. Каковы были два остальных числа?

5. На сторонах $\boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{CD}$ квадрата $\boldsymbol{ABCD}$ отмечены точки $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{K}$ соответственно так, что $\boldsymbol{\angle BAM = \angle CKM = 30^\circ}$. Найдите $\boldsymbol{\angle AKD}$.

6. Саша начертил квадрат размером $\boldsymbol{6 \times 6}$ клеток и поочередно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма. (*Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.*)

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **8 класс** 8.12.2013

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. В записи $*+*+*+*+*+*+*+* = **$ замените звёздочки различными цифрами так, чтобы равенство было верным.

2. Про различные числа $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ известно, что $\boldsymbol{\frac{a}{b} + a = \frac{b}{a} + b}$. Найдите $\boldsymbol{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

3. В параллелограмме $\boldsymbol{ABCD}$ из вершины тупого угла $\boldsymbol{B}$ проведены высоты $\boldsymbol{BM}$ и $\boldsymbol{BN}$, а из вершины $\boldsymbol{D}$ — высоты $\boldsymbol{DP}$ и $\boldsymbol{DQ}$. Докажите, что точки $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ являются вершинами прямоугольника.

4. На доске были записаны числа **3**, **9** и **15**. Разрешалось сложить два записанных числа, вычесть из этой суммы третье, а результат записать на доску вместо того числа, которое вычиталось. После многократного выполнения такой операции на доске оказались три числа, наименьшее из которых было **2013**. Каковы были два остальных числа?

5. На сторонах $\boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{CD}$ квадрата $\boldsymbol{ABCD}$ отмечены точки $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{K}$ соответственно так, что $\boldsymbol{\angle BAM = \angle CKM = 30^\circ}$. Найдите $\boldsymbol{\angle AKD}$.

6. Саша начертил квадрат размером $\boldsymbol{6 \times 6}$ клеток и поочередно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма. (*Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.*)

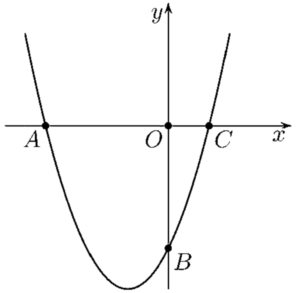
LXXVII Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов)
пройдет в МГУ 2 марта 2014 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие!
Предварительная регистрация и подробная информация на сайте
http://olympiads.mccme.ru/mmo/

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **9 класс** 8.12.2013

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. На доске записано несколько последовательных натуральных чисел. Ровно **52%** из них — четные. Сколько четных чисел записано на доске?



2. На рисунке изображен график функции $\boldsymbol{y = x^2 + ax + b}$. Известно, что прямая $\boldsymbol{AB}$ перпендикулярна прямой $\boldsymbol{y = x}$. Найдите длину отрезка $\boldsymbol{OC}$.

3. В равнобедренный треугольник $\boldsymbol{ABC}$ $(\boldsymbol{AB = BC})$ вписана окружность с центром $\boldsymbol{O}$, которая касается стороны $\boldsymbol{AB}$ в точке $\boldsymbol{E}$. На продолжении стороны $\boldsymbol{AC}$ за точку $\boldsymbol{A}$ выбрана точка $\boldsymbol{D}$ так, что $\boldsymbol{AD = \frac{1}{2}AC}$. Докажите, что прямые $\boldsymbol{DE}$ и $\boldsymbol{AO}$ параллельны.

4. В квадратной таблице размером $\boldsymbol{100 \times 100}$ некоторые клетки закрашены. Каждая закрашенная клетка является единственной закрашенной клеткой либо в своем столбце, либо в своей строке. Какое наибольшее количество клеток может быть закрашено?

5. Высоты $\boldsymbol{AD}$ и $\boldsymbol{BE}$ остроугольного треугольника $\boldsymbol{ABC}$ пересекаются в точке $\boldsymbol{H}$. Окружность, описанная около треугольника $\boldsymbol{ABH}$, пересекает стороны $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BC}$ в точках $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ соответственно. Найдите $\boldsymbol{FG}$, если $\boldsymbol{DE = 5}$ см.

6. Двадцать пять монет раскладывают по кучкам следующим образом. Сначала их произвольно разбивают на две группы. Затем любую из имеющихся групп снова разбивают на две группы, и так далее до тех пор, пока каждая группа не будет состоять из одной монеты. При каждом разбиении какой-либо группы на две записывается произведение количеств монет в двух получившихся группах. Чему может быть равна сумма всех записанных чисел?

III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт 4 и 5 февраля 2014 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXVII Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов) пройдет в МГУ 2 марта 2014 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие! Предварительная регистрация и подробная информация на сайте

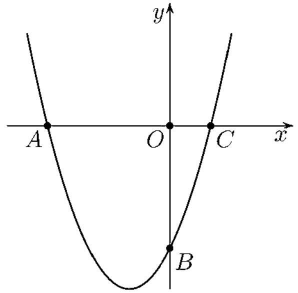
http://olympiads.mccme.ru/mmo/

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **9 класс** 8.12.2013

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. На доске записано несколько последовательных натуральных чисел. Ровно **52%** из них — четные. Сколько четных чисел записано на доске?



2. На рисунке изображен график функции $\boldsymbol{y = x^2 + ax + b}$. Известно, что прямая $\boldsymbol{AB}$ перпендикулярна прямой $\boldsymbol{y = x}$. Найдите длину отрезка $\boldsymbol{OC}$.

3. В равнобедренный треугольник $\boldsymbol{ABC}$ $(\boldsymbol{AB = BC})$ вписана окружность с центром $\boldsymbol{O}$, которая касается стороны $\boldsymbol{AB}$ в точке $\boldsymbol{E}$. На продолжении стороны $\boldsymbol{AC}$ за точку $\boldsymbol{A}$ выбрана точка $\boldsymbol{D}$ так, что $\boldsymbol{AD = \frac{1}{2}AC}$. Докажите, что прямые $\boldsymbol{DE}$ и $\boldsymbol{AO}$ параллельны.

4. В квадратной таблице размером $\boldsymbol{100 \times 100}$ некоторые клетки закрашены. Каждая закрашенная клетка является единственной закрашенной клеткой либо в своем столбце, либо в своей строке. Какое наибольшее количество клеток может быть закрашено?

5. Высоты $\boldsymbol{AD}$ и $\boldsymbol{BE}$ остроугольного треугольника $\boldsymbol{ABC}$ пересекаются в точке $\boldsymbol{H}$. Окружность, описанная около треугольника $\boldsymbol{ABH}$, пересекает стороны $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BC}$ в точках $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ соответственно. Найдите $\boldsymbol{FG}$, если $\boldsymbol{DE = 5}$ см.

6. Двадцать пять монет раскладывают по кучкам следующим образом. Сначала их произвольно разбивают на две группы. Затем любую из имеющихся групп снова разбивают на две группы, и так далее до тех пор, пока каждая группа не будет состоять из одной монеты. При каждом разбиении какой-либо группы на две записывается произведение количеств монет в двух получившихся группах. Чему может быть равна сумма всех записанных чисел?

III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт 4 и 5 февраля 2014 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXVII Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов) пройдет в МГУ 2 марта 2014 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие! Предварительная регистрация и подробная информация на сайте

http://olympiads.mccme.ru/mmo/

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **10 класс** 8.12.2013

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. Первый член последовательности равен $\mathbf{934}$. Каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на $\mathbf{13}$. Найдите $\mathbf{2013}$-й член последовательности.

2. Корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2+bx+c$ равны m_1 и m_2, а корни квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 + px + q$ равны k_1 и k_2. Докажите, что $f(k_1) + f(k_2) + g(m_1) + g(m_2) \geqslant 0$.

3. Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведен перпендикуляр AE. Найдите угол CEF.

4. Найдите наибольшее значение выражения $a + b + c + d - ab - bc - cd - da$, если каждое из чисел a, b, c и d принадлежит отрезку $[0; 1]$.

5. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне AC — точка M. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Оказалось, что углы APB, BPC и CPA равны по $120°$, а площадь четырехугольника $AKPM$ равна площади треугольника BPC. Найдите угол BAC.

6. В клетки таблицы размером 9×9 расставили все натуральные числа от $\mathbf{1}$ до $\mathbf{81}$. Вычислили произведения чисел в каждой строке таблицы и получили набор из девяти чисел. Затем вычислили произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получили набор из девяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт 4 и 5 февраля 2014 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXVII Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов) пройдет в МГУ 2 марта 2014 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие! Предварительная регистрация и подробная информация на сайте

http://olympiads.mccme.ru/mmo/

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **10 класс** 8.12.2013

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. Первый член последовательности равен $\mathbf{934}$. Каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на $\mathbf{13}$. Найдите $\mathbf{2013}$-й член последовательности.

2. Корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2+bx+c$ равны m_1 и m_2, а корни квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 + px + q$ равны k_1 и k_2. Докажите, что $f(k_1) + f(k_2) + g(m_1) + g(m_2) \geqslant 0$.

3. Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведен перпендикуляр AE. Найдите угол CEF.

4. Найдите наибольшее значение выражения $a + b + c + d - ab - bc - cd - da$, если каждое из чисел a, b, c и d принадлежит отрезку $[0; 1]$.

5. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне AC — точка M. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Оказалось, что углы APB, BPC и CPA равны по $120°$, а площадь четырехугольника $AKPM$ равна площади треугольника BPC. Найдите угол BAC.

6. В клетки таблицы размером 9×9 расставили все натуральные числа от $\mathbf{1}$ до $\mathbf{81}$. Вычислили произведения чисел в каждой строке таблицы и получили набор из девяти чисел. Затем вычислили произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получили набор из девяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт 4 и 5 февраля 2014 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXVII Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов) пройдет в МГУ 2 марта 2014 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие! Предварительная регистрация и подробная информация на сайте

http://olympiads.mccme.ru/mmo/

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **11 класс** 8.12.2013

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. Сережа и Миша, гуляя по парку, набрели на поляну, окруженную липами. Сережа пошел вокруг поляны, считая деревья. Миша сделал то же самое, но начал с другого дерева (хотя пошел в ту же сторону). Дерево, которое у Сережи было **20**-м, у Миши было **7**-м, а дерево, которое у Сережи было **7**-м, у Миши было **94**-м. Сколько деревьев росло вокруг поляны?

2. В треугольнике ABC угол C равен $75°$, а угол B равен $60°$. Вершина M равнобедренного прямоугольного треугольника BCM с гипотенузой BC расположена внутри треугольника ABC. Найдите угол MAC.

3. Для квадратного трехчлена $f(x)$ и некоторых действительных чисел l, t и v выполнены равенства: $f(l) = t+v$, $f(t) = l+v$, $f(v) = l+t$. Докажите, что среди чисел l, t и v есть равные.

4. На экране компьютера — число **12**. Каждую секунду число на экране умножают или делят либо на **2**, либо на **3**. Результат действия возникает на экране вместо записанного числа. Ровно через минуту на экране появилось число. Могло ли это быть число **54**?

5. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, ребро основания которой равно **1**. Из вершин A и B основания ABC проведены медианы боковых граней, не имеющие общих точек. Известно, что на прямых, содержащих эти медианы, лежат ребра некоторого куба. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

6. На окружности отмечено **20** точек. Сколько существует таких троек хорд с концами в этих точках, что каждая хорда пересекает каждую (возможно, в концах)?

III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт 4 и 5 февраля 2014 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXVII Московская математическая олимпиада:
http://olympiads.mccme.ru/mmo/
Объединенная межвузовская математическая олимпиада:
http://olimpiada.ru/ommo
Внимание! У обеих олимпиад в январе пройдёт **обязательный** заочный тур.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **11 класс** 8.12.2013

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. Сережа и Миша, гуляя по парку, набрели на поляну, окруженную липами. Сережа пошел вокруг поляны, считая деревья. Миша сделал то же самое, но начал с другого дерева (хотя пошел в ту же сторону). Дерево, которое у Сережи было **20**-м, у Миши было **7**-м, а дерево, которое у Сережи было **7**-м, у Миши было **94**-м. Сколько деревьев росло вокруг поляны?

2. В треугольнике ABC угол C равен $75°$, а угол B равен $60°$. Вершина M равнобедренного прямоугольного треугольника BCM с гипотенузой BC расположена внутри треугольника ABC. Найдите угол MAC.

3. Для квадратного трехчлена $f(x)$ и некоторых действительных чисел l, t и v выполнены равенства: $f(l) = t+v$, $f(t) = l+v$, $f(v) = l+t$. Докажите, что среди чисел l, t и v есть равные.

4. На экране компьютера — число **12**. Каждую секунду число на экране умножают или делят либо на **2**, либо на **3**. Результат действия возникает на экране вместо записанного числа. Ровно через минуту на экране появилось число. Могло ли это быть число **54**?

5. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, ребро основания которой равно **1**. Из вершин A и B основания ABC проведены медианы боковых граней, не имеющие общих точек. Известно, что на прямых, содержащих эти медианы, лежат ребра некоторого куба. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

6. На окружности отмечено **20** точек. Сколько существует таких троек хорд с концами в этих точках, что каждая хорда пересекает каждую (возможно, в концах)?

III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт 4 и 5 февраля 2014 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXVII Московская математическая олимпиада:
http://olympiads.mccme.ru/mmo/
Объединенная межвузовская математическая олимпиада:
http://olimpiada.ru/ommo
Внимание! У обеих олимпиад в январе пройдёт **обязательный** заочный тур.