7 класс

7.1. В тридевятом царстве есть только два вида монет: 16 и 27 тугриков. Можно ли заплатить за одну тетрадку ценой в 1 тугрик и получить сдачу?

Ответ: да, можно.

Решение. Например, можно заплатить тремя монетами по 27 тугриков и получить сдачу пятью монетами по 16 тугриков.

Возможны и другие примеры, которые приведем в общем виде:

а) *заплатить* $3 + 16n$ *монет по* 27 *тугриков и получить сдачу* $5 + 27n$ *монет по* 16 *тугриков, где* n *— натуральное число*;

б) *заплатить* $22 + 27m$ *монет по* 16 *тугриков и получить сдачу* $13 + 16m$ *монет по* 27 *тугриков, где* m *— натуральное число или ноль.*

Эти примеры получаются из следующих соображений. Понятно, что платить и получать сдачу монетами одного достоинства бессмысленно. Следовательно, необходимо подобрать такие целые числа x *и* y*, чтобы выполнялось равенство* $16x + 27y = 1$.

Отметим, что уравнение вида $ax + by = c$ *имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда число* c *кратно НОД*$(a; b)$.

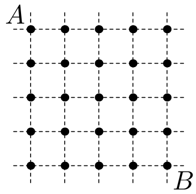
Критерии проверки:

\+ *приведены верный ответ и пример*

± *приведено несколько примеров, среди которых есть как верные, так и неверные*

− *задача не решена или решена неверно*

7.2. Соедините точки A и B (см. рисунок) ломаной из четырех отрезков одинаковой длины так, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:



1) концами отрезков могут быть только какие-то из отмеченных точек;

2) внутри отрезков не должно быть отмеченных точек;

3) соседние отрезки не должны лежать на одной прямой.

(*Достаточно привести один пример.*)

Ответ: возможен один из вариантов проведения ломаной, показанных на рис. 7.2 а, б, в (с точностью до симметрии относительно прямой AB).

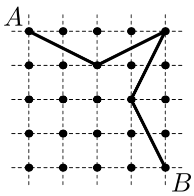


Рис. 7.2а

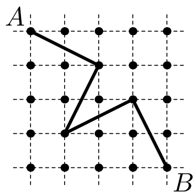


Рис. 7.2б

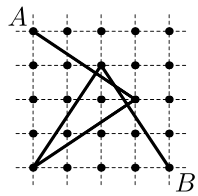


Рис. 7.2в

Критерии проверки:

\+ *приведен верный пример*

± *приведено несколько примеров, среди которых есть как верные, так и неверные*

− *задача не решена или решена неверно*

7.3. У юного художника была одна банка синей и одна банка желтой краски, каждой из которых хватает на покраску **38 дм^2** площади. Использовав всю эту краску, он нарисовал картину: синее небо, зеленую траву и желтое солнце. Зеленый цвет он получал, смешивая две части желтой краски и одну часть синей. Какая площадь на его картине закрашена каждым цветом, если площадь травы на картине на **6 дм^2** больше, чем площадь неба?

Ответ: синим закрашено 27 дм^2, зеленым — 33 дм^2, а желтым — 16 дм^2.

Решение. *Первый способ.* Обозначим площади, закрашенные синим (blue), зеленым (green) и желтым (yellow) цветом, как B, G и Y соответственно. Так как зеленый цвет получается смешением двух частей желтой краски и одной части синей, то на закрашивание зеленым цветом площади G расходуется количество желтой краски, соответствующее площади $\frac{2}{3}G$, а синей — $\frac{1}{3}G$. Учитывая, что вся синяя краска была израсходована, составим уравнение: $B + \frac{1}{3}G = 38$. Кроме того, по условию, G на 6 дм^2 больше, чем B, то есть $B = G - 6$. Подставив значение В составленное уравнение, получим, что $G = 33$, значит, $B = 27$.

Так как вся желтая краска также была израсходована, то $Y + \frac{2}{3}G = 38$. Подставив в это равенство значение $G = 33$, получим, что $Y = 16$.

Второй способ. Обозначим через x одну часть, пошедшую на получение зеленой краски. Тогда желтой краской покрашено $(38 - 2x)$ дм^2, зеленой — $3x$ дм^2, а синей — $(38 - x)$ дм^2. Поскольку по условию зеленым покрашено на 6 дм^2 больше, чем синим, то $3x - 6 = 38 - x$. Отсюда $x = 11$, следовательно, желтой краской покрашено $38 - 2 \cdot 11 = 16$ дм^2, зеленой $3 \cdot 11 = 33$ дм^2, синей $38 - 11 = 27$ дм^2.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное рассуждение, найдены все три площади, но допущена арифметическая ошибка*

$\pm$ *приведено верное рассуждение, но найдены только две площади из трех*

$\mp$ *верно составлено уравнение (система уравнений), но оно (она) не решено (решена)*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

7.4. Биолог последовательно рассаживал 150 жуков в десять банок. Причем в каждую следующую банку он сажал жуков больше, чем в предыдущую. Количество жуков в первой банке составляет не менее половины от количества жуков в десятой банке. Сколько жуков в шестой банке?

Ответ: в шестой банке — 16 жуков.

Решение. Пусть в первой банке x жуков, тогда во второй банке — не меньше, чем $x + 1$ жуков, в третьей — не меньше, чем $x + 2$ жука, и так далее. Таким образом, в десятой банке не меньше, чем $x + 9$ жуков. Следовательно, общее количество жуков не меньше, чем $10x + 45$. Учитывая, что всего рассаживали 150 жуков, получим: $x \leqslant 10$.

С другой стороны, в десятой банке должно быть не больше, чем $2x$ жуков, в девятой — не больше, чем $2x - 1$ жуков, и так далее. Это означает, что в первой банке — не больше, чем $2x - 9$ жуков, а всего жуков — не больше, чем $20x - 45$. Так как всего рассаживали 150 жуков, то $x \geqslant 10$.

Таким образом, в первой банке ровно 10 жуков, а в последней банке — 19 или 20. Найдем сумму одиннадцати последовательных чисел, начиная с десяти: $10 + 11 + \ldots + 19 + 20 = 165$. Так как всего должно быть 150 жуков, то отсутствует банка, в которой 15 жуков. Следовательно, рассадка определяется однозначно: 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19 и 20 жуков с первой по десятую банку соответственно. Значит, в шестой банке — 16 жуков.

Доказав, что $x \leqslant 10$, можно продолжить рассуждения иначе. Так как в десятой банке не меньше, чем $x+9$ жуков, причем $x+9 \leqslant 2x$, то $x \geqslant 9$. Затем рассмотреть два случая: $x = 9$ и $x = 10$, оценивая количество жуков в десятой банке.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верные, в целом, оценки количества жуков как «сверху», так и «снизу», которые содержат некоторые пробелы*

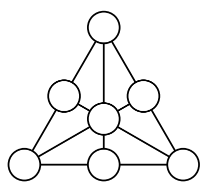
$\pm$ *приведены верные обоснованные оценки количества жуков как «сверху», так и «снизу», верно найдена рассадка жуков по банкам, но ответ на вопрос задачи неверен или отсутствует*

$\mp$ *верно проведена только одна из двух требуемых оценок*

$\mp$ *верно указана рассадка жуков по банкам, но она не обоснована*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*



7.5. Можно ли в кружках (см. рисунок) разместить различные натуральные числа таким образом, чтобы суммы трех чисел вдоль каждого отрезка оказались равными?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Пусть требуемая расстановка существует, S — сумма всех расставленных чисел, a и b — числа, стоящие в кружках, расположенных в каких-либо двух вершинах треугольника. Тогда для той вершины, в которой стоит число a, сумма чисел вдоль трех отрезков, содержащих эту вершину, равна $S + 2a$. Аналогично, для вершины, в которой стоит число b, эта сумма равна $S + 2b$. Так как суммы чисел вдоль любого отрезка равны, то и суммы чисел вдоль трех отрезков также равны, то есть $S + 2a = S + 2b$, откуда следует, что $a = b$. Но это противоречит условию, где сказано, что все числа должны быть различными. Таким образом, требуемой расстановки не существует, что и требовалось доказать.

Аналогичное рассуждение можно проводить для любой пары кружков, через каждый из которых проходит ровно три отрезка.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, рассуждение, которое содержит некоторые пробелы или недочеты*

$\mp$ *найдена идея суммирования чисел по трем отрезкам, содержащим один и тот же кружок, но дальнейших продвижений нет*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

8 класс

8.1. Графики трех функций $y = ax + a$, $y = bx + b$ и $y = cx + d$ имеют общую точку, причем $a \neq b$. Обязательно ли $c = d$? Ответ обоснуйте.

Ответ: да, обязательно.

Решение. *Первый способ.* Общую точку графиков первых двух функций можно найти из системы:

$$\begin{cases} y = ax + a, \\ y = bx + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + a, \\ ax + a = bx + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + a, \\ (a - b)x + (a - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + a, \\ (a - b)(x + 1) = 0. \end{cases}$$

Так как $a \neq b$, то решением системы является $x = -1$, $y = 0$.

Из условия задачи следует, что точка $(-1, 0)$ принадлежит и графику третьей функции. Тогда $0 = -c + d$, то есть $c = d$.

Второй способ. Если $x = -1$, $y = 0$, то уравнения $y = ax + a$ и $y = bx + b$ обращаются в верные равенства при любых значениях a и b. Поэтому точка $(-1; 0)$ принадлежит первым двум графикам (прямым). Так как $a \neq b$, то эти прямые различны, значит, другой общей точки у них нет. Следовательно, точка $(-1; 0)$ принадлежит и графику третьей функции. Тогда $0 = -c + d$, то есть $c = d$.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

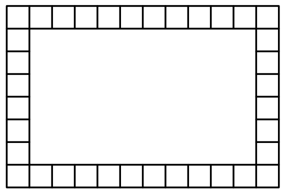
$\pm$ *приведено верное, в целом, рассуждение, но единственность общей точки не показана (не использовано условие $a \neq b$)*

$\mp$ *верно найдена или угадана общая точка первых двух графиков, но дальнейших продвижений нет*

$\mp$ *верный ответ получен в результате рассмотрения конкретных числовых значений коэффициентов*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*



8.2. Из клетчатой бумаги вырезана прямоугольная рамка (см. рисунок). Ее разрезали по границам клеток на девять частей и сложили из них квадрат 6×6. Могли ли все части, полученные при разрезании, оказаться различными? (*При складывании квадрата части можно переворачивать.*)

Ответ: да, могли.

Решение. На рис. 8.2а показано, каким образом может быть разрезана рамка в соответствии с условием задачи, а на рис. 8.2б — как из получившихся частей сложить квадрат.

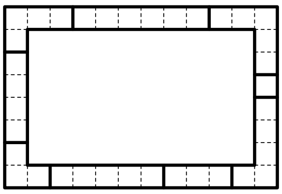


Рис. 8.2а

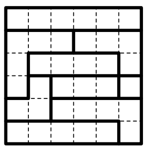


Рис. 8.2б

Возможны и другие способы решения.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верные рисунки, показывающие, как разрезать и как складывать*

$\pm$ *приведен только верный способ складывания квадрата, из которого можно восстановить способ разрезания рамки*

$\mp$ *приведен верный способ разрезания рамки, но как сложить квадрат, не показано*

$-$ *приведен только ответ (без примера)*

$-$ *задача не решена или решена неверно, например, какие-то части, полученные при разрезании, оказались одинаковыми*

8.3. Вершину A параллелограмма $ABCD$ соединили отрезками с серединами сторон BC и CD. Один из этих отрезков оказался вдвое длиннее другого. Определите, каким является угол BAD: острым, прямым или тупым.

Ответ: тупым.

Решение. Пусть N — середина BC, M — середина CD, $AN = 2AM$ (см. рис. 8.3 а, б).

Первый способ. Через точку M проведем прямую, параллельную BC. Она пересечет AB в точке K, причем $AK = KB$ (см. рис. 8.3а). Тогда по теореме Фалеса $AP = PN = 0{,}5AN = AM$. В равнобедренном треугольнике APM $\angle AMP = \angle APM < 90^\circ$, так как это углы при его основании. Следовательно, $\angle PAD = 180^\circ - \angle APM > 90^\circ$. Так как $\angle BAD > \angle PAD$, то $\angle BAD > 90^\circ$.

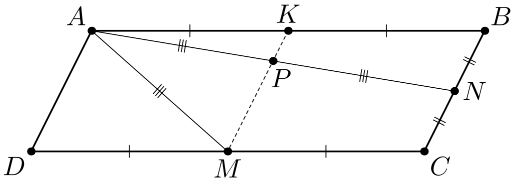


Рис. 8.3а

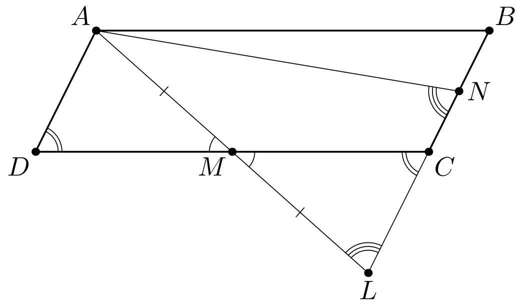


Рис. 8.3б

Второй способ. Продлим отрезок AM до пересечения с прямой BC в точке L. Треугольники DAM и CLM равны по стороне и двум прилежащим углам (см. рис. 8.3б). Следовательно, $AM = ML$, тогда $AL = 2AM = AN$. В равнобедренном треугольнике ANL $\angle ANL = \angle ALN < 90^\circ$. Угол ANL — внешний для треугольника ABN, значит, $\angle ABN < \angle ANL < 90^\circ$. Значит, $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABN > 90^\circ$.

Отметим, что, независимо от способа решения, последующее сравнение углов может осуществляться не только указанными способами.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное, в целом, решение, содержащее несущественные пробелы*

$\pm$ *полностью доказано, что угол BAD — не острый, но не доказано, что он не может быть прямым*

$\mp$ *доказано только, что угол BAD не может быть прямым*

$\mp$ *верный ответ получен в результате рассмотрения частных случаев*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

8.4. Три пирата вечером поделили добытые за день бриллианты: по двенадцать Биллу и Сэму, а остальные — Джону, который считать не умел. Ночью Билл у Сэма, Сэм у Джона, а Джон у Билла украли по одному бриллианту. В результате средняя масса бриллиантов у Билла уменьшилась на один карат, у Сэма уменьшилась на два карата, зато у Джона увеличилась на четыре карата. Сколько бриллиантов досталось Джону?

Ответ: 9 бриллиантов.

Решение. *Первый способ* («арифметический»). Заметим, что количество бриллиантов у каждого пирата за ночь не изменилось. Так как у Билла — 12 бриллиантов, а их средняя масса уменьшилась на 1 карат, то сумма их масс уменьшилась на 12 каратов. Аналогично, у Сэма — также 12 бриллиантов, их средняя масса уменьшилась на 2 карата, поэтому сумма их масс уменьшилась на 24 карата. Поскольку масса бриллиантов у Билла и Сэма уменьшилась на 36 каратов, то у Джона она на те же 36 каратов увеличилась. Так как средняя масса бриллиантов Джона увеличилась на 4 карата, то у него было $36 : 4 = 9$ бриллиантов.

Второй способ («алгебраический»). Пусть Джону досталось x бриллиантов. Обозначим среднюю массу бриллиантов, доставшихся Биллу, через b, Сэму — через s, Джону — через d. Тогда сумма масс бриллиантов у Билла была равна $12b$, у Сэма — $12s$, у Джона — xd.

Наутро количество бриллиантов у каждого не изменилось, а средняя масса бриллиантов стала: у Билла— $(b-1)$, у Сэма — $(s-2)$, у Джона — $(d+4)$. Сумма масс бриллиантов стала: у Билла — $12(b-1)$, у Сэма — $12(s-2)$, у Джона — $x(d+4)$. Так как сумма масс бриллиантов у трёх пиратов не изменилась, то $12b + 12s + xd = 12(b-1) + 12(s-2) + x(d+4)$. Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим: $4x - 36 = 0$, то есть $x = 9$.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное, в целом, решение, но допущена арифметическая ошибка*

$\mp$ *уравнение составлено верно, но не решено или решено неверно*

$\mp$ *верный ответ получен на конкретном примере*

— *приведен только ответ*

— *задача не решена или решена неверно*

8.5. В треугольнике ABC угол B равен 120°, $AB = 2BC$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает AC в точке D. Найдите отношение $AD : DC$.

Ответ: $AD : DC = 2 : 3$.

Решение. *Первый способ.* Пусть M — середина стороны AB. Опустим перпендикуляр CH на прямую AB (см. рис. 8.5а). В прямоугольном треугольнике BHC: $\angle HBC = 60^\circ$, тогда $\angle BCH = 30^\circ$, поэтому $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}AM$. Значит, $HM : MA = 3 : 2$. Так как $MD \parallel CH$, то по теореме о пропорциональных отрезках $CD : DA = HM : MA = 3 : 2$.

Второй способ. Пусть M – середина стороны AB. Продлим отрезок DM до пересечения с продолжением стороны BC в точке K (см. рис. 8.5б). Так как точка K лежит на серединном перпендикуляре к AB, то $KA = KB$. В равнобедренном треугольнике AKB $\angle ABK = 60^\circ$, значит, этот треугольник — равносторонний. Тогда $KC = KB + BC = \frac{1}{2}AB + AB = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}KA$. Высота KM треугольника AKB является и его биссектрисой, значит, KD — биссектриса треугольника AKC. По свойству биссектрисы треугольника $CD : DA = KC : KA = 3 : 2$.

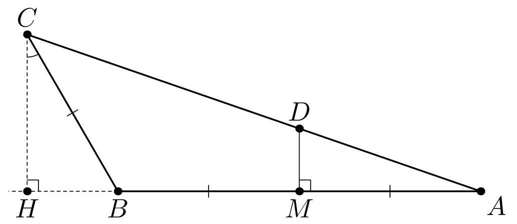


Рис. 8.5а

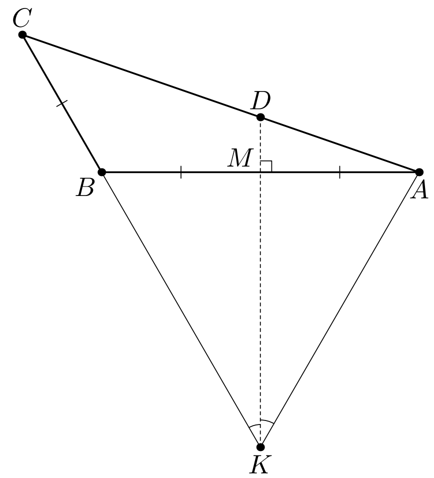


Рис. 8.5б

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное, в целом, решение, но допущены незначительные пробелы или неточности*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

6. Гномы сели за круглый стол и голосованием решили много вопросов. По каждому вопросу можно было голосовать «за», «против» или воздержаться. Если оба соседа какого-либо гнома по какому-нибудь вопросу выбрали один и тот же вариант ответа, то при голосовании по следующему вопросу он выберет этот же вариант. А если они выбрали два разных варианта, то при голосовании по следующему вопросу гном выберет третий вариант. Известно, что по вопросу «Блестит ли золото?» все гномы проголосовали «за», а по вопросу «Страшен ли Дракон?» Торин воздержался. Сколько могло быть гномов? (*Опишите все возможности и докажите, что других нет.*)

Ответ: количество гномов могло быть любым, кратным 4.

Решение. Если по какому-либо вопросу гномы проголосовали единогласно, то после этого они всегда будут голосовать точно так же. Поэтому вопрос о драконе обсуждался раньше, чем вопрос о золоте.

Возможно, что перед вопросом о золоте гномы уже несколько раз единогласно голосовали «за». Рассмотрим последний вопрос, по которому был несогласный гном (а такой точно был, что следует из условия про Торина). Пусть этот гном голосовал «против». Для того, чтобы его соседи в следующий раз проголосовали «за», гномы, сидящие от него через одного, должны были воздержаться. Аналогично, гномы, сидящие от них через одного, должны были голосовать «против», и так далее. Получаем цепочку ...П?В?П?В?..., где «П» и «В» обозначают голосовавших «против» и воздержавшихся, а знаки вопроса — гномов, мнение которых нас не интересует. В случае, если несогласный гном воздержался, получаем такую же цепочку.

Если количество гномов — четное, то цепочка должна замкнуться, а это значит, что в ней одинаковое количество «В» и «П». Тогда количество гномов, обозначенных «В» и «П», четно, а количество всех гномов — вдвое больше.

Если же количество гномов — нечетное, то расставив по кругу «В» и «П», мы продолжим их ставить вместо знаков вопроса, то есть гномы расположатся по кругу парами: ...ВВППВВПП..., что противоречит тому, что их количество нечетно.

Осталось показать на примере, что любое количество гномов, кратное 4, удовлетворяет условию задачи. Для этого, пусть они сначала проголосуют про дракона так: ...ВВППВВПП... (один из «В» — это Торин), а потом про золото единогласно «за».

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *решение, в целом, верное, но содержит один или более из трех недочетов*: 1) *не пояснено, почему про дракона проголосовали раньше, чем про золото*; 2) *не приведен пример*; 3) *предполагается, что вопросы о драконе и о золоте обсуждались подряд*

$\mp$ *приведены только верный ответ и пример голосования, его подтверждающий*

$\mp$ *верно разобран только один из двух случаев* (*четности или нечетности количества гномов*)

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

9 класс

9.1. В круговом шахматном турнире участвовало шесть человек: два мальчика и четыре девочки. Могли ли мальчики по итогам турнира набрать в два раза больше очков, чем девочки? (*В круговом шахматном турнире каждый игрок играет с каждым по одной партии. За победу дается* 1 *очко, за ничью* 0,5, *за поражение* — 0).

Ответ: нет, не могли.

Решение. В круговом турнире из шести участников разыгрывается $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ очков, причем каждый участник может набрать не более пяти очков. Если бы мальчики набрали в два раза больше очков, чем девочки, то они набрали 10 очков на двоих, то есть по 5 очков каждый. Но тогда оба должны были выиграть все партии, что невозможно (в личной встрече кто-то из них должен потерять очки).

Утверждение задачи верно и в более общей формулировке: в турнире $3n$ участников, из которых n мальчиков и $2n$ девочек.

Критерии проверки:

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, решение с незначительными пробелами в обоснованиях*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

9.2. Про коэффициенты a, b, c и d двух квадратных трехчленов $x^2 + bx + c$ и $x^2 + ax + d$ известно, что $0 < a < b < c < d$. Могут ли эти трехчлены иметь общий корень?

Ответ: нет, не могут.

Решение. Поскольку коэффициенты обоих трехчленов положительны, то их корни не могут быть положительными (это можно получить из теоремы Виета или непосредственной подстановкой).

Пусть x_0 — общий корень этих трехчленов. Тогда $x_0^2 + bx_0 + c = 0$ и $x_0^2 + ax_0 + d = 0$, следовательно, $x_0^2 + bx_0 + c = x_0^2 + ax_0 + d$. Преобразовав это равенство, получим, что $x_0(b - a) = d - c$. Из условия задачи следует, что $d - c > 0$ и $b - a > 0$, то есть, $x_0 > 0$, противоречие.

Отметим, что условие положительности коэффициентов является существенным. Например, трехчлены: $x^2 - 4x + 3$ и $x^2 - 5x + 4$ имеют общий корень 1, *при этом* $-5 < -4 < 3 < 4$.

Критерии проверки:

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *доказано только, что если есть общий корень, то он положительный (см. вторую часть решения), иными словами, никак не использовано, что коэффициенты больше нуля*

$-$ *приведен только верный ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

9.3. Дан треугольник ABC. Прямая, параллельная AC, пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно, а медиану AM — в точке Q. Известно, что $PQ = 3$, а $QT = 5$. Найдите длину AC.

Ответ: $AC = 11$.

Решение. *Первый способ.* Проведем через точку Q прямую, параллельную BC (N и L — точки пересечения этой прямой со сторонами AB и AC соответственно, см. рис. 9.3а). Поскольку AM — медиана треугольника ABC, то $LQ = NQ$, кроме того, $PT \parallel AC$, то есть, PQ — средняя линия в треугольнике ANL. Тогда $AL = 2PQ = 6$. Кроме того, $QL \parallel TC$ и $QT \parallel LC$, следовательно, $LQTC$ — параллелограмм, откуда $LC = QT = 5$. Таким образом, $AC = AL + LC = 6 + 5 = 11$.

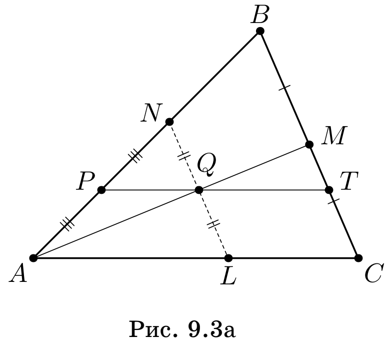


Рис. 9.3а

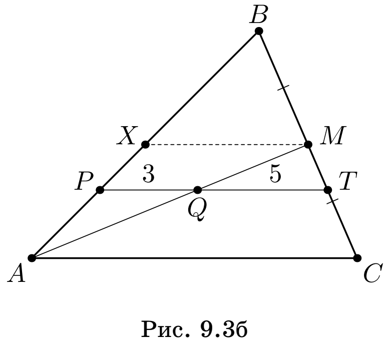


Рис. 9.3б

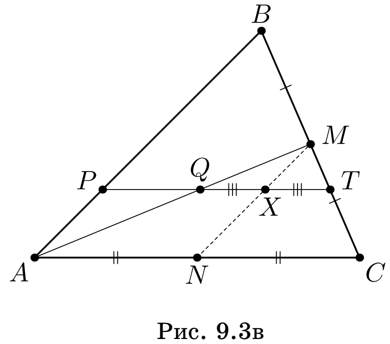


Рис. 9.3в

Второй способ. Проведем среднюю линию XM в треугольнике ABC (см. рис. 9.3б). Тогда $XM \parallel PT \parallel AC$, следовательно, $\Delta APQ \sim \Delta AXM$ и $\Delta QMT \sim \Delta AMC$, откуда следует, что $\frac{PQ}{XM} = \frac{AQ}{AM}$ и $\frac{QT}{AC} = \frac{QM}{AM}$, то есть, $\frac{PQ}{XM} + \frac{QT}{AC} = 1$. Подставляя значения из условия задачи и учитывая, что $AC = 2MX$, получим $\frac{6}{AC} + \frac{5}{AC} = 1$, откуда $AC = 11$.

Третий способ. Проведем среднюю линию MN в треугольнике ABC (см. рис. 9.3в). Поскольку $QT \parallel AC$, то QT делится отрезком MN пополам. Из подобия треугольников APQ и MXQ получим, что $\frac{AQ}{QM} = \frac{3}{2{,}5} = \frac{6}{5}$. Тогда $\frac{MQ}{AM} = \frac{5}{11}$, откуда $\frac{QT}{AC} = \frac{5}{11}$, то есть $AC = 11$.

Четвертый способ. Запишем теорему Менелая для треугольника BPT и прямой AM: $\frac{PQ}{QT} \cdot \frac{TM}{MB} \cdot \frac{BA}{AP} = 1$. Пусть $BP = x$, $AP = y$. Тогда $\frac{BT}{TC} = \frac{x}{y}$ и $\frac{TM}{MB} = \left(\frac{x+y}{2} - y\right) : \frac{x+y}{2} = \frac{x-y}{x+y}$. Таким образом, $\frac{3}{5} \cdot \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{x+y}{y} = 1$, откуда $\frac{x-y}{y} = \frac{5}{3}$, то есть, $\frac{x}{y} = \frac{8}{3}$. Поскольку $\frac{PT}{AC} = \frac{x}{x+y}$, то $AC = 11$.

Критерии проверки:

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное, в целом, решение, в котором допущена арифметическая ошибка*

$\mp$ *задача не решена, но есть верная идея дополнительного построения*

$-$ *приведен только верный ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

$-$ *рассмотрен частный случай (например, задача решена для равнобедренного треугольника)*

9.4. Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать НОД (наибольший общий делитель) этих чисел?

Ответ: 91.

Решение. *Пример.* Рассмотрим девять чисел, равных 91, и число 182. Их сумма равна 1001.

Оценка. Докажем, что значение, большее 91, НОД принимать не может. Заметим, что $1001 = 7 \times 11 \cdot 13$. Так как каждое слагаемое в данной сумме делится на НОД, то НОД является делителем числа 1001. С другой стороны, меньшее слагаемое в сумме (а значит и НОД) не больше, чем 101. Осталось заметить, что 91 — наибольший из делителей числа 1001, удовлетворяющий этому условию.

Критерии проверки:

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный ответ, доказана оценка, но не приведен пример*

$\mp$ *приведены только верный ответ и пример десяти чисел*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

9.5. Четырехугольник $ABCD$ — вписанный. На его диагоналях AC и BD отметили точки K и L соответственно, так, что $AK = AB$ и $DL = DC$. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.

Решение. *Первый способ.* Поскольку четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle BAC = \angle BDC$ (см. рис. 9.5). Тогда в равнобедренных треугольниках ABK и DLC равны и углы при основаниях, следовательно, $\angle BLC = \angle BKC$, то есть, четырехугольник $BCKL$ — вписанный. Таким образом, $\angle KLO = \angle BCO = \angle BDA$, то есть, $KL \parallel AD$.

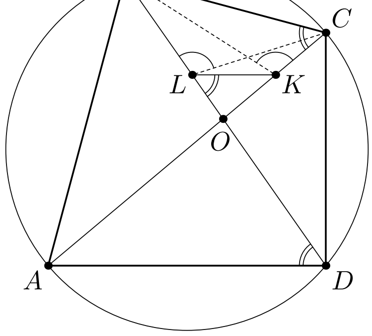


Рис. 9.5

Второй способ. Из условия и подобия треугольников AOB и DOC, получим, что $\frac{AO}{DO} = \frac{AB}{DC} = \frac{AK}{DL}$, откуда $\frac{AK}{AO} = \frac{DL}{DO}$. Следовательно, $\frac{OK}{AO} = \frac{OL}{DO}$, значит, треугольники AOD и KOL подобны. Тогда $\angle KLO = \angle ADO$, то есть, $KL \parallel AD$.

Критерии проверки:

+ полное обоснованное решение

∓ доказано только, что четырехугольник BCKL — вписанный

− задача не решена или решена неверно

− рассмотрен только частный случай

9.6. Из шахматной доски размером 8×8 вырезали квадрат размером 2×2 так, что оставшуюся доску удалось разрезать на прямоугольники размером 1×3. Определите, какой квадрат могли вырезать. (*Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*)

Ответ: могли вырезать любой из девяти квадратов, закрашенных на рисунке 9.6в.

Решение. Раскрасим шахматную доску в три цвета по диагоналям, начиная с левого нижнего угла доски (см. рис. 9.6а). Тогда при разрезании части доски на прямоугольники 1×3 в каждом прямоугольнике окажутся клетки всех трех цветов. Следовательно, после вырезания квадрата клеток каждого из цветов на доске должно остаться поровну. До вырезания на доске 21 клетка цвета 1, 22 клетки цвета 2 и 21 клетка цвета 3.

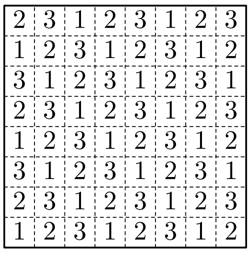


Рис. 9.6а

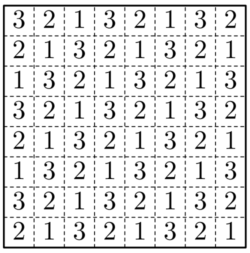


Рис. 9.6б

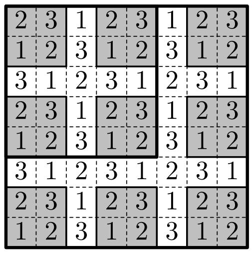


Рис. 9.6в

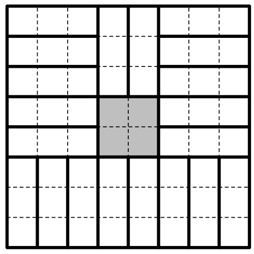


Рис. 9.6г

Следовательно, вырезали квадрат, в котором две клетки цвета 2 и по клетке цвета 1 и 3. Таких квадратов много. Однако, заметим, что мы можем раскрасить доску еще тремя аналогичными способами — начиная с правого нижнего угла доски, с правого верхнего или с левого верхнего (пример раскраски, начинающейся с правого нижнего угла, см. на рис. 9.6б). При каждом способе раскраски количество клеток каждого цвета остается неизменным.

Следовательно, могли быть вырезаны только те квадраты, которые при любом способе раскраски содержат две клетки цвета 2 и по клетке цвета 1 и 3. Таких квадратов 9, см. рис. 9.6в.

Покажем, как разрезать оставшуюся доску для каждого из девяти случаев. Заметим, что вырезанный квадрат находится в одном из угловых квадратов 5×5, см. рис. 9.6в. То есть, достаточно показать, как разрезать на прямоугольники 1×3 квадрат 5×5 без одного из угловых квадратов 2×2 и оставшуюся часть доски. Это показано на рис. 9.6г.

Критерии проверки:

+ полное обоснованное решение

± приведены верный ответ, показано, что другие квадраты не могли быть вырезаны, но не объяснено, как именно проводится разрезание

∓ приведен только верный ответ или ответ с указанием, как разрезать оставшуюся часть доски

∓ присутствует верная идея раскраски, но допущена ошибка в ответе или решение не доведено до конца

− задача не решена или решена неверно

10 класс

10.1. Если разделить 2014 на 105, то в частном получится 19 и в остатке тоже 19. На какие ещё натуральные числа можно разделить 2014, чтобы частное и остаток совпали? (*Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*)

Ответ: ещё на 52, на 1006 и на 2013.

Решение. Если 2014 разделили на натуральное число N и получили в частном и в остатке натуральное число k то $2014 = Nk + k = k(N+1)$, причём $k < N$. Следовательно, k — делитель числа 2014. Из приведённого в условии примера следует, что $2014 = 105 \cdot 19 + 19 = 19 \cdot 106$, что помогает разложить 2014 на простые множители: $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.

Теперь видно, что, помимо 19, у числа 2014 есть ещё делители 1, 2 и 38, которые порождают такие примеры на деление: $2014 = 1 \cdot 2014 = 2013 \cdot 1 + 1$, $2014 = 2 \cdot 1007 = 1006 \cdot 2 + 2$ и $2014 = 38 \cdot 53 = 52 \cdot 38 + 38$. Если же в качестве значений k рассматривать остальные делители числа 2014 (53, 106, 1007 и 2014), то они порождают значения N, не удовлетворяющие неравенству $k < N$, поэтому других решений нет.

Критерии проверки

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение* (*в ответ может быть как включено, так и не включено число* 105)

$\pm$ *доказано, что остаток является делителем* 2014, *и приведен верный ответ, но не доказано, что другие делители не дают новых ответов*

$\pm$ *приведено верное рассуждение, но один из возможных ответов пропущен*

$\mp$ *доказано, что остаток является делителем* 2014, *но верный ответ не получен*

$\mp$ *приведен верный ответ и показано только, что он удовлетворяет условию*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

10.2. Докажите, что если в выражении $(x^2 - x + 1)^{2014}$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то какой-нибудь коэффициент полученного многочлена будет отрицательным.

Решение. *Первый способ.* Докажем, что у полученного многочлена коэффициент при x будет отрицательным. Подобные слагаемые с буквенной частью x образуются при перемножении 2014 одинаковых скобок следующим образом: в одной из скобок берется слагаемое $(-x)$, а в остальных скобках — слагаемое 1. Следовательно, после приведения подобных слагаемых коэффициент при x будет равен (-2014).

Аналогичные рассуждения можно провести и для коэффициента при x^{4027}, причем в обоих случаях достаточно объяснить, почему отрицательно каждое из слагаемых с соответствующей буквенной частью, а сам коэффициент можно не вычислять.

Второй способ. Найдем сумму коэффициентов после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых. Она будет равна значению полученного многочлена при $x = 1$. Но это же значение получится, если подставить $x = 1$ в исходное выражение $(x^2 - x + 1)^{2014}$. Следовательно, эта сумма равна 1. Заметим, что в полученном многочлене коэффициент при x^{4028} (старший член) равен 1 и свободный член равен 1. Следовательно, должен быть хотя бы один отрицательный коэффициент.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение* (*любым из способов*)

$\pm$ *при решении первым способом объяснено почему коэффициент при x* (*или при x^{4027}*) *получится отрицательным, но сам коэффициент вычислен неверно*

$\mp$ *верно указано какой именно коэффициент будет отрицательным, но не объяснено, почему это так*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

10.3. В пространстве (но не в одной плоскости) расположены шесть различных точек: A, B, C, D, E и F. Известно, что отрезки AB и DE, BC и EF, CD и FA попарно параллельны. Докажите, что эти же отрезки попарно равны.

Решение. *Первый способ.* В плоскости ABC есть пара пересекающихся прямых AB и BC, которые соответственно параллельны прямым DE и EF в плоскости DEF. Следовательно, плоскости ABC и DEF параллельны (по признаку параллельности плоскостей), а CD и AF — отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, значит, $CD = AF$ (по свойству параллельных прямых, пересекающих две параллельные плоскости).

Аналогично доказывается, что $AB = DE$ и $BC = EF$.

Второй способ. Сумма векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{FA}$ равна $\overrightarrow{0}$, причем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ — некомпланарные. Так как $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$, то $\overrightarrow{DE} = k_1\overrightarrow{AB}$, где k_1 — некоторое число. Аналогично, $\overrightarrow{EF} = k_2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FA} = k_3\overrightarrow{CD}$. Тогда $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA} = (1+k_1)\overrightarrow{AB}+(1+k_2)\overrightarrow{BC}+(1+k_3)\overrightarrow{CD}$.

В силу некомпланарности векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ коэффициенты при каждом из слагаемых должны равняться нулю, то есть $k_1 = k_2 = k_3 = -1$, а это и означает равенство рассматриваемых отрезков.

Отметим, что условие расположения точек не в одной плоскости является существенным. Действительно, если заданные шесть точек лежат в одной плоскости, то указанного равенства отрезков может и не быть. Например, «отрежем» от каждой вершины правильного треугольника со стороной 4 по правильному треугольнику со стороной 1 и получим шестиугольник ABCDEF, в котором выполняется попарная параллельность отрезков, но не выполняется их равенство. Поэтому верное решение задачи должно по существу использовать тот факт, что заданные точки не лежат в одной плоскости.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение (любым из способов)*

$\pm$ *приведено верное, в целом, рассуждение, в котором допущены несущественные пробелы или неточности*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

10.4. Каждый день, с понедельника по пятницу, ходил старик к синему морю и закидывал в море невод. При этом каждый день в невод попадалось не больше рыбы, чем в предыдущий. Всего за пять дней старик поймал ровно 100 рыбок. Какое наименьшее суммарное количество рыбок он мог поймать за три дня — понедельник, среду и пятницу?

Ответ: 50.

Решение. Если в каждый из первых четырех дней старик ловил по 25 рыб, а в пятницу не поймал ничего, то условия задачи выполнены, и за указанные три дня поймано ровно 50 рыб.

Докажем, что в указанные дни меньше, чем 50 рыб, поймано быть не могло. Действительно, пусть в эти дни поймано меньше, чем 50 рыб. Так как во вторник и в четверг старик поймал рыб не больше, чем в понедельник и в среду, то во вторник и в четверг также поймано меньше, чем 50 рыб. Тем самым, в сумме за пять дней поймано меньше ста рыб, что противоречит условию.

Оценку (вторую часть решения) можно записать алгебраически, причем различными способами. Пусть с понедельника по пятницу старик последовательно ловил $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5$ рыб. Тогда:

1) *если* $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 100$, *то* $a_1+a_3+a_5 = 100-(a_2+a_4) \geqslant 100-(a_1+a_3)$. *Следовательно,* $2a_1 + 2a_3 + a_5 \geqslant 100$. *Так как* $2a_5 \geqslant a_5$, *то* $a_1 + a_3 + a_5 \geqslant 50$.

2) *Так как* $a_1 \geqslant \frac{a_1+a_2}{2}$, $a_3 \geqslant \frac{a_3+a_4}{2}$, $a_5 \geqslant \frac{a_5}{2}$, *то* $a_1 + a_3 + a_5 \geqslant \frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2} + \frac{a_5}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{2} = 50$.

Критерии проверки

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\mp$ *приведены только верный ответ и пример*

$\mp$ *доказана только оценка*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

Жюри полагает, что сюжет задачи никак не должен навести решающего на мысль, что каждый день старик обязательно ловит хотя бы одну рыбку (да и в сказке Пушкина старику доводилось вытаскивать лишь тину). Однако, если решающий чётко демонстрирует такое понимание условия и обоснованно находит ответ 51, то ему следует поставить оценку +. Промежуточные критерии на эту ситуацию не распространяются.

10.5. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника AMN является точкой пересечения высот треугольника ABC. Найдите угол ABC.

Ответ: 45°.

Решение. Пусть H – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC. Тогда высота AT треугольника ABC содержит медиану треугольника AMN, то есть пересекает отрезок MN в его середине — точке E (см. рис. 10.5 а, б). Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Так как $MN \parallel AB$, то треугольники ETN и ATB подобны (см. рис. 10.5а), следовательно, $\frac{TN}{TB} = \frac{TE}{TA} = \frac{EN}{AB} = \frac{1}{4}$. Пусть $TN = x$, $TE = y$, тогда $BN = 3x$, $AE = 3y$.

Следовательно, $CT = CN - TN = 2x$, а $EH = \frac{1}{3}AE = y$ (по свойству точки пересечения медиан треугольника).

Заметим, что в прямоугольных треугольниках CTH и BTA $\frac{CT}{BT} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$ и $\frac{HT}{AT} = \frac{2y}{4y} = \frac{1}{2}$. Значит, эти треугольники подобны. Следовательно, $\angle TCH = \angle TBA$. Но CH — часть высоты CQ треугольника ABC, поэтому эти равные углы являются острыми углами прямоугольного треугольника CQB, то есть каждый из них равен $45°$.

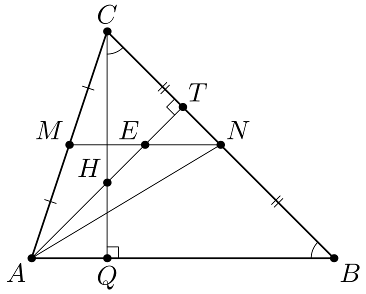


Рис. 10.5а

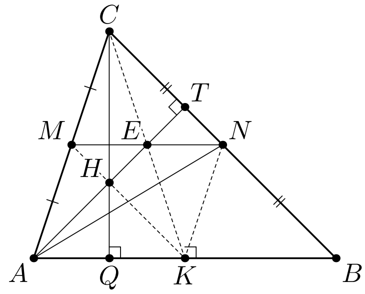


Рис. 10.5б

Второй способ. Отметим точку K — середину стороны AB (см. рис. 10.5б). Тогда $AMNK$ — параллелограмм, его диагональ MK проходит через середину AN, поэтому она проходит и через точку H.

Так как $MH \parallel BC$, то треугольники EMH и ENT равны (по стороне и двум прилежащим углам), значит, $EH = ET$. Медиана CK треугольника ABC проходит через точку E и делится в ней пополам, поэтому $CHKT$ — параллелограмм, следовательно, $TK \parallel CH$.

Но CH — часть высоты CQ треугольника ABC, поэтому $TK \perp AB$. Таким образом, TK является высотой и медианой прямоугольного треугольника ATB, значит, этот треугольник — равнобедренный, поэтому $\angle ABC = 45°$.

Существуют и другие способы решения. В частности, несложно доказать, что в данном треугольнике прямая Эйлера OH (O — центр описанной окружности треугольника ABC) параллельна AB. Тогда выполняется равенство $\operatorname{tg}\angle A \cdot \operatorname{tg}\angle B = 3$ (*см., например, В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии*, №5.110). *Используя этот факт и некоторые дополнительные соображения, которые следуют из условия задачи, можно вычислить не только угол ABC, но и остальные углы данного треугольника.*

Критерии проверки

\+ *приведено полное обоснованное решение*

± *приведено верное, в целом, рассуждение, в котором допущены несущественные пробелы или неточности*

− *приведен только ответ*

− *задача не решена или решена неверно*

10.6. В одной из вершин шестиугольника лежит золотая монета, а в остальных ничего не лежит. Кощей Бессмертный чахнет над златом и каждое утро снимает с одной вершины произвольное количество монет, после чего тут же кладёт на соседнюю вершину в шесть раз больше монет. Если к исходу какого-то дня во всех вершинах будет поровну монет, Кощей станет Властелином Мира. Докажите, что хоть злата у него сколько угодно, но Властелином Мира ему не бывать.

Решение. Занумеруем вершины шестиугольника, начиная с той, где лежит монета, последовательными натуральными числами от 1 до 6 (двигаясь, например, против часовой стрелки). Обозначим через n_1, n_2, ..., n_6 — количества монет, лежащих в вершинах 1, 2, ..., 6 соответственно. Пусть $N_1 = n_1 + n_3 + n_5$, $N_2 = n_2 + n_4 + n_6$.

Рассмотрим разность $N_1 - N_2$ и докажем, что при указанных действиях Кощея остаток от ее деления на 7 не изменяется. Действительно, если из какой-то вершины шестиугольника Кощей забирает x монет, а в соседнюю вершину добавляет $6x$ монет, то значение $N_1 - N_2$ изменяется на $7x$.

Заметим, что в начальный момент $N_1 - N_2 = 1$. Поэтому цель Кощея — уравнять количество монет во всех вершинах, а значит сделать так, чтобы $N_1 - N_2$ было равно нулю, — недостижима.

Критерии проверки

\+ *приведено полное обоснованное решение*

± *приведено верное, в целом, рассуждение, в котором допущены несущественные пробелы или неточности*

− *задача не решена или решена неверно*

11 класс

11.1. Не используя калькулятора, определите знак числа

$$(\cos(\cos 1) - \cos 1)(\sin(\sin 1) - \sin 1).$$

Ответ: отрицательное число.

Решение. Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому из неравенства $0 < \sin 1 < 1 < \frac{\pi}{2}$ следует, что $\sin(\sin 1) < \sin 1$, то есть $\sin(\sin 1) - \sin 1 < 0$. Функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому из неравенства $0 < \cos 1 < 1 < \frac{\pi}{2}$ следует, что $\cos(\cos 1) > \cos 1$, то есть $\cos(\cos 1) - \cos 1 > 0$.

Таким образом, $(\cos(\cos 1) - \cos 1)(\sin(\sin 1) - \sin 1) < 0$.

Критерии проверки

+ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное, в целом, решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.2. Какое наименьшее количество множителей требуется вычеркнуть из числа $99! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 99$ так, чтобы произведение оставшихся множителей оканчивалось на 2?

Ответ: 20 множителей.

Решение. Из числа 99! необходимо вычеркнуть все множители кратные 5, иначе произведение будет оканчиваться на 0. Всего таких множителей (оканчивающихся на 0 или на 5) — 19.

Произведение оставшихся множителей оканчивается на 6. Действительно, так как произведение $1\times2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9$ оканчивается на 6, то аналогичные произведения в каждом следующем десятке также оканчиваются на 6. Следовательно, вычеркнуть 19 множителей недостаточно. А 20 достаточно. Если вычеркнуть еще число, оканчивающееся на 3 или на 8, то произведение чисел в соответствующем десятке будет оканчиваться на 2. Произведение этого числа на число, оканчивающееся на 6, также оканчивается на 2.

Критерии проверки

+ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы*

$\mp$ *приведены верный ответ и верный пример, но не объяснено, почему указанное количество вычеркнутых множителей — наименьшее*

$\mp$ *приведен верный ответ, но в рассуждениях неверно указаны какие-то из вычеркиваемых чисел*

$\mp$ *верный ход решения, но допущена ошибка, повлиявшая на ответ*

$\mp$ *приведена оценка без примера*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.3. Существует ли тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = AC = AD = BC$, а суммы плоских углов при каждой из вершин B и C равны по $150°$?

Ответ: нет, не существует.

Решение. Предположим, что такой тетраэдр существует. Тогда его грани DAB и DAC — равнобедренные треугольники. Пусть $\angle ADB = \angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \beta$, $\angle DCB = \gamma$, $\angle ADC = \angle ACD = \delta$, тогда $\angle BDC = 180° - \beta - \gamma$ (см. рис. 11.3).

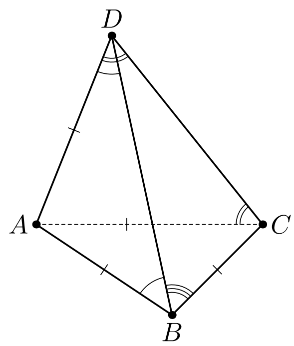


Рис. 11.3

Так как треугольник ABC — равносторонний, то из условия задачи следует, что $\alpha+\beta = \gamma+\delta = 90°$, значит, $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$. Тогда $\angle BDC = 180° - \beta - \gamma = \alpha+\delta$, то есть $\angle BDC = \angle BDA + \angle CDA$. Это противоречит свойству трехгранного угла: в любом трехгранном угле сумма двух плоских углов больше третьего. Полученное противоречие показывает, что тетраэдра, удовлетворяющего условию, не существует.

Критерии проверки

+ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

Указанное выше свойство трехгранного угла достаточно сформулировать. Наличие или отсутствие его доказательства в работе школьника не влияет на оценку решения.

11.4. При каких значениях x и y верно равенство

$$x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}?$$

Ответ: при $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

Решение. *Первый способ.* После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим:

$$x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + \frac{2}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(4x^2 - 4xy + y^2) + \frac{3}{2}\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(2x-y)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y = 0, \\ y - \frac{2}{3} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Второй способ. Перепишем уравнение в виде: $x^2 - yx + \left(y^2 - y + \frac{1}{3}\right) = 0$ и рассмотрим его как квадратное уравнение относительно x. Тогда $D = y^2 - 4y^2 + 4y - \frac{4}{3} = -3y^2 + 4y - \frac{4}{3} = -3\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = -3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2$. Квадратное уравнение имеет корни, если $D = -3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \geqslant 0$, то есть, если $y = \frac{2}{3}$. Подставив это значение в исходное уравнение, получим, что $x = \frac{1}{3}$.

Третий способ. Используя неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим (для неотрицательных чисел) и тот факт, что $|a| \geqslant a$, получим:

$$\sqrt{\frac{x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2}{3}} \geqslant \frac{|x| + |1-y| + |x-y|}{3} \geqslant \frac{x + (1-y) + (y-x)}{3} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = 1 - y = y - x$, то есть при $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

Четвертый способ. Пусть $a = x$, $b = 1 - y$, $c = y - x$, тогда $a + b + c = 1$ и $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}$.

Рассмотрим векторы: $\overrightarrow{m}(a; b; c)$, $\overrightarrow{n}(1; 1; 1)$. Их модули: $\left|\overrightarrow{m}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\overrightarrow{n} = \sqrt{3}$.

Таким образом, $\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{m}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|$, следовательно, рассматриваемые векторы коллинеарны. Тогда их координаты пропорциональны: $\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$, то есть $a = b = c = \frac{1}{3}$. Значит, $x = 1 - y = y - x$, значит, $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

Критерии проверки

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение* (*любым из способов*)

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы*

$\mp$ *приведен верный ход решения, но допущены ошибки, которые привели к неверному ответу*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.5. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружности с центрами A и C проходят через точку B, вторично пересекаются в точке F и пересекают описанную около треугольника ABC окружность w в точках D и E. Отрезок BF пересекает окружность w в точке O. Докажите, что O — центр описанной окружности треугольника DEF.

Решение. *Первый способ.* Докажем сначала, что $OE = OF$. Для этого не нужна окружность с центром в точке A. Рассмотрим чертеж без нее (см. рис 11.5а). Пусть в окружности с центром C центральный угол BCE равен 2α. Тогда вписанный угол EFB равен α.

В окружности ω углы BCE и BOE — вписанные и опираются на одну дугу, значит, $\angle BOE = \angle BCE = 2\alpha$. Угол BOE — внешний угол треугольника EOF. Следовательно, $\angle OEF = \angle BOE - \angle OFE = \alpha$, то есть треугольник EOF — равнобедренный: $OE = OF$.

Аналогично, рассмотрев окружность с центром A, доказывается, что $OF = OD$. Следовательно, O — центр описанной окружности треугольника DEF.

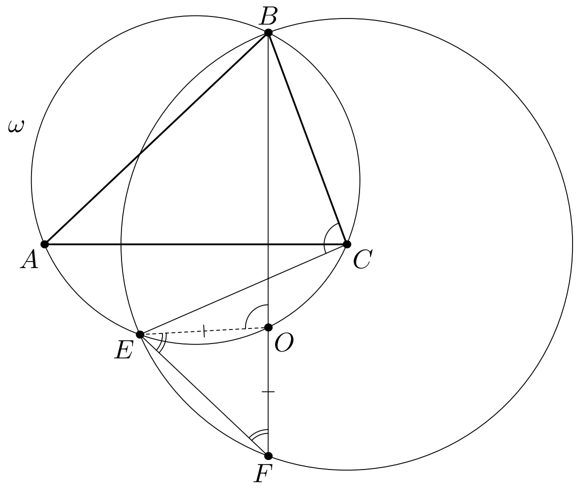


Рис. 11.5а

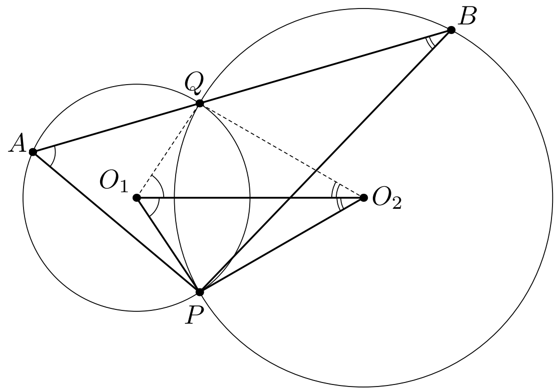


Рис. 11.5б

Второй способ. **Лемма.** Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках P и Q. Через точку Q проведена прямая, вторично пересекающая окружности в точках A и B соответственно. Тогда треугольники PO_1O_2 и PAB подобны.

Доказательство. Возможны два случая взаимного расположения точек Q, A и B (см. рис. 11.5 б. в), но доказательство от этого не зависит. Пусть $\angle QBP = \beta$, тогда $\angle QO_2P = 2\beta$. Луч O_2O_1 является биссектрисой угла QO_2P. Следовательно, $\angle O_1O_2P = \beta = \angle QBP$. Аналогично, $\angle O_2O_1P = \angle QAP$. Таким образом, треугольники PO_1O_2 и PAB подобны.

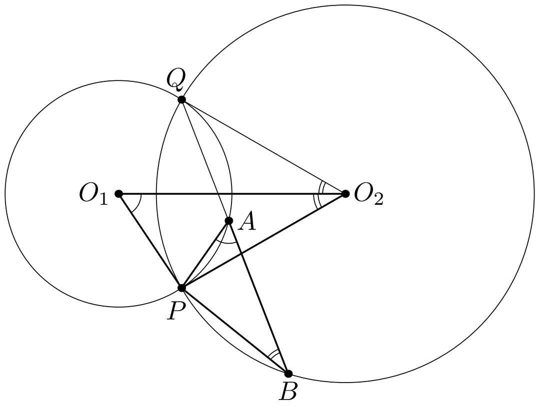


Рис. 11.5в

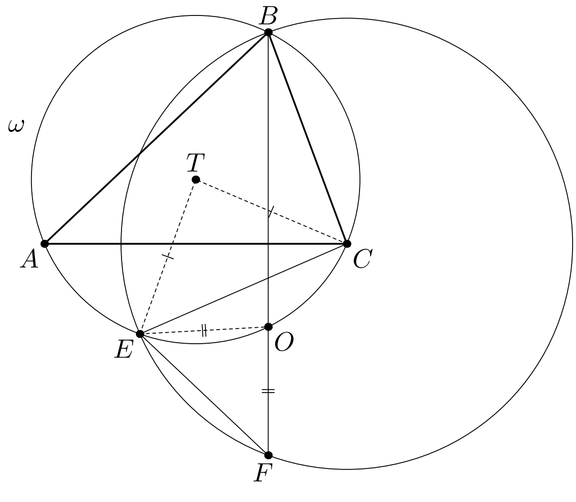


Рис. 11.5г

Перейдем теперь к решению задачи. Докажем сначала, что $OE = OF$. Для этого опять рассмотрим чертеж без окружность с центром в точке A (см. рис. 11.5г).

Пусть T — центр окружности ω, описанной около треугольника ABC. Тогда по лемме треугольники EOF и ETC подобны. Треугольник ETC — равнобедренный: $ET = TC$. Следовательно, треугольник EOF — также равнобедренный: $EO = OF$, что и требовалось.

Аналогично доказывается, что $OF = OD$. Следовательно, O — центр описанной окружности треугольника DEF.

Критерии проверки

+ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение* (*любым из способов*)

± приведены верный ответ и верное, в целом, решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы

∓ в работе есть верная идея решения, но до конца оно не доведено

− задача не решена или решена неверно

Лемма о подобии может быть использована без доказательства только при условии, что она сформулирована в явном виде.

11.6. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр «1000». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?

Ответ: процесс обязательно прекратится.

Решение. *Первый способ.* Пусть исходная последовательность содержит n единиц, тогда ее удобно записать в виде: $\underbrace{0\ldots0}_{a_1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{a_n}1\underbrace{0\ldots0}_{a_{n+1}}$, где числа a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} обозначают количество нулей, стоящих слева от самой левой единицы, между соседними единицами, и после самой правой единицы соответственно (какие-то из этих чисел могут быть равны нулю). Заметим, что указанная операция не изменяет количество единиц в последовательности, поэтому замена «01» на «1000» означает, что слева от некоторой единицы на один нуль стало меньше, а справа — стало на три нуля больше. Заметим также, что количество возможных операций зависит от количества единиц, суммарного количества нулей, стоящих левее каждой единицы, и количества нулей, возникших в результате выполнения всех операций. Оно не зависит от порядка выполнения операций, так как если две единицы оказались рядом, то с правой единицей указанную операцию выполнить невозможно (относительный порядок единиц в последовательности не изменяется).

Таким образом, с участием самой левой единицы можно провести a_1 операций, с участием следующей единицы — $(3a_1 + a_2)$ операции, с участием следующей единицы — $3(3a_1 + a_2) + a_3$ операции, и так далее, с участием самой правой единицы — $(3^{n-1}a_1 + 3^{n-2}a_2 + \ldots + 3a_{n-1} + a_n)$ операций.

Так как с каждой из единиц можно совершить конечное количество операций, то и со всем набором можно совершить только конечное количество операций.

Отметим, что указывать точное количество операций необязательно — важно показать, что их конечное число. Например, решение можно было завершить следующим образом:

Если левее некоторой единицы расположено x нулей, а правее y нулей, то с этой единицей можно совершить не более x операций, при этом правее этой единицы окажется не более $3x + y$ нулей. То есть, если непосредственно левее какой-либо единицы расположено конечное количество нулей, то с этой единицей можно сделать конечное количество операций и правее нее образуется конечное количество нулей.

Таким образом, с участием первой единицы можно провести a_1 (конечное количество) операций, а правее нее образуется $3a_1 + a_2$ (конечное количество) нулей. Аналогично, с участием второй единицы можно провести конечное количество операций, а правее нее образуется конечное количество нулей. И так далее, с каждой очередной единицей можно совершить конечное количество операций, а, значит, со всей последовательностью можно совершить конечное количество операций.

Второй способ. Каждую операцию можно понимать как «ход» какой-то единицы: единица меняется местами со стоящим перед нею нулём, а потом после нуля появляются ещё два нуля. Пусть ежеминутно делается один такой ход, и процесс продолжается бесконечно долго. Тогда найдутся единицы, которые «ходили» бесконечное число раз. Рассмотрим самую левую из них и покрасим её в красный цвет. Все единицы левее красной через несколько минут перестанут перемещаться. После этого красная единица каждым своим ходом будет перемещаться ближе к началу последовательности, то есть сделает ещё лишь конечное число ходов, что противоречит тому, как мы её выбрали.

Третий способ. Припишем каждому нулю «вес». Нули, стоящие после последней единицы пусть имеют «вес» 0, стоящие между последней и предпоследней — «вес» 1, и далее по формуле $1 + 3 + \ldots + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2}$, где k — количество стоящих после этого нуля единиц. При указанной операции с единицей, после которой стоит еще k единиц, ноль «веса» $\frac{3^{k+1} - 1}{2}$ заменяется на три нуля «веса» $\frac{3^k - 1}{2}$. Суммарный «вес» всех нулей при этом уменьшается на $\frac{3^{k+1} - 1}{2} - 3\cdot\frac{3^k - 1}{2} = \frac{3^{k+1} - 1 - 3^{k+1} + 3}{2} = 1$.

Так как суммарный «вес» всех нулей может быть только целым неотрицательным числом, процесс не может продолжаться бесконечно.

Из решения следует, что наибольшее возможное количество операций равно изначальному суммарному весу нулей, который равен $a_n + a_{n-1} \cdot 4 + \ldots + a_1 \cdot \frac{3^{n-1}-1}{2}$, *где* a_1 *— количество нулей, стоявших в исходной последовательности перед самой первой единицей,* a_2 *— между первой и второй и т.д. Между двумя последними единицами находилось* a_n *нулей, а нули после последней единицы ни в каких операциях не участвуют.*

Критерии проверки

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение (любым способом)*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, решение, но в обоснованиях имеются некоторые пробелы (например, в обосновании того, что количество операций не зависит от их порядка)*

$\pm$ *в подсчете максимального количества операций есть ошибка, но независимость количества операций от их порядка доказана строго*

$\mp$ *в работе есть верная идея решения, но до конца оно не доведено*

$\mp$ *приведен верный (или с ошибкой) подсчет максимального числа операций (или показано без подсчета, почему при определенном порядке действий оно конечно), но отсутствует утверждение, что оно не зависит от порядка действий. Либо это утверждение есть, но оно никак не обосновано*

$\mp$ *верный подсчет максимального числа операций проведен для конкретной последовательности. Независимость от порядка действий как-то пояснена*

$\mp$ *сформулировано, но не доказано утверждение, что при каждой операции единица сдвигается влево и в конце концов все единицы соберутся в начале*

$-$ *верный подсчет максимального числа операций проведен для конкретной последовательности. Независимость от порядка действий не доказана*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*