LXXIX Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Московское математическое общество
Факультет математики НИУ ВШЭ
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты mmo@mccme.ru

☞ Материалы данной книги размещены на странице

www.mccme.ru/mmo

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

Председатель оргкомитета LXXIX ММО

вице-президент Московского математического общества,
профессор факультета математики НИУ ВШЭ
д.ф.-м.н. *С. К. Ландо*.

Сборник подготовили:

Н. И. Авилов, *А. В. Антропов*, *В. Д. Арнольд*, *Е. В. Бакаев*, *А. Г. Банникова*, *Ф. Л. Бахарев*, *А. В. Бегунц*, *Д. А. Белов*, *А. Д. Блинков*, *И. И. Богданов*, *П. А. Бородин*, *В. А. Брагин*, *М. Ю. Васильев*, *А. С. Волостнов*, *М. А. Волчкевич*, *В. В. Галатенко*, *А. И. Галочкин*, *С. Б. Гашков*, *Н. М. Гладков*, *Т. И. Голенищева-Кутузова*, *Д. В. Горяшин*, *А. С. Гусев*, *Г. Г. Гусев*, *А. В. Доледенок*, *С. А. Дориченко*, *М. А. Евдокимов*, *Р. Г. Женодаров*, *А. А. Заславский*, *О. А. Заславский*, *Л. Н. Исхаков*, *Т. В. Казицына*, *В. А. Клепцын*, *А. А. Клячко*, *О. Н. Косухин*, *Н. М. Курносов*, *А. Ю. Кушнир*, *А. Д. Матушкин*, *Н. Ю. Медведь*, *А. Б. Меньщиков*, *Г. А. Мерзон*, *И. В. Митрофанов*, *Б. А. Обухов*, *А. Е. Панкратьев*, *Г. А. Погудин*, *А. А. Пономарев*, *Л. А. Попов*, *А. М. Райгородский*, *М. А. Раскин*, *И. В. Раскина*, *И. Н. Сергеев*, *М. Б. Скопенков*, *С. К. Смирнов*, *А. А. Соколов*, *Ю. В. Тихонов*, *Б. Р. Френкин*, *А. В. Хачатурян*, *Н. В. Чернега*, *Л. Э. Шабанов*, *А. В. Шаповалов*, *Д. Э. Шноль*, *И. В. Ященко*

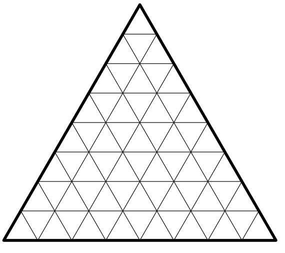
Проведение олимпиады и издание книги осуществлены при поддержке фирмы «НИКС», компании «Яндекс», фонда «Математические этюды» и благотворительного фонда «Дар».

6 класс

1. У Незнайки есть пять карточек с цифрами: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ и $\boxed{5}$. Помогите ему составить из этих карточек два числа — трехзначное и двузначное — так, чтобы первое число делилось на второе. (*А. В. Шаповалов*)

2. В маленьком городе только одна трамвайная линия. Она кольцевая, и трамваи ходят по ней в обоих направлениях. На кольце есть остановки Цирк, Парк и Зоопарк. От Парка до Зоопарка путь на трамвае через Цирк втрое длиннее, чем не через Цирк. От Цирка до Зоопарка путь через Парк вдвое короче, чем не через Парк. Какой путь от Парка до Цирка — через Зоопарк или не через Зоопарк — короче и во сколько раз? (*А. В. Шаповалов*)

3. Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1 (см. рис.). Какое наименьшее количество треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка? Приведите пример и докажите, что меньшее количество треугольничков закрасить нельзя. (*Н. И. Авилов*)



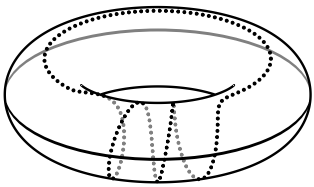
4. Аня захотела вписать в каждую клетку таблицы 5×8 по одной цифре таким образом, чтобы каждая цифра встречалась ровно в четырех рядах. (Рядами мы считаем как столбцы, так и строчки таблицы.) Докажите, что у нее ничего не получится. (*Е. В. Бакаев*)

5. Робот придумал шифр для записи слов: заменил некоторые буквы алфавита однозначными или двузначными числами, используя только цифры 1, 2 и 3 (разные буквы он заменял разными числами). Сначала он записал шифром сам себя: РОБОТ = 3112131233. Зашифровав слова КРОКОДИЛ и БЕГЕМОТ, он с удивлением заметил, что числа вышли совершенно одинаковыми! Потом Робот записал слово МАТЕМАТИКА. Напишите число, которое у него получилось. Обоснуйте свой ответ. (*А. В. Хачатурян*)

6. Сорок детей водили хоровод. Из них 22 держали за руку мальчика и 30 держали за руку девочку. Сколько девочек было в хороводе? (*Е. В. Бакаев*)

7 класс

1. По поверхности планеты, имеющей форму бублика, проползли, оставляя за собой следы, две улитки: одна по внешнему экватору, а другая по винтовой линии (см. рис.). На сколько частей разделили поверхность планеты следы улиток? (Достаточно написать ответ.)



(*С. К. Смирнов, И. В. Ященко*)

2. См. задачу 2 для 6 класса.

3. Сложите из трех одинаковых клетчатых фигур без оси симметрии фигуру с осью симметрии. (*Г. А. Мерзон*)

4. Впишите вместо звездочек шесть различных цифр так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным: $\frac{*}{*}+\frac{*}{*}=\frac{*}{*}$. (*А. В. Шаповалов*)

5. Один угол треугольника равен $60°$, а лежащая против этого угла сторона равна трети периметра треугольника. Докажите, что данный треугольник равносторонний. (*М. А. Волчкевич*)

6. На конкурсе «А ну-ка, чудища!» стоят в ряд 15 драконов. У соседей число голов отличается на 1. Если у дракона больше голов, чем у обоих его соседей, его считают хитрым, если меньше, чем у обоих соседей, — сильным, остальных (в том числе стоящих с краю) считают обычными. В ряду есть ровно четыре хитрых дракона — с 4, 6, 7 и 7 головами и ровно три сильных — с 3, 3 и 6 головами. У первого и последнего драконов голов поровну.

а) Приведите пример того, как такое могло быть.

б) Докажите, что число голов у первого дракона во всех примерах одно и то же. (*А. В. Шаповалов, И. В. Ященко*)

8 класс

1. Можно ли число $\frac{1}{10}$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей? (То есть выражений вида $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа и $p < q$.) (*И. В. Митрофанов*)

2. За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Двое из них заявили: «Оба моих соседа — лжецы», а остальные восемь заявили: «Оба моих соседа — рыцари». Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.) (*А. Б. Меньщиков*)

3. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60^\circ$. Докажите, что $AC = BK$. (*Е. В. Бакаев*)

4. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99, в десятичной записи которого участвуют только четные цифры. (*Р. Г. Женодаров*)

5. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, все стороны которого равны между собой. Известно, что угол A равен 120°, угол C равен 135°, а угол D равен n°. Найдите все возможные целые значения n. (*Б. А. Обухов*)

6. Четное число орехов разложено на три кучки. За одну операцию можно переложить половину орехов из кучки с четным числом орехов в любую другую кучку. Докажите, что, как бы орехи ни были разложены изначально, такими операциями можно в какой-нибудь кучке собрать ровно половину всех орехов. (*А. В. Шаповалов*)

9 класс

1. Сумма трех положительных чисел равна их произведению. Докажите, что хотя бы два из них больше единицы. (*Б. Р. Френкин*)

2. В треугольнике ABC на продолжении медианы CM за точку C отметили точку K так, что $AM = CK$. Известно, что угол BMC равен 60°. Докажите, что $AC = BK$. (*Е.В.Бакаев*)

3. Васе задали на дом уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, где p_1 и q_1 — целые числа. Он нашел его корни p_2 и q_2 и написал новое уравнение $x^2 + p_2x + q_2 = 0$. Повторив операцию еще трижды, Вася заметил, что он решал 4 квадратных уравнения и каждое имело два различных целых корня (если из двух возможных уравнений два различных корня имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба — любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело два различных вещественных корня, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом? (*М.А. Евдокимов*)

4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне AC, пересекает отрезок BC и прямую AB в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки B, O и середины отрезков AP и CQ лежат на одной окружности. (*Е.В.Бакаев*)

5. Есть ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 разных 2016-значных полных квадратов? (*М.А. Евдокимов*)

6. В стране лингвистов существует n языков. Там живет m людей, каждый из которых знает ровно 3 языка, причем для разных людей эти наборы различны. Известно, что максимальное число людей, любые два из которых могут поговорить без посредников, равно k. Оказалось, что $11n \leqslant k \leqslant m/2$. Докажите, что тогда в стране найдутся хотя бы mn пар людей, которые не смогут поговорить без посредников. (*А. М. Райгородский*)

10 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. Внутри выпуклого четырехугольника $A_1A_2B_2B_1$ нашлась такая точка C, что треугольники CA_1A_2 и CB_1B_2 правильные. Точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно прямых A_2B_2 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

(*А. А. Заславский*)

3. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет 4 положительных корня с учетом кратности (т. е. сумма кратностей всех положительных корней этого уравнения равна 4). Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

(*М. А. Евдокимов*)

4. Бесконечную клетчатую доску раскрасили шахматным образом, и в каждую белую клетку вписали по отличному от нуля целому числу. После этого для каждой черной клетки посчитали разность: произведение того, что написано в соседних по горизонтали клетках, минус произведение того, что написано в соседних по вертикали. Могут ли все такие разности равняться 1? (*В. А. Клепцын*)

5. В куб с ребром 1 поместили 8 непересекающихся шаров (возможно, разного размера). Может ли сумма диаметров этих шаров быть больше 4? (*М. А. Евдокимов*)

6. В однокруговом хоккейном турнире принимало участие 2016 команд. По регламенту турнира за победу дается 3 очка, за поражение 0 очков, а в случае ничьей играется дополнительное время, победитель которого получает 2 очка, а проигравший — 1 очко. По окончании турнира Остапу Бендеру сообщили количество очков, набранных каждой командой, на основании чего он сделал вывод, что не менее N матчей закончились дополнительным временем. Найдите наибольшее возможное значение N. (*Л. Э. Шабанов*)

11 класс (1-й день)

1. На шахматном турнире для 12 участников каждый сыграл ровно по одной партии с каждым из остальных. За выигрыш давали 1 очко, за ничью $1/2$, за проигрыш 0. Вася проиграл только одну партию, но занял последнее место, набрав меньше всех очков. Петя занял первое место, набрав больше всех очков. На сколько очков Вася отстал от Пети?

(*А. И. Галочкин*)

2. Существует ли такое значение x, что выполняется равенство $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1$? (*Д. В. Горяшин*)

3. Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отмечены точки M и N так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырехугольники $AMND$ и $BMNC$ вписанные. Докажите, что прямая MN параллельна основаниям трапеции.

(*М. Ю. Васильев*)

4. В английском клубе вечером собрались n его членов ($n \geqslant 3$). По традициям клуба каждый принес с собой сок того вида, который он предпочитает, в том количестве, которое он планирует выпить в течение вечера. Согласно правилам клуба, в любой момент любые три его члена могут присесть за столик и выпить сока (каждый — своего) в любом количестве, но обязательно все трое поровну. Докажите, что для того, чтобы все члены могли в течение вечера полностью выпить принесенный с собой сок, необходимо и достаточно, чтобы доля сока, принесенного любым членом клуба, не превосходила одной трети от общего количества.

(*А. А. Клячко*)

5. Можно ли четырьмя плоскостями разрезать куб с ребром 1 на части так, чтобы для каждой из частей расстояние между любыми двумя ее точками было: а) меньше $4/5$; б) меньше $4/7$? Предполагается, что все плоскости проводятся одновременно, куб и его части не двигаются.

(*О. Н. Косухин*)

6. С левого берега реки на правый с помощью одной лодки переправились N туземцев, каждый раз плавая направо вдвоем, а обратно — в одиночку. Изначально каждый знал по одному анекдоту, каждый — свой. На берегах они анекдотов не рассказывали, но в лодке каждый рассказывал попутчику все известные ему на данный момент анекдоты. Для каждого натурального k найдите наименьшее возможное значение N, при котором могло случиться так, что в конце каждый туземец знал, кроме своего, еще не менее чем k анекдотов. (*А. В. Шаповалов*)

11 класс (2-й день)

1. Найдите наименьшее натуральное число, десятичная запись квадрата которого оканчивается на 2016.

(*О. Н. Косухин*)

2. Имеются чашечные весы, которые находятся в равновесии, если разность масс на их чашах не превосходит 1 г, а также гири массами $\ln 3$, $\ln 4$, ..., $\ln 79$ г. Можно ли разложить все эти гири на чаши весов так, чтобы весы находились в равновесии? (*И. Н. Сергеев*)

3. Можно ли отметить k вершин правильного 14-угольника так, что любой четырехугольник с вершинами в отмеченных точках, имеющий две параллельные стороны, является прямоугольником, если: а) $k = 6$; б) $k \geqslant 7$?

(*А. В. Бегунц, С. Б. Гашков*)

4. За некоторое время мальчик проехал на велосипеде целое число раз по периметру квадратной школы в одном направлении с постоянной по величине скоростью 10 км/ч. В это же время по периметру школы прогуливался его папа со скоростью 5 км/ч, при этом он мог менять направление движения. Папа видел мальчика в те и только те моменты, когда они находились на одной стороне школы. Мог ли папа видеть мальчика больше половины указанного времени?

(*П. А. Бородин*)

5. Про приведенный многочлен

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

с действительными коэффициентами известно, что при некотором натуральном $m \geqslant 2$ многочлен

$$\underbrace{P(P(\ldots P}_{m\text{ раз}}(x)\ldots))$$

имеет действительные корни, причем только положительные. Обязательно ли сам многочлен $P(x)$ имеет действительные корни, причем только положительные?

(*О. Н. Косухин*)

6 класс

1. *Ответ.* $\boxed{5}\boxed{3}\boxed{2}$ и $\boxed{1}\boxed{4}$ $(532:14=38)$ или $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{5}$ и $\boxed{4}\boxed{3}$ $(215:43=5)$.

Комментарий. Конечно, эта задача решается подбором, но полезно при этом пользоваться свойствами делимости чисел. Например, подбирая двузначное число, не нужно рассматривать:

а) ни 15, ни 25, ни 35, ни 45 (из оставшихся карточек нельзя сложить число, кратное 5);

б) ни 24, ни 42 (из оставшихся карточек нельзя сложить четное число);

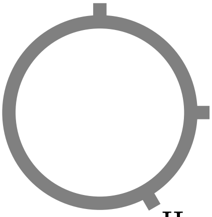
в) ни 12, ни 32, ни 52 (из оставшихся карточек нельзя сложить число, кратное 4);

г) 54 (из оставшихся карточек нельзя сложить число, кратное 9).

Но даже после учета этих соображений остается некоторый перебор вариантов, быстрее справиться с которым помогает определенное везение и то, что обычно называют «чувством числа».

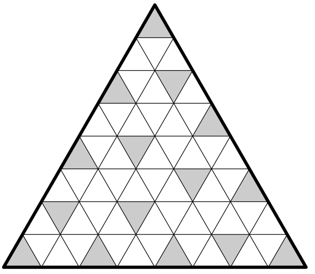
2. *Ответ.* Путь не через Зоопарк короче в 11 раз.

Решение. Сядем в трамвай на остановке Зоопарк и поедем через Цирк к Парку, а потом, не покидая трамвай, вернемся к Зоопарку. Вторая часть пути втрое короче первой, то есть первая занимает три четверти полного круга, а вторая — четверть. Отметим на схеме Зоопарк и Парк и где-то на более длинной дуге между ними отметим Цирк (см. рис.). Теперь на том же трамвае поедем из Цирка к Зоопарку (при этом проезжая Парк, как видно на схеме).



Доехав до Зоопарка, на том же трамвае вернемся к Цирку, описав круг. Первая часть пути вдвое короче второй, то есть занимает треть круга. Это значит, что путь (все на том же трамвае) от Цирка к Парку не пройдет через Зоопарк и составит $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ часть полного круга. Путь же через Зоопарк равен $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$ круга, что в 11 раз длиннее.

3. *Ответ.* 15 треугольничков. Пример см. на рисунке.



Решение. Всего точек пересечения линий $1 + 2 + 3 + \ldots$ $\ldots + 9 = 45$, а у треугольничка три вершины, так что по крайней мере $45 : 3 = 15$ треугольничков придется закрасить.

Комментарий. Можно показать, что существует только один (с точностью до осевой симметрии) способ закрасить 15 треугольничков.

В найденной нами раскраске ни одна вершина не закрашена дважды. Сторона 8 большого треугольника — минимальная, при которой такое «экономное» закрашивание возможно. Оно заведомо невозможно, если длина стороны кратна трем. Более сложный вариант этой задачи (для треугольника со стороной 2015) опубликован в разделе «Задачи» журнала «Математика в школе» (№ 1 за 2016 год).

4. *Решение.* Будем считать, что в таблице 5 строк и 8 столбцов, и предположим, что Ане расставить цифры удалось. Заметим, что каждая цифра в таблице может встретиться не более чем 4 раза. В самом деле, если среди четырех рядов, где она встречается, есть два вертикальных ряда и два горизонтальных, то на их пересечениях есть ровно четыре клетки для нашей цифры (написана она может быть в двух, трех или во всех четырех клетках), а если три ряда в одном направлении и один в другом, то только три клетки.

Однако цифр всего 10, а клеток 40, поэтому цифр каждого вида ровно по 4, и расположены они именно на пересечениях двух горизонтальных и двух вертикальных рядов. Это, в частности, означает, что в каждом столбце одинаковые цифры присутствуют парами, что невозможно, так как в столбце нечетное число цифр (пять).

5. *Ответ.* 22323311223233323132.

Решение. Рассмотрим слово РОБОТ = 3112131233. В нем 5 букв и 10 цифр, так что все коды двузначные и определяются без труда. Напишем все двенадцать возможных кодов и те буквы, которые мы точно знаем:

1 =	11 =	21 =	31 = Р
2 =	12 = О	22 =	32 =
3 =	13 = Б	23 =	33 = Т

Теперь подумаем, как запишется слово КРОКОДИЛ = = БЕГЕМОТ. Начинается оно с Б = 13, то есть К = 1. Теперь мы можем записать начало слова: КРОКО... = 13112112... Начинаем его читать как слово БЕГЕМОТ: Б = 13, Е $\neq$ 1, то есть Е = 11, а тогда Г = 2, иначе второе Е не получается. Ну а М начинается на 2, т. е. М = 2*. Теперь посмотрим на конец слова, там ...ОТ, то есть ...1233. Это значит, что Л = 3 и И = 23, а Д заканчивается на 1, то есть Д = *1. Звездочка — единственная оставшаяся неразгаданной цифра. Разгадать ее нетрудно: 31 = Р, 11 = Е, так что Д = *1 = 21. Тогда М = = 22, и мы раскрыли почти весь шифр:

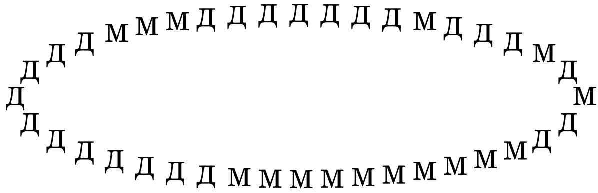
1 = К	11 = Е	21 = Д	31 = Р
2 = Г	12 = О	22 = М	32 =
3 = Л	13 = Б	23 = И	33 = Т

Теперь мы знаем все, что нужно, чтобы записать шифром слово МАТЕМАТИКА, кроме одного — как шифруется буква А. Но раз Робот смог записать это слово, значит, для А должен найтись код. И этот код 32, ибо все остальные использованы.

6. *Ответ.* 24 девочки.

Решение. $22 + 30 = 52$, значит, $52 - 40 = 12$ детей держали за руку и мальчика, и девочку. Значит, $30 - 12 = 18$ детей держали за руки только девочек. Эти 18 детей держали $18 \cdot 2 = 36$ девочкиных рук, и еще 12 держали по одной девочкиной руке, так что всего у девочек было $36 + 12 = 48$ рук. Стало быть, девочек было $48 : 2 = 24$.

Комментарий. Расстановка детей в хороводе, соответствующая условиям задачи, существует, например, такая, как на рисунке. Возможны и другие расстановки.



Зная ответ (24 девочки и, стало быть, 16 мальчиков), можно заметить, что девочек больше, чем мальчиков, ровно на столько, на сколько ребят, держащих за руку девочку, больше, чем тех, кто держит за руку мальчика: $24-16=30-22=8$. Это не случайное совпадение. Зная этот факт, можно легко решить задачу. Но доказать сам факт не очень просто. Приведем одно из возможных доказательств.

Обозначим за $Д$ и $М$ количество девочек и мальчиков в хороводе, а за X и Y — соответственно количество тех, кто держит за руку девочку, и тех, кто держит мальчика.

Рассмотрим несколько (более одной) девочек, стоящих подряд. Попросим их по одной выходить из круга — сначала тех, кто «в серединке» (т. е. стоит между двумя девочками), а потом, когда девочек останется две, — одну из оставшихся. При этом будем следить за тем, как меняются $Д$, $М$ и $Д-М$, а также X, Y и $X-Y$. Составим таблицу (маленькой буквой «д» обозначена выходящая из круга девочка):

	$Д$	$М$	$Д-М$	X	Y	$X-Y$
...ДдД...	-1	не изм.	-1	-1	не изм.	-1
...МдДМ...	-1	не изм.	-1	-2	-1	-1

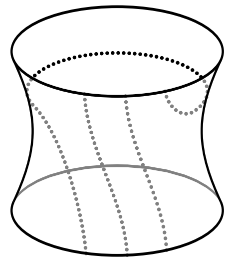
Мы видим, что разности $Д-М$ и $X-Y$ при удалении каждой девочки изменяются одинаково (уменьшаются на 1). Так же точно поступим с рядами мальчиков — совершенно аналогично можно показать, что обе разности будут увеличиваться на 1 при выходе из хоровода каждого мальчика.

После всего этого мы получим хоровод, в котором мальчики и девочки чередуются, то есть их поровну, и $Д-М=0$. Но и $X-Y=0$, потому что в данном случае $X=М$, а $Y=Д$.

Итак, $Д-М$ и $X-Y$ при каждом выходе ребенка из круга изменялись одинаково, а в итоге получилось, что $Д-М=X-Y$. Это значит, что и в изначальном хороводе было $Д-М=X-Y$, что и требовалось доказать.

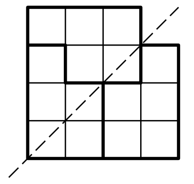
7 класс

1. *Ответ.* 3.



Комментарий. Представим себе поверхность бублика, сделанную из бумаги. Разрежем ее по пути первой улитки и разогнем. Получится боковая поверхность цилиндра. Путь второй улитки при этом будет разрезан в трех местах. То есть на получившейся поверхности след второй улитки представляет собой три линии, соединяющие нижнее основание цилиндра с верхним. Нетрудно сообразить, что они делят боковую поверхность цилиндра на 3 части.

2. См. решение задачи 2 для 6 класса.

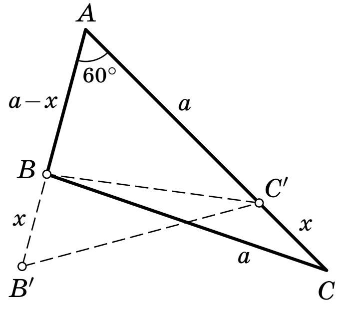


3. *Ответ.* Одно из решений изображено на рисунке (пунктиром показана ось симметрии).

4. *Ответ.* Например, $\frac{1}{6}+\frac{7}{3}=\frac{5}{2}$ (есть и другие примеры).

Комментарий. Поиск примера упрощается, если заметить, что ни один знаменатель не может быть равен ни 1 (тогда знаменатели оставшихся дробей совпадали бы), ни 5 или 7 (потому что если знаменатели двух несократимых дробей не делятся на простое число, то не делится на это простое число и знаменатель их суммы или разности).

5. *Решение.* Предположим противное. Пусть в треугольнике ABC угол A равен 60°, $BC=a$, $AB=a-x$, тогда $AC= =p-AB-BC=3a-a-(a-x)=a+x$. Выберем на луче AB точку B', а на луче AC точку C' так, что $AB'=AC'=a$.

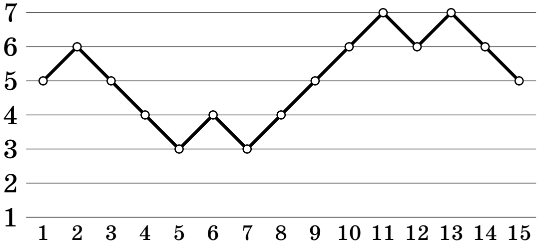


Треугольник $AB'C'$ — равнобедренный с углом $60°$. Поэтому он является и равносторонним, т. е. $B'C' = a$.

Осталось заметить, что треугольники $BC'B'$ и $BC'C$ равны по трем сторонам. Поэтому $\angle BCC' = \angle BB'C' = 60°$. То есть в треугольнике ABC не только угол A, но и угол C равен $60°$, т. е. он равносторонний.

6. *Решение.* Удобно изображать ряд драконов в виде графика: вместо каждого дракона нарисуем точку на высоте, соответствующей числу его голов, и соединим эти точки.

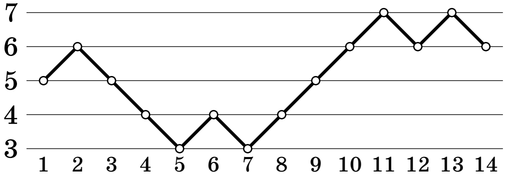
а) См. рисунок.



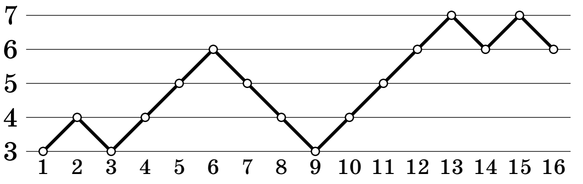
б) Заметим, во-первых, что где-то в промежутке между каждыми двумя хитрыми драконами стоит сильный.

Действительно, если мы будем идти вдоль ряда драконов, то после того, как мы миновали хитрого дракона, количество голов начинает уменьшаться. В некоторый момент оно должно начать увеличиваться — это и есть позиция, где стоит сильный дракон. Аналогично, далее увеличение когда-то закончится на хитром драконе.

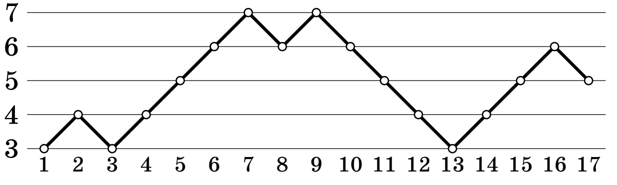
Первый способ. Посмотрим в каком порядке могут стоять сильные и хитрые драконы. Сильный дракон с 6 головами может стоять только между двумя хитрыми драконами с 7 головами. Возникают три случая: два оставшихся сильных дракона стоят либо по одну сторону от этой троицы в одном из двух порядков, либо по разные стороны.



Случай … 6 … 3 4 3 … 7 6 7 …



Случай … 4 3 … 6 … 3 … 7 6 7 …

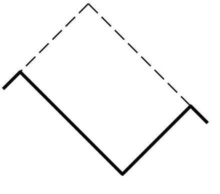


Случай … 4 3 … 7 6 7 … 3 … 6 …

В первом случае 14 драконов уже определены однозначно, и единственный способ добиться того, чтобы у первого и последнего дракона голов было поровну, — добавить справа с краю еще одного дракона с 5 головами.

Второй и третий вариант невозможны, так как для них требуется более 15 драконов (даже без учета условия одинакового количества голов у крайних драконов).

Второй способ (набросок). Можно обойтись и без перебора. Выберем участок графика между каким-нибудь сильным драконом и ближайшими к нему хитрыми драконами и «распрямим» его, заменив «впадину» на «горку» (см. рисунок).



Количество голов у драконов при этом изменится, и вместо двух хитрых драконов и одного сильного на этом участке теперь будет только один хитрый дракон. Но заметим, что количество голов у нового хитрого дракона будет равно сумме количеств голов у исходных двух хитрых минус количество голов у бывшего сильного. Это означает, что при такой процедуре величина «сумма количеств голов всех хитрых минус сумма количеств голов всех сильных» не меняется. Заметим также, что количество голов у крайних драконов в ряду от такой операции заведомо не поменялось.

Повторим теперь эту операцию, пока все сильные драконы не исчезнут. У нас останется один хитрый дракон, который по соображениям симметрии будет ровно посередине ряда. Посчитаем, сколько у него будет голов. Мы знаем, что изначально сумма количеств голов хитрых драконов минус сумма количеств голов сильных драконов равна $4+6+7+7-3-3-6=12$. Но теперь эта сумма равна просто количеству голов единственного хитрого дракона! Зная, что у него 12 голов, мы далее без труда восстанавливаем, что у крайних драконов (отстоящих от него на 7 позиций в ряду) по 5 голов.

8 класс

1. *Ответ.* Можно. Например,

$$\frac{1}{10}=\frac{2}{20}=\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\frac{5}{6}\frac{6}{7}\frac{7}{8}\frac{8}{9}\frac{9}{10}\frac{10}{11}\frac{11}{20} \text{ или } \frac{1}{10}=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\frac{5}{6}\frac{6}{7}\frac{8}{9}\frac{8}{9}\frac{9}{10}\frac{63}{64}.$$

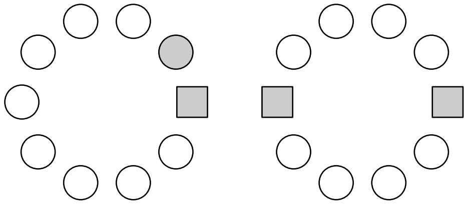
Комментарий. Пример можно придумать, поддавшись естественному желанию составить произведение, в котором сокращаются числитель и знаменатель соседних дробей. Тогда числитель первой дроби должен быть меньше знаменателя последней дроби в 10 раз. Значит, осталось придумать 11 таких чисел, что $q_1<q_2<\ldots<q_{10}<q_{11}=10q_1$, и подойдут дроби $\frac{q_1}{q_2}, \frac{q_2}{q_3}, \ldots, \frac{q_9}{q_{10}}, \frac{q_{10}}{q_{11}}$.

2. *Ответ.* 1 или 2.

Решение. Ясно, что не все присутствующие являются рыцарями и не все являются лжецами: в этих случаях ни один из них не смог бы произнести первую фразу.

Если мы возьмем одного рыцаря, то один из соседних с ним лжецов может произнести первую фразу, а остальные лжецы могут произнести вторую. Это дает пример единственного рыцаря.

Если мы возьмем двух рыцарей на противоположных местах вокруг стола, то все лжецы смогут произнести вторую фразу. Это дает пример двух рыцарей.



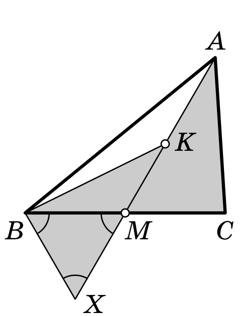
Квадратиками отмечены рыцари;
серым отмечены те, кто сказал первую фразу.

То, что рыцарей может быть не более двух, можно доказывать по-разному.

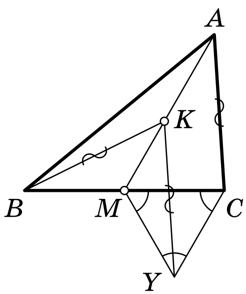
Первый способ. Предположим, что есть два рыцаря, сидящих рядом. Пойдем от них по кругу и дойдем до первого лжеца. Тогда мы найдем комбинацию РРЛ; но в этом случае рыцарь посередине не может произнести ни одну из фраз. Противоречие. Следовательно, каждый рыцарь окружен лжецами. Заметим, что в таких условиях каждый рыцарь произнесет первую фразу. Следовательно, рыцарей не больше двух.

Второй способ. Предположим, какой-то рыцарь сказал вторую фразу. Тогда оба его соседа — рыцари. Рассмотрим его соседа справа. Он рыцарь, и слева от него сидит рыцарь. Он не может солгать, сказав первую фразу, и должен сказать, что оба его соседа — рыцари. Тогда рассмотрим его соседа справа; и так далее. Получается, что все присутствующие за столом — рыцари, чего быть не может. Значит, все присутствующие рыцари обязаны говорить первую фразу, а таких фраз всего две. Значит, рыцарей не более двух.

3. *Первое решение.* На продолжении медианы AM за точку M отметим такую точку X, что $MX = BM$. Заметим, что треугольник BMX — равносторонний, так как $BM = MX$ и $\angle BMX = 60^\circ$. Треугольники BXK и CMA равны по двум сторонам и углу между ними: $\angle BXK = \angle CMA = 60^\circ$, $BX = BM = CM$, $XK = XM + MK = AK + MK = MA$.

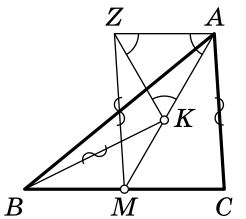


Второе решение. Отразим вершину B относительно прямой AM; получим точку Y. Заметим, что $BM = MY$ и



$\angle BMY = 120^\circ$, откуда можно сделать вывод, что треугольник CMY — равносторонний. Отрезки AK и CY параллельны и равны; следовательно, $AKYC$ — параллелограмм, $AC = YK$, а YK и BK равны из симметрии относительно AM.

Третье решение. Отметим такую точку Z, что $MCAZ$ — параллелограмм. Несложно видеть, что AKZ — равносторонний треугольник. Но тогда четырехугольник $ZKMB$ оказывается равнобедренной трапецией. Действительно: $BM = KZ$, $\angle BMK = \angle MKZ = 120^\circ$. Отрезки AC и MZ равны как стороны параллелограмма, отрезки MZ и BK — как диагонали равнобокой трапеции.



Комментарий. Возможны и другие дополнительные построения.

4. *Ответ.* 228888.

Первое решение. Пусть $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$ — десятичная запись этого числа (обозначим его n). Тогда

$$n = \overline{a_2a_1} + 100\,\overline{a_4a_3} + 10000\,\overline{a_6a_5} + \ldots = \overline{a_2a_1} + \overline{a_4a_3} + \\ + \overline{a_6a_5} + \ldots + 99 \cdot (\overline{a_4a_3} + 101\,\overline{a_6a_5} + 10101\,\overline{a_8a_7} + \ldots).$$

(Здесь число $\overline{0a}$, если возникает, равно a.) Таким образом, числа n и $s = \overline{a_2a_1} + \overline{a_4a_3} + \overline{a_6a_5} + \ldots$ одновременно делятся или не делятся на 99. Поскольку n кратно 99 и все его цифры четные, s кратно 198, а значит, $s \geqslant 198$. Предположим, что в числе n не больше пяти цифр. Тогда имеем: $198 \leqslant s \leqslant 8 + 88 + 88 = 184$, противоречие. Значит, цифр хотя бы 6.

Если $\overline{a_6a_5} < 22$, то $s < 22 + 88 + 88 = 198$, поэтому первые две цифры образуют число не меньше, чем 22. Тогда наше число не меньше, чем 228888, а оно подходит.

Второе решение. Обозначим через $S_\text{ч}$ и $S_\text{н}$ сумму цифр, стоящих на четных и нечетных местах соответственно. Из признаков делимости на 9 и на 11 $(S_\text{ч} + S_\text{н}) \vdots 9$, а $|S_\text{ч} - S_\text{н}| \vdots 11$.

Но все цифры четные, поэтому $(S_ч + S_н) \vdots 18$, а $|S_ч - S_н| \vdots 22$. Также заметим, что $|S_ч - S_н|$ не превосходит $S_ч + S_н$.

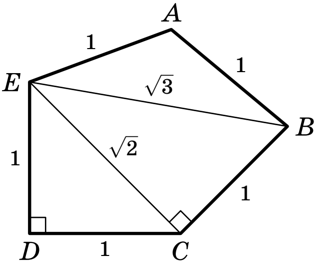
Если $S_ч + S_н = 18$, то $|S_ч - S_н| = 0$. Но из этого следует, что $S_ч = S_н = 9$, чего не может быть в силу четности $S_ч$ и $S_н$. Если $S_ч + S_н \geqslant 54$, то в нашем числе будет не менее 7 цифр, поскольку $8 \cdot 6 = 48 < 54$.

Пусть $S_ч + S_н = 36$. Тогда $|S_ч - S_н| = 0$ или $|S_ч - S_н| = 22$. Если 22, то одно из чисел $S_ч$ и $S_н$ равно 29, а другое — 7, чего не может быть. Если 0, то $S_ч = S_н = 18$. Заметим, что 18 нельзя представить в виде суммы менее чем трех четных цифр, поэтому наше число хотя бы шестизначное.

Осталось заметить, что наименьшее шестизначное число, удовлетворяющее условиям задачи, — это 228888. Действительно, первая цифра не может быть меньше 2, вторая — тоже, поскольку если она равна 0, то общая сумма цифр не больше $2 + 8 \cdot 4 < 36$.

5. *Ответ.* 90°.

Решение. Для начала покажем, что ответ единственен. Предположим противное: пусть существует два равносторонних пятиугольника $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ такие, что $\angle A = \angle A' = 120^\circ$, $\angle C = \angle C' = 135^\circ$ и $\angle D \neq \angle D'$. Не умаляя общности, можно считать, что длины сторон пятиугольников равны 1. Заметим, что по двум сторонам и углу между ними равны треугольники EAB и $E'A'B'$, а также BCD и $B'C'D'$. Тогда $BE = B'E'$ и $BD = B'D'$, откуда треугольники BDE и $B'D'E'$ равны по трем сторонам. Из равенства треугольников следует равенство углов $\angle BDE = \angle B'D'E'$. Заметим также из равнобедренных треугольников BCD и $B'C'D'$, что $\angle CDB = \angle C'D'B' = 22{,}5^\circ$. Таким образом, $\angle CDE = \angle CDB + \angle BDE = \angle C'D'B' + \angle B'D'E' = \angle C'D'E'$, что и означает единственность ответа.



Докажем, что существует равносторонний пятиугольник, у которого $\angle A = 120^\circ$, $\angle C = 135^\circ$, $\angle D = 90^\circ$. Сначала построим такой треугольник CDE, что $CD = DE = 1$, $\angle CDE = 90^\circ$. Тогда по теореме Пифагора $EC = \sqrt{2}$. Затем построим такую точку B, что $\angle ECB = 90^\circ$, $BC = 1$. По теореме Пифагора $BE = \sqrt{3}$. Теперь построим A так, что $AB = AE = 1$. Опустим высоту AH треугольника ABE. Тогда $AB = 1$, $BH = \sqrt{3}/2$, и по теореме Пифагора $AH = 1/2$. Следовательно, $\angle BAH = 60^\circ$ и $\angle EAB = 120^\circ$.

6. *Решение.* Заметим, что если мы добьемся размеров кучек $(x, 2x, y)$, то мы сможем получить $(x, x, y+x)$, где $y+x$ будет четным, а далее получим $\left(x, \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x\right)$, где в средней кучке ровно половина орехов. Опишем алгоритм, по которому можно получить состояние $(x, 2x, y)$.

Выберем пару кучек так, чтобы хотя бы одна была четной: $(2m, n)$. Если $m = n$, то мы у цели. Пусть $m \neq n$. Будем преобразовывать пару так, чтобы всегда оставалась четная кучка, а общее число орехов в паре либо уменьшалось, либо сохранялось; но при сохранении уменьшался модуль разности $|m-n|$. А именно, если m или n четно, то переложим m орехов в третью кучку, при этом общее число орехов в паре уменьшится. Если m и n нечетны и не равны, то переложим m орехов из одной кучки в другую, получив пару $(m, m+n)$. При этом $m+n$ четно, и $|(m+n)/2 - m| = |n-m|/2 < |m-n|$. Поскольку уменьшать и общее число орехов, и разность $|m-n|$ можно лишь конечное число раз, рано или поздно станет $m = n$.

9 класс

1. *Решение.* Нам известно, что $a + b + c = abc$. Решим задачу от противного. Пусть двух чисел больше единицы не нашлось, тогда хотя бы 2 числа не больше единицы. Будем считать без ограничения общности, что $a \leqslant 1$ и $b \leqslant 1$. Тогда $a + b + c > c \geqslant abc$. Противоречие.

2. *Решение.* На продолжении медианы CM за точку M отметим точку D так, что $AM = MD$. Тогда треугольник DMA — равносторонний. Заметим теперь, что $BM = AD$, $KM = CD$, а $\angle ADC = \angle BMK$. Получаем, что треугольники

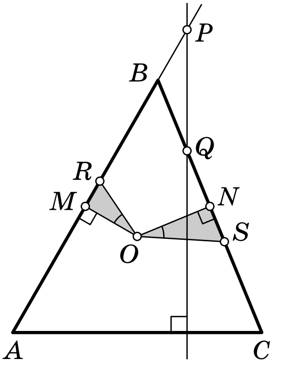
ADC и BMK равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $BK = AC$.

См. также задачу 3 для 8 класса.

3. *Решение.* Пятое уравнение с целыми коэффициентами не должно иметь различных вещественных корней. Значит, если его коэффициенты обозначить через p_5 и q_5, то, сравнивая дискриминант с нулем, получаем два условия: $p_5^2 \leqslant 4q_5$ и $q_5^2 \leqslant 4p_5$. Решим эту систему. Оба числа должны быть положительны, и при этом, возводя в квадрат первое неравенство и подставляя условие из второго, получаем $p_5^4 \leqslant 64p_5$. Отсюда оба числа меньше 5, и перебором находим единственную подходящую пару: 1 и 2.

Найденные коэффициенты пятого уравнения являются корнями четвертого; по теореме Виета находим само четвертое уравнение: $x^2 - 3x + 2 = 0$. Продолжая применять теорему Виета, последовательно находим третье, второе и, наконец, первое уравнения: $x^2 + x - 6 = 0$, $x^2 + 5x - 6 = 0$, $x^2 + x - 30 = 0$. Значит, Васе задали уравнение $x^2 + x - 30 = 0$.

4. *Решение.* Пусть M, N, R, S — середины отрезков AB, BC, AP и CQ соответственно. Заметим, что



$$\angle OMB = \angle ONB = 90^\circ,$$

$$\angle OMN = 90^\circ - \angle NMB = 90^\circ - \angle BAC = \angle BPQ.$$

Аналогично $\angle ONM = \angle BQP$. Следовательно, треугольники OMN и BPQ подобны. Получаем, что $\frac{OM}{BP} = \frac{ON}{BQ}$. Имеем

$$MR = AR - AM = \frac{1}{2}AP - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BP.$$

Аналогично $NS = \frac{1}{2}BQ$. Таким образом, $\frac{OM}{MR} = \frac{ON}{NS}$, и треугольники OMR и ONS подобны. Из последнего подобия получаем $\angle ORM = \angle OSN$, значит, $\angle ORB + \angle OSB = 180^\circ$, и четырехугольник $ORBS$ — вписанный. Что и требовалось доказать.

5. *Первое решение*. Оценим число 2016-значных квадратов. Их не меньше, чем

$$10^{2016/2}-10^{2015/2}-1>10^{1000}.$$

Различных наборов из 2016 цифр не больше, чем наборов, в которых каждая цифра встречается не более 2016 раз, то есть 2017^{10}. Значит, найдется такой набор из 2016 цифр, перестановками которых можно получить не менее, чем $10^{1000}/2017^{10}>10^{1000}/10^{100}=10^{900}$ квадратов, и уж тем более 2016.

Второе решение. Предъявим такое 2016-значное число в явном виде. Рассмотрим все 1008-значные числа вида

$$x_{a,b}=4\cdot 10^{1007}+10^a+10^b,\text{ где } 1007>a>b\geqslant 0,\ 2a\neq 1007+b.$$

Заметим, что

$$x_{a,b}^2=16\cdot 10^{2014}+8\cdot 10^{1007+a}+8\cdot 10^{1007+b}+\\+10^{2a}+2\cdot 10^{a+b}+10^{2b}.\quad (1)$$

В силу условия $1007>a>b$ имеем неравенства

$$2014>1007+a>1007+b>a+b>2b,$$
$$2014>1007+a>2a>a+b>2b.$$

Из этих неравенств, а также из условия $2a\neq 1007+b$ следует, что все слагаемые в правой части равенства (1) соответствуют разным цифрам числа $x_{a,b}^2$. Следовательно, для всех допустимых a, b число $x_{a,b}^2$ состоит из фиксированного набора цифр: трех единиц, одной двойки, одной шестерки, двух восьмерок и 2009 нулей.

Всего допустимых пар чисел a, b не меньше, чем

$$\frac{1007\cdot 1006}{2}-1007=1007\cdot 502.$$

Значит, из любого числа вида $x_{a,b}^2$ перестановкой цифр можно получить $1007\cdot 502>2016$ разных 2016-значных полных квадратов.

6. *Решение*. Обозначим через B множество из k человек, которые могут поговорить без посредников. Рассмотрим произвольного человека (мистера X), не вошедшего в множество B. Для него существует такой человек из B

(мистер X'), что пересечение их языков пусто. Оценим количество тех людей из B, которые могут поговорить с мистером X. Такие люди имеют хотя бы один общий язык и с мистером X, и с мистером X' (так как входят в множество B), а значит, их не больше, чем $3 \cdot 3 \cdot n$. Таким образом, для каждого человека, не вошедшего в множество B, мы нашли как минимум $k - 9n$ представителей множества B, которые не могут с ним поговорить без посредника. Значит, всего таких пар

$$(m-k)\cdot(k-9n) \geqslant \left(m - \frac{m}{2}\right)\cdot(11n-9n) \geqslant \frac{m}{2}\cdot 2n = mn.$$

Комментарий. Задача связана с одной весьма известной и важной областью современной теории графов. А именно, граф называется *кнезеровским*, если его вершины — это все возможные подмножества мощности r множества $\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$, а ребра — пары непересекающихся подмножеств. О кнезеровских графах есть популярная литература: см. [1], [2]. В задаче 6 речь идет про кнезеровский граф, у которого $r=3$: каждая его вершина — это тройка языков (или, если угодно, лингвист, владеющий этими тремя языками). Две вершины соединяются ребром, если соответствующие лингвисты *не* могут поговорить без посредников. Напомним, что множество вершин графа называется *независимым*, если любые две вершины в нем *не* соединены ребром. А мощность самого большого независимого множества вершин графа G называется *числом независимости* и обозначается $\alpha(G)$. В этих терминах задача 6 формулируется так: «Пусть дан подграф G кнезеровского графа с $r=3$ и m вершинами, причем $\alpha(G)=k$ и $11n \leqslant k \leqslant m/2$. Докажите, что тогда число ребер графа G не меньше mn».

Задача в такой постановке нетривиально использует именно структуру кнезеровского графа. Дело в том, что есть классическая теорема Турана: если у графа на m вершинах число независимости равно k, то в нем «примерно» $m^2/2k$ ребер или больше. В нашем случае такая оценка имеет лишь величину порядка m, а вовсе не mn, и это очень значимо.

Отметим, что число независимости всего кнезеровского графа равно C_{n-1}^{r-1}, если $r \leqslant n/2$. Это знаменитая теорема Эрдеша—Ко—Радо, доказательство которой можно прочесть, например, в [3]. Задача 6 возникла в тот момент, когда автору варианта и его ученикам удалось показать, что у случайного подграфа кнезеровского графа число независимости, вопреки интуиции, почти не меняется (см. [4]). Сейчас из этого выросла большая наука, которая позволяет по-новому взглянуть на классические результаты экстремальной комбинаторики (см. [5]).

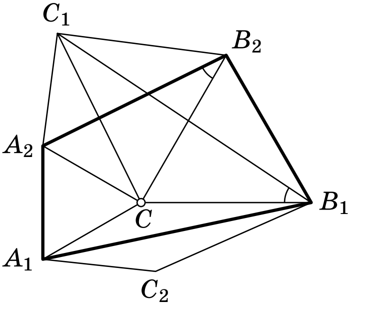
Отметим также, что оценка в задаче 6 отнюдь не оптимальная. Ее можно усилить, доказав следующий результат: «В условиях задачи 6 максимальные независимые множества обязательно состоят из вершин, которые все содержат один и тот же общий элемент множества $\mathcal{R}_n$.» Попробуйте доказать это! В более общем случае это называется теоремой Хилтона—Милнера (см. [3]).

[1] *А. М. Райгородский.* Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике // «Квант», №1 (2011), 7—16.
[2] *А. М. Райгородский.* Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике. М: МЦНМО, 2011.
[3] *А. М. Райгородский.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. М: МЦНМО, 2015.
[4] *Л. И. Боголюбский, А. С. Гусев, М. М. Пядёркин, А. М. Райгородский.* Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов некоторых дистанционных графов // Математический сборник, 206 (2015), №10, 3—36.
[5] *B. Bollobás, B. P. Narayanan, A. M. Raigorodskii.* On the stability of the Erdős—Ko—Rado theorem // J. Comb. Th. Ser. A, 137 (2016), 64—78.

10 класс

1. См. решение задачи 1 для 8 класса.

2. *Решение.* Из условия следует, что $B_2C_1 = B_2C = B_2B_1$, т. е. B_2 — центр описанной окружности треугольника B_1CC_1. Поэтому



$$\angle C_1B_1C = \frac{1}{2}\angle C_1B_2C = \angle A_2B_2C,$$

(это равенство означает, что каждый из углов C_1B_1C и A_2B_2C равен половине дуги C_1C, не содержащей точки B_1, причем это равенство справедливо, даже если эта дуга больше полуокружности), а

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_1C + \angle A_2B_2C.$$

Точка B_1 — центр описанной окружности треугольника B_2CC_2. Поэтому

$$\angle C_2B_2C = \frac{1}{2}\angle C_2B_1C = \angle A_1B_1C,$$

а

$$\angle A_2B_2C_2 = \angle A_1B_1C + \angle A_2B_2C.$$

Значит, $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$. Точно так же доказывается равенство других углов треугольников $B_1A_1C_1$ и $B_2A_2C_2$.

3. *Ответ*. $b = 6$.

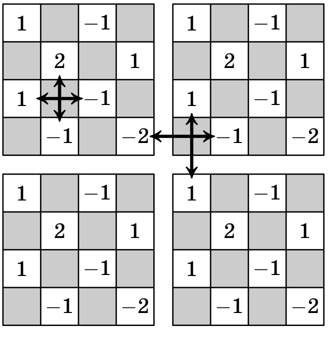
Решение. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — корни уравнения (возможно, что некоторые из них совпадают). По теореме Виета $b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$, $d = x_1x_2x_3x_4$, а значит, b и d больше 0. Заметим, что

$$\frac{b}{\sqrt{d}} = \left(\sqrt{\frac{x_1x_2}{x_3x_4}} + \sqrt{\frac{x_3x_4}{x_1x_2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{x_1x_3}{x_2x_4}} + \sqrt{\frac{x_2x_4}{x_1x_3}}\right) + \\ + \left(\sqrt{\frac{x_1x_4}{x_3x_2}} + \sqrt{\frac{x_3x_2}{x_1x_4}}\right) \geqslant 2 + 2 + 2$$

(это следует из неравенства $y + 1/y \geqslant 2$ при $y > 0$). Поэтому $b \geqslant 6$ (d — целое, значит $d \geqslant 1$). Равенство достигается в случае, когда уравнение имеет 4 кратных корня, равных 1. В этом случае многочлен имеет вид $(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

4. *Ответ*. Да.

Способ 1. Наиболее простой пример получается периодическим повторением расстановки, показанной на рисунке.



Проверим условие для черных клеток. Если соседи черной клетки по горизонтали по модулю равны 1, то их произведение равно -1, а произведение ее соседей по вертикали равно -2. Если же соседи черной клетки по вертикали по модулю равны 1, то их произведение равно 1, а произведение ее соседей по горизонтали равно 2. Легко видеть, что для любой черной клетки выполняется одно из этих условий, а значит, посчитанное для каждой черной клетки число равно единице.

Способ 2. Для этого способа приведем только пример без обоснования того, что он удовлетворяет условию.

В двух соседних вертикалях ставим число $x_0 = 1$, в соседних с ними $x_1 = 2$, затем $x_2 = 5$ и т. д. по правилу $x_{n+1} = (x_n^2 + 1)/x_{n-1}$. Часть этой расстановки в квадрате 6×6 показана на рисунке.

5		1		2	
	2		1		5
5		1		2	
	2		1		5
5		1		2	
	2		1		5

Тогда условие для каждой черной клетки будет выполнено: если черная клетка стоит в вертикали с числами x_n, то ей соответствует число $x_{n+1} \cdot x_{n-1} - x_n^2 = \dfrac{(x_n^2+1)}{x_{n-1}} \cdot x_{n-1} - x_n^2 = 1$.

Самое интересное в этом способе — установить, что последовательность x_n целочисленная. Это следует из того, что $x_n = F_{2n+1}$, где F_{2n+1} — это $(2n+1)$-е число Фибоначчи. Последовательность *чисел Фибоначчи* задается начальным условием $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и соотношением $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Доказать равенство $x_n = F_{2n+1}$ можно с помощью тождества Каталана для чисел Фибоначчи, но мы это рассуждение приводить не будем.

Способ 3. Этот способ замечателен тем, что на доске встречаются все положительные целые числа и расстановка задается явной формулой.

Введем на плоскости систему координат, начало которой — в центре белой клетки, оси параллельны сторонам клеток, а единичный отрезок равен стороне клетки. Поставим в белую клетку с центром в точке (x, y) число

$$f(x, y) = \begin{cases} |y| + 1, & \text{если } |x| \leqslant |y|; \\ \dfrac{x^2 - y^2}{2} + |x| + 1, & \text{если } |x| > |y|. \end{cases}$$

В частности, для квадрата 9×9 с центром в начале координат получится расстановка на рисунке ниже. На каждой диагонали мы видим две арифметические прогрессии.

5		5		5		5		5
	4		4		4		4	
11		3		3		3		11
	8		2		2		8	
13		5		1		5		13
	8		2		2		8	
11		3		3		3		11
	4		4		4		4	
5		5		5		5		5

Докажем, что данная расстановка удовлетворяет условию. Сразу видно, что все числа $f(x, y)$ положительны. Координаты (x, y) центра любой белой клетки — целые числа одинаковой четности, поэтому все числа $f(x, y)$ — целые.

Проверим условия для черных клеток. Рассмотрим любую из них. Пусть (x, y) — координаты ее центра. Это целые числа разной четности. Так как расстановка симметрична, то без ограничения общности мы можем считать, что $x, y \geqslant 0$. Возможны два случая:

Случай 1: $x < y$. Вычислим произведение того, что написано в соседних по горизонтали клетках, минус произведение того, что написано в соседних по вертикали:

$$f(x-1, y)f(x+1, y) - f(x, y+1)f(x, y-1) = \\ = (y+1)(y+1) - (y+1+1)(y-1+1) = \\ = (y+1)^2 - ((y+1)^2 - 1) = 1.$$

Мы не пишем знак модуля, так как для целых x, y из условий $x \geqslant 0$ и $x < y$ следует, что $y \geqslant 1$.

Случай 2: $x > y$. Пользуясь несколько раз тождеством $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, снова получим:

$$f(x-1,\,y)f(x+1,\,y) - f(x,\,y+1)f(x,\,y-1) =$$
$$= \left(\frac{(x-1)^2 - y^2}{2} + x - 1 + 1\right)\left(\frac{(x+1)^2 - y^2}{2} + x + 1 + 1\right) -$$
$$- \left(\frac{x^2 - (y+1)^2}{2} + x + 1\right)\left(\frac{x^2 - (y-1)^2}{2} + x + 1\right) =$$
$$= \left(\frac{x^2 + 1 - y^2}{2} + x + 1\right)^2 - \left(\frac{2x}{2} + 1\right)^2 -$$
$$- \left(\frac{x^2 - y^2 - 1}{2} + x + 1\right)^2 + \left(\frac{2y}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{x^2 + 1 - y^2}{2} + x + 1 + \frac{x^2 - y^2 - 1}{2} + x + 1\right)\cdot 1 -$$
$$- \left(\frac{2x}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{2y}{2}\right)^2 = 1.$$

Итак, для каждой черной клетки нужное условие выполнено.

Комментарий. Конструкция из этой задачи очень богата и активно изучается в современной математике. О том, как она естественным образом возникает при подсчете числа разбиений клетчатых фигур на домино, можно прочитать в статье: *К. П. Кохась*. Разбиения на домино // Математическое просвещение. 3-я серия, вып. 9 (2005), 143—163; `http://www.mccme.ru/free-books/matpros/ia143163.pdf.zip`

Об истоках этой магии можно прочитать (на английском языке) в старинной статье: *H. S. M. Coxeter and J. F. Rigby*. Frieze patterns, triangulated polygons and dichromatic symmetry // The lighter side of mathematics. 1961. P. 15—27. `http://www.link.cs.cmu.edu/15859-s11/notes/frieze-patterns-lighter-side.pdf`

5. *Ответ*. Да.

Решение. Разделим куб $ABCDA'B'C'D'$ на 8 кубов с ребром $1/2$ и впишем в кубы, прилегающие к вершинам A, C, B', D' черные шары, а в остальные — белые. Очевидно, что каждый черный шар касается трех белых и наоборот, а шары одного цвета не имеют общих точек. Теперь заменим черные шары шарами с диаметром $1/2 + \varepsilon$, а белые шарами с диаметром $1/2 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ меньше половины минимального расстояния между черными шарами, так что все шары по-прежнему касаются трехгранных углов куба.

Тогда черные шары по-прежнему не будут иметь общих точек. Докажем, что теперь и шары разного цвета не имеют общих точек. Действительно, пусть O_1, O_2 — центры шаров, вписанных в трехгранные углы при вершинах A и B, а r_1, r_2 — радиусы этих шаров. Тогда проекция отрезка O_1O_2 на AB равна $1 - r_1 - r_2 = 1/2$. Поскольку $r_1 \neq r_2$, то $O_1O_2 \nparallel AB$, следовательно, $O_1O_2 > 1/2 = r_1 + r_2$. Таким образом, никакие два из наших восьми шаров не имеют общих точек, и можно немного увеличить их радиусы.

6. *Ответ.* $N = 1512$.

Решение. Рассмотрим полный ориентированный граф, вершинами которого будут команды — участницы турнира, в котором ребро между двумя вершинами будет вести от победителя в матче между ними к проигравшему. Покрасим ребро в красный цвет, если встреча закончилась в дополнительное время, и в синий в противном случае.

Зафиксируем количество набранных очков командами и посмотрим на графы, соответствующие данному распределению очков. Среди всех таких графов выберем граф G, в котором количество красных ребер минимально.

ЛЕММА. *В красном подграфе графа G нет следующих подграфов*:

1) *неориентированных циклов*;

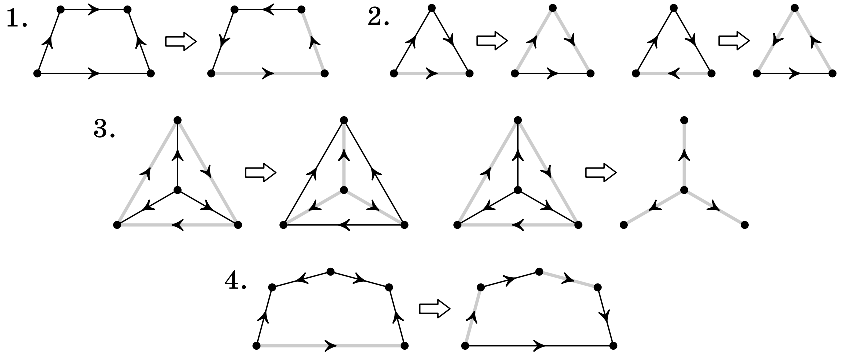
2) *ориентированных путей длины* 2;

3) *вершин степени* 3 *и более*;

4) *неориентированных путей длины* 4.

Доказательство. Покажем, как можно уменьшить количество красных ребер, если есть описанные выше подграфы.

1. Предположим, что в G есть неориентированный красный цикл. Тогда зададим на цикле направление обхода, совпадающее с направлением одного из ребер, и сделаем следующую операцию: ребра цикла, которые были ориентированы по направлению обхода, перекрасим в синий, а ориентированные против направления цикла переориентируем по направлению. После такого преобразования распределение очков не поменяется, так как для каждой команды количество очков во встрече с одним из соседей уменьшится на 1, а во встрече с другим увеличится на 1. Количество красных ребер уменьшилось.



2. Предположим, что в G есть красный ориентированный путь длины 2. Тогда можно считать, что ребро между началом пути и концом — синее. Если ребро было направлено от начала к концу, то поменяем цвет всех трех ребер, а если из конца в начало, то поменяем цвет и ориентацию всех трех ребер. Заметим, что такое преобразование не меняет количество очков, набранных командой, но уменьшает количество красных ребер.

3. Предположим, что в G есть вершина A красной степени 3 или более. Тогда выберем трех ее соседей B, C, D. При этом можно считать, что все три красных ребра исходят из вершины A (случай, когда направления различны, невозможен из-за отсутствия пути длины 2, а случай трех входящих аналогичен), а ребра между вершинами B, C, D синие.

Не ограничивая общности, можно считать, что ребра ведут из B в C и из C в D. Получается два случая: в первом ребро ведет из B в D, а во втором из D в B.

Тогда сотрем все ребра между A, B, C, D и нарисуем заново следующим образом:

В обоих случаях рисуем синие ребра из B в A, из A в C, из A в D. В первом случае проведем красные из B в D и из B в C и синее из C в D. Во втором случае проводим красные из D в B и из D в C и синее из C в B.

Итого распределение очков не поменялось, а количество красных ребер уменьшилось.

4. Предположим, что есть неориентированный красный путь длины 4: A, B, C, D, E. Тогда можно считать, что крас-

ные ребра ориентированы следующим образом: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$, а оставшиеся ребра синие.

Если A обыграла D, то можно изменить ребра AB, BC, CD, AD следующим образом: ребра $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ сделаем синими, а ребра $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ — красными. Распределение очков не поменялось, а количество красных ребер уменьшилось, поэтому далее можно считать, что D выиграла у A, а B выиграла у E.

Если B обыграла D, то изменим ребра AB, AD, BC, BD, CD следующим образом: ребра $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BA}$ сделаем синими, а $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ — красными.

Если D обыграла B, то изменим ребра BC, BD, BE, CD, DE: ребра $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DE}$ сделаем синими, а $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DC}$ — красными.

Распределение очков не поменялось, количество красных ребер уменьшилось.

Таким образом граф на красных ребрах без ориентации является лесом, в котором каждое дерево является цепочкой не более чем из 4 вершин. Тогда количество красных ребер равно $2016 - T$, где T — количество деревьев в графе на красных ребрах. Так как в каждом дереве не более 4 вершин, $T \geqslant 504$, т. е. $N \leqslant 1512$.

Рассмотрим турнир из 4 команд A, B, C, D. Пусть в нем ребра $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$ — красные, а ребра $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ — синие. Тогда команды A, B набрали по 7 очков, а команды C, D — по 2.

Заметим, что при таком распределении очков должно быть сыграно не менее 3 овертаймов, так как в дополнительное время должны закончится матчи между A и B и между C и D, так как A и B не могли проиграть в основное время, а C и D не могли победить в основное время. Если все оставшиеся матчи завершились в основное время, то суммарное количество очков у A и B будет кратно 3 — противоречие.

Разобьем 2016 команд на четверки (A_1, B_1, C_1, D_1), ..., $(A_{504}, B_{504}, C_{504}, D_{504})$. Пусть внутри четверок матчи закончились так, как описано выше, а при $i < j$ команда из i-й четверки побеждает команду из j-й в основное время.

Тогда из полученного распределения очков можно сделать вывод, что команда из i-й четверки действительно побеждает команду из j-й в основное время. В описанном случае внутри каждой четверки будет распределение очков 7, 7, 2, 2, поэтому будет не менее 3 овертаймов, а значит, всего овертаймов не менее 1512.

11 класс, первый день

1. *Ответ*. На одно.

Решение. Всего в ходе турнира было сыграно $\frac{12\cdot 11}{2}=66$ партий, т. е. разыграно столько же очков. По условию Вася проиграл одну партию, поэтому с 10 участниками он сыграл либо вничью, либо выиграл. Значит, он набрал не менее 5 очков. Тогда каждый из остальных набрал не менее $5\frac{1}{2}$ очков, а все шахматисты в сумме набрали не менее $11\cdot 5\frac{1}{2}+5=65\frac{1}{2}$ очков. Это возможно только в случае, если занявший первое место Петя набрал 6 очков, Вася набрал 5 очков, а остальные участники — по $5\frac{1}{2}$ очков.

2. *Ответ*. Нет.

Первое решение. Пусть $y=\arcsin x$, тогда $\arccos x=\frac{\pi}{2}-y$. Наименьшее значение квадратичной функции

$$f(y)=y^2+\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2=2y^2-\pi y+\frac{\pi^2}{4}$$

достигается при $y=\frac{\pi}{4}$ (тогда $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$) и равно $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{8}>\frac{9}{8}>1$, поэтому значения x, при котором выполнено равенство из условия задачи, не существует.

Второе решение. Предположим, что при некотором x данное равенство выполнено. Тогда существует такое число α, что $\sin\alpha=\arcsin x$, $\cos\alpha=\arccos x$ и

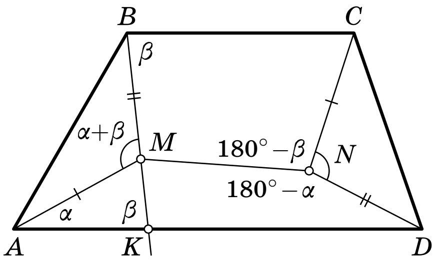
$$\arcsin x+\arccos x=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}.$$

С другой стороны,

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}>\sqrt{2},$$

так как $\pi>3>2\sqrt{2}$. Противоречие.

3. *Решение*. Продолжим прямую BM до пересечения с прямой AD в некоторой точке K и обозначим $\angle MAK=\alpha$, $\angle AKM=\beta$ (см. рисунок). Тогда $\angle AMB$ — внешний угол



треугольника AMK при вершине M, поэтому $\angle AMB = \alpha+\beta$. Далее, $\angle KBC = \angle AKB = \beta$ (накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей BK). Поскольку четырехугольник $AMND$ вписанный, сумма его противоположных углов равна $180°$, поэтому $\angle MND = 180° - \alpha$. Аналогично из того, что четырехугольник $BMNC$ вписанный, следует равенство $\angle MNC = 180° - \beta$. Следовательно, $\angle CND = 360° - \angle MNC - \angle MND = \alpha + \beta = \angle AMB$. Кроме того, по условию $AM = CN$ и $BM = DN$, поэтому треугольники AMB и CND равны (по двум сторонам и углу между ними), откуда $AB = CD$, т. е. трапеция $ABCD$ равнобедренная. Отсюда следует, что прямая l, проходящая через середины ее оснований AD и BC, перпендикулярна этим основаниям. Заметим, что центр окружности, в которую вписан четырехугольник $AMND$, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AD, т. е. на прямой l. Аналогично центр окружности, в которую вписан четырехугольник $BMNC$, также лежит на прямой l. Отрезок MN является общей хордой для этих двух окружностей, поэтому прямая l, соединяющая их центры, перпендикулярна также и прямой MN. Итак, основания трапеции и прямая MN перпендикулярны одной и той же прямой l и поэтому параллельны.

Комментарий. Равенство углов $\angle AMB$ и $\angle CND$ можно доказать и другими способами. Например, так: пользуясь тем, что четырехугольники $AMND$ и $BMNC$ вписанные, а углы $\angle BCD$ и $\angle ADC$ в сумме дают $180°$, получаем

$$\begin{aligned}\angle AMB &= 360° - \angle BMN - \angle AMN = \\ &= 360° - (180° - \angle BCN) - (180° - \angle ADN) = \\ &= \angle BCN + \angle ADN = (\angle BCD - \angle NCD) + (\angle ADC - \angle NDC) = \\ &= 180° - \angle NCD - \angle NDC = \angle CND.\end{aligned}$$

4. *Решение.* Необходимость условия сразу следует из того, что доля выпитого любым членом клуба не превосходит одной трети от общего объема выпитого и, значит, одной трети от общего объема принесенного сока (общий объем выпитого равен утроенному объему выпитого этим членом клуба плюс объему выпитого тройками членов клуба, в которые он не входил).

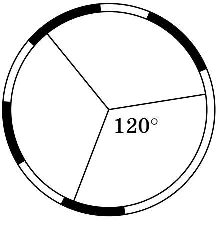
Докажем достаточность.

Первый способ. Проведем индукцию по числу членов клуба. Если $n=3$, то по условию задачи доля каждого из трех членов клуба равна одной трети от общего количества, и они смогут выпить весь свой сок, присев за столик один раз. База индукции установлена.

Перейдем к случаю $n \geqslant 4$. Предположим, что максимальная доля сока была лишь у одного члена клуба. В этом случае за столик присаживаются член клуба с максимальной долей и два — с минимальной. Пока они пьют, доля каждого из них в общем объеме уменьшается, а доли всех оставшихся возрастают. Пусть они продолжают пить до тех пор, пока один из членов клуба с наименьшей долей не допьет все до конца (тогда оставшиеся члены клуба смогут допить весь свой сок в соответствии с предположением индукции), либо наибольшая из долей членов клуба, не сидящих за столиком, не сравняется с максимальной (принадлежащей одному из сидящих за столиком). Таким образом, остается рассмотреть случай, когда не менее чем у двух членов клуба доля сока максимальна. Перейдем к рассмотрению этого случая.

Предположим, что доля максимальна ровно у двух членов клуба. Тогда за столик присаживаются эти два члена, а также третий, обладающий минимальной долей. Пусть они продолжают пить до тех пор, пока член клуба с минимальной долей не допьет весь свой сок до конца (тогда оставшиеся члены клуба смогут допить весь свой сок в соответствии с предположением индукции), либо наибольшая из долей членов клуба, не сидящих за столиком, не сравняется с максимальной (принадлежащей двоим из сидящих за столиком). Таким образом, остается рассмотреть случай, когда не менее чем у трех членов клуба доля сока максимальна.

Предположим, что доля максимальна у $k \geqslant 3$ членов клуба. Опишем алгоритм, позволяющий всем членам клуба выпить весь принесенный сок. Пусть Δ — разница в объеме сока между максимальной и следующей по величине долями. Члены клуба с максимальной долей поочередно пьют в тройках «по кругу» (т. е. сначала первый со вторым и третьим, затем второй с третьим и четвертым и т. д., а в конце k-й с первым и вторым), при этом каждая тройка выпивает по $\Delta/3$. После этого количество членов клуба с максимальной долей увеличивается по крайней мере на одного. Так продолжаем до тех пор, пока доли всех членов клуба не станут одинаковыми. Далее все допивают остаток таким же способом — в тройках «по кругу».



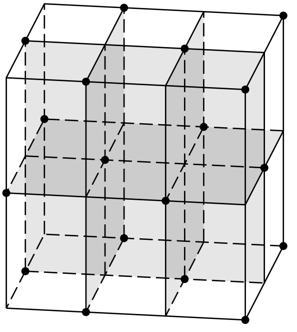
Второй способ. Разобьем окружность единичной длины на n дуг, длины которых равны соответственно долям сока, принесенного каждым из n членов клуба. Расположим в круге «тройник» — фигуру из трех радиусов, образующих попарно углы в $120°$ (см. рисунок). Поскольку длина каждой дуги не превосходит $1/3$, ни при каком положении тройника разные его концы не будут указывать на внутренние точки дуги, соответствующей одному члену клуба.

Поставим тройник в произвольное начальное положение, в котором все его концы показывают на внутренние точки дуг. За столик посадим членов клуба, соответствующих дугам. Будем вращать тройник по часовой стрелке и сопоставлять повороту выпивание каждым из членов клуба, сидящим за столиком, доли сока (относительно общего начально принесенного объема), равной длине дуги, вдоль которой прошел соответствующий конец тройника. В момент, когда хотя бы один из концов тройника проходит крайнюю точку дуги, будем проводить смену членов клуба, сидящих за столиком: столик будет покидать участник, из чьей дуги выходит конец тройника, а присаживаться — участник, в дугу которого входит этот конец тройника.

Несложно видеть, что поворот тройника на $120°$ обеспечит способ выпивания членами клуба всего сока, который они принесли с собой.

5. *Ответ.* а) Можно; б) нельзя.

Решение. а) Выберем в кубе три ребра, имеющих общую вершину. Проведем первые две плоскости перпендикулярно первому ребру так, чтобы оно делилось этими плоскостями на три равные части. Третью плоскость проведем перпендикулярно второму ребру через его середину. Четвертую плоскость проведем перпендикулярно третьему ребру через его середину. Тогда куб разрежется на 12 одинаковых прямоугольных параллелепипедов со сторонами $1/3$, $1/2$ и $1/2$, как показано на рисунке. Расстояние между любыми двумя точками прямоугольного параллелепипеда не превосходит его диагонали. Длины диагоналей всех 12 частей, на которые разрезан куб, равны $\sqrt{\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}=\sqrt{\frac{11}{18}}$. Поскольку $11\cdot 25=275<288=16\cdot 18$, имеют место неравенства $\frac{11}{18}<\frac{16}{25}$ и $\sqrt{\frac{11}{18}}<\frac{4}{5}$. Следовательно, при указанном разрезании для каждой из частей расстояние между любыми двумя ее точками меньше $4/5$.



б) Пусть куб разрезан на 12 одинаковых прямоугольных параллелепипедов, как это сделано в решении пункта а). Отметим 18 вершин этих параллелепипедов так, чтобы никакие две из них не являлись концами одного ребра ни одного из этих параллелепипедов (см. рисунок). Тогда расстояние между любыми двумя отмеченными вершинами не меньше некоторой диагонали грани параллелепипеда со сторонами $1/3$, $1/2$ и $1/2$, а значит, не меньше $\sqrt{\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}}=\sqrt{\frac{13}{36}}$. Поскольку $13\cdot 49=637>576=16\cdot 36$, имеют место неравенства $\frac{13}{36}>\frac{16}{49}$ и $\sqrt{\frac{13}{36}}>\frac{4}{7}$. Таким образом, расстояние между любыми двумя из отмеченных вершин больше 4/7.

Предположим, что куб разрезан на части какими-нибудь четырьмя плоскостями. Нетрудно видеть, что три плоскости могут разрезать куб не более чем на 8 частей. При этом четвертая плоскость может разрезать каждую из этих частей не более чем на две новые части. Следовательно, четыре плоскости могут разрезать куб не более чем на 16 частей. (На самом деле таких частей может быть не более 15, предлагаем заинтересованному читателю доказать это самостоятельно.) Значит, какие-нибудь две из отмеченных ранее вершин обязательно попадут в одну из частей. Поэтому при любом разрезании единичного куба четырьмя плоскостями найдется такая часть и такие две ее точки, что расстояние между этими точками больше 4/7.

6. *Ответ*. 2^k.

Решение. Достаточность такого количества туземцев доказывается по индукции. Действительно, для $k=1$ достаточно двух туземцев, которые переправляются вместе на другой берег. Если для $k=m$ достаточно 2^m туземцев, то для $k=m+1$ сначала (в соответствии с предположением индукции) могут переправиться на правый берег 2^m туземцев, каждый из которых узнает при этом не менее m анекдотов, а затем каждый из них поочередно переплывает по одному разу на левый берег и перевозит оттуда одного из оставшихся там 2^m туземцев, узнав по дороге его анекдот и рассказав ему не менее $m+1$ анекдота, известного ему на тот момент. В результате каждый из 2^{m+1} туземцев узнает не менее $m+1=k$ новых анекдотов.

Остается показать, что меньшего числа туземцев недостаточно.

Способ 1. Облегчим задачу: пусть N туземцев не переправляются через реку, а просто совершают не более $N-1$ прогулки вдвоем по озеру с возвращением в компанию. Докажем, что даже в этой задаче $N \geqslant 2^k$.

Построим граф: вершины — туземцы, ребро соединяет плывших вместе. В этом графе N вершин и $N-1$ ребро (если некоторые пары катались вместе более одного раза, то в этом графе есть кратные ребра). Если N для данного k

выбрано минимальным, то этот граф связен. Действительно, в противном случае рассмотрим компоненту связности, в которой ребер меньше, чем вершин (при этом их меньше максимум на 1 в силу связности), и выполним только рейсы из этой компоненты. Раз этот граф связен и имеет $N-1$ ребро, он является деревом (в частности, не имеет кратных ребер).

Докажем теперь при помощи индукции по k, что $N \geqslant 2^k$. База очевидна. Для доказательства шага выкинем из графа ребро, соответствующее первому рейсу. Граф распадется на 2 компоненты связности. В каждой знают не более одного анекдота из другой компоненты. Значит, каждый знает не менее k анекдотов из своей компоненты (считая свой). По предположению индукции, в каждой из компонент не менее 2^{k-1} туземцев, а всего — не менее 2^k.

Способ 2. Назовем *индексом* туземца число известных ему анекдотов сверх своего. Туземцев с ненулевым индексом назовем *богатыми*, остальных — *бедными*, а *капиталом* туземца с индексом m назовем число 2^{-m} (здесь следует отметить, что так определенный капитал уменьшается с ростом количества анекдотов, известных туземцу).

Для моментов времени, в которые лодка находится на правом берегу, вычислим число S как сумму капиталов всех богатых туземцев (независимо от того, на каком берегу они находятся) минус количество L богатых туземцев на левом берегу. При первом появлении лодки на правом берегу $S=2^{-1}+2^{-1}-0=1$. Докажем, что S по мере переправы не уменьшается. Между последовательными попаданиями лодки на правый берег возможны 3 вида случаев: количество богатых туземцев в лодке на пути с левого берега на правый оказалось равным 0, 1 или 2.

В случае нуля богатых туземцев в лодке двое бедных по дороге на правый берег стали богатыми и увеличили S на $2^{-1}+2^{-1}=1$. Но на левый берег лодку перегонял богатый туземец, который на левом берегу и остался, увеличив L на 1. Значит, в этом случае S не изменилась.

Рассмотрим случай одного богатого туземца в лодке. Число L в этом случае не изменилось. Севший в лодку богатый знал (помимо своего) m анекдотов, его капитал был равен 2^{-m}. Теперь он и его спутник знают (помимо своих) по $m+1$

анекдоту, и сумма их капиталов равна $2^{-m-1}+2^{-m-1}=2^{-m}$, т. е. вновь S не изменилась.

Наконец, в случае двух богатых туземцев в лодке число L уменьшается на 1, а сумма капиталов приплывших на правый берег богатых туземцев уменьшается, но, будучи изначально не более $2^{-1}+2^{-1}=1$, она уменьшается менее чем на 1. Тем самым, в итоге S увеличилась.

Итак, в конце $S\geqslant 1$, $L=0$, а капитал каждого туземца не более 2^{-k}. Значит, туземцев не менее 2^k.

11 класс, второй день

1. *Ответ*. 996.

Решение. Если квадрат некоторого натурального числа n оканчивается на 2016, то $n^2=10000k+2016$ при некотором натуральном k. Тогда $n^2-16=(n-4)(n+4)=10000k+$ $+2000=2^4\cdot 5^3\cdot(5k+1)$. Числа $n-4$ и $n+4$ не могут одновременно делиться на 5, так как их разность равна 8 и на 5 не делится. Следовательно, либо $n-4$, либо $n+4$ делится на 5^3. Кроме того, оба числа четны и делятся на 4, иначе их произведение не делилось бы на 2^4. Значит, хотя бы одно из этих чисел делится на $5^3\cdot 4=500$, т. е. $n=500m\pm 4$, $n^2=250000m^2\pm 4000m+16$. Если $m=1$, то n^2 оканчивается на 6016 или 4016. Если же $m=2$ и выбран знак «минус», то получаем число $n=996$ — наименьшее удовлетворяющее условию задачи, так как $996^2=992016$.

2. *Ответ*. Можно.

Первое решение. Всего имеется 77 гирь, массы которых равны $\ln 3, \ln 4, \ln 5, \ldots, \ln 79$ г. Положим на левую чашу весов гири массой $\ln 3$ г и $\ln 4$ г, а на правую — гирю массой $\ln 5$ г. Тогда разность масс на чашах будет равна $\ln 3+$ $+\ln 4-\ln 5=\ln\frac{12}{5}=\ln 2{,}4$ г, где $0<\ln 2{,}4<\ln e=1$, т. е. весы будут в равновесии. Разобьем оставшиеся 74 гири на 37 пар: $\{\ln 6, \ln 7\}$, $\{\ln 8, \ln 9\}$, $\ldots$, $\{\ln 78, \ln 79\}$. Последовательно будем брать пары и класть более тяжелую гирю на чашу, на которой в данный момент лежат гири с меньшей суммарной массой (обозначим эту суммарную массу в граммах через L), а более легкую гирю на чашу, на которой в данный момент лежат гири с большей суммарной массой (обозначим эту суммарную массу в граммах через H). Если суммарные массы на обеих чашах совпадают ($L = H$), то положим на произвольную чашу одну гирю пары, а на другую чашу — вторую гирю пары. Тогда с учетом неравенства $0 \leqslant H - L < 1$ после очередного докладывания разность масс на чашах будет равна $(H + \ln n) - (L + \ln(n+1))$, что меньше $H - L < 1$ и при этом больше

$$\ln n - \ln(n+1) = \ln \frac{n}{n+1} > \ln \frac{1}{2} > -1.$$

Таким образом, после докладывания очередной пары гирь весы будут оставаться в равновесии, которое сохранится и при распределении всех гирь по чашам в соответствии с описанным алгоритмом.

Второе решение. Положим на левую чашу весов гири массами $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 7$, ..., $\ln 79$ г, а на правую — гири массами $\ln 4$, $\ln 6$, $\ln 8$, ..., $\ln 78$ г. Масса на левой чаше будет больше, чем на правой, причем разница составит

$$\ln\left(3 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{79}{78}\right) > \ln 3 > 1.$$

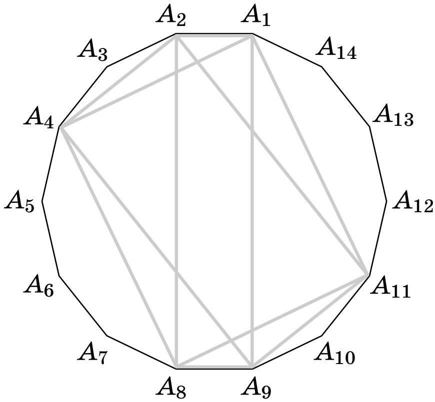
Далее будем последовательно брать пары гирь $\{\ln 79, \ln 78\}$, $\{\ln 77, \ln 76\}$, ..., $\{\ln 5, \ln 4\}$ (гири в каждой паре лежат на разных чашах весов) и для каждой пары менять составляющие ее гири местами (гирю с левой чаши перекладывать на правую и наоборот). Если эта операция будет проделана для каждой пары, то разность между суммарными массами гирь на левой и правой чашах составит

$$\ln\left(3 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{78}{79}\right) < \ln \frac{3 \cdot 4}{5} = \ln 2{,}4 < 1.$$

В процессе перекладывания гирь $\{\ln n, \ln(n+1)\}$, образующих пару, эта разность уменьшается на $2(\ln(n+1) - \ln n) = 2 \ln \frac{n+1}{n} < 2 \ln 2 < 2$ г. Значит, в результате первого такого перекладывания, после которого масса на левой чаше станет меньше, чем масса на правой чаше плюс 1 г, весы будут находиться в равновесии.

3. *Ответ.* а) Да; б) нет.

Решение. а) В самом деле, пусть $A_1A_2\ldots A_{14}$ — правильный 14-угольник (см. рисунок). Отметим 6 его вершин: A_1, A_2, A_4, A_8, A_9, A_{11}. Поскольку правильный 14-угольник вписан в окружность, а параллельные прямые высекают



на ней равные дуги, заключаем, что если некоторые два отрезка с концами в вершинах этого многоугольника параллельны, то между ними с двух сторон лежит равное число сторон 14-угольника. Из отрезков с концами в отмеченных 6 вершинах этим свойством обладают только пары отрезков A_1A_2 и A_8A_9, A_2A_4 и A_9A_{11}, A_1A_4 и A_8A_{11}, A_4A_8 и A_1A_{11}, A_4A_9 и A_2A_{11}, A_1A_9 и A_2A_8. Перечисленные пары отрезков являются сторонами трех параллелограммов, вписанных в окружность, т. е. прямоугольников.

б) Докажем, что какие бы семь вершин правильного 14-угольника ни были отмечены, всегда найдется трапеция с вершинами в отмеченных точках. Проведем прямые через всевозможные пары вершин правильного 14-угольника. Покажем, что среди этих прямых можно выбрать 14 попарно не параллельных, а среди любых 15 прямых хотя бы две будут параллельны (если прямые параллельны, то будем далее говорить, что они имеют одно *направление*). В самом деле, прямые A_1A_2, A_3A_{14}, ..., A_8A_9 имеют одно направление. Прямые A_1A_{14}, A_2A_{13}, ..., A_7A_8 также имеют одно направление, отличное от уже рассмотренного, поскольку каждая из них получается из соответствующей прямой первого направления поворотом на угол $\pi/7$ вокруг центра 14-угольника. Поворачивая эти прямые на тот же угол далее, получим еще 5 новых направлений. Рассмотрим теперь прямые A_3A_1, A_4A_{14}, ..., A_8A_{10}. Все они имеют одно направление, отличное от семи, указанных выше. Шестью последовательными поворотами этих прямых на угол

$\pi/7$ вокруг центра 14-угольника получим еще 6 новых направлений прямых, проходящих через вершины правильного 14-угольника. Остается заметить, что любая прямая, содержащая отрезок с концами в вершинах правильного 14-угольника, имеет одно из перечисленных 14 направлений, а именно, если между концами отрезка лежит четное число вершин, то одно из первых семи направлений, а если нечетное, то одно из последних семи направлений.

Соединим все отмеченные вершины отрезками; их число равно $\frac{7\cdot 6}{2}=21$. Если некоторые три отрезка имеют одно направление, то некоторые 2 из них являются основаниями трапеции. В самом деле, если параллелограмм вписан в окружность, то он прямоугольник, причем его противоположные стороны стягивают одинаковое число сторон многоугольника (см. решение п. а)). Следовательно, если вершины каких-либо двух из трех отрезков данного направления лежат в вершинах такого прямоугольника, то концы любого из этих двух отрезков и третьего отрезка лежат в вершинах трапеции.

Пусть теперь для каждого из 14 направлений имеется не более 2 отрезков из 21 проведенных. Это означает, что существуют не менее семи направлений, для каждого из которых есть ровно 2 параллельных отрезка с концами в отмеченных точках. Рассмотрим любое направление, для которого есть два таких отрезка. Обозначим их AB и CD. Если они не являются основаниями трапеции, то это стороны прямоугольника, поэтому отрезки AC и BD параллельны и принадлежат перпендикулярному направлению. Следовательно, все направления, для которых имеются 2 отрезка, распадаются на пары взаимно перпендикулярных, а значит, число направлений, для каждого из которых есть ровно 2 параллельных отрезка с концами в отмеченных точках, не меньше 8, а соответствующие пары взаимно перпендикулярных отрезков являются сторонами не менее 4 различных прямоугольников с вершинами в отмеченных точках. Поскольку все вершины каждого прямоугольника разбиваются на пары диаметрально противоположных, а среди 7 отмеченных точек хотя бы одна такова, что диаметрально противоположная ей точка не отмечена, получаем, что вершины прямоугольников могут располагаться не более чем в 6 из отмеченных точек. Но может существовать не более трех различных прямоугольников с вершинами в 6 данных точках окружности, получили противоречие.

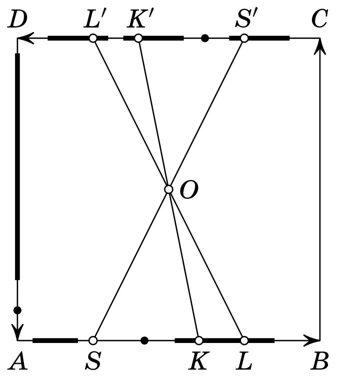
Итак, какие бы семь или более вершин правильного 14-угольника мы ни отметили, всегда найдется трапеция с вершинами в отмеченных точках.

Комментарий. В 1981 году участникам Московской математической олимпиады предлагалось доказать, что если у правильного 1981-угольника отмечены 64 вершины, то существует трапеция с вершинами в отмеченных точках. Доказательство было основано на том, что количество отрезков с концами в отмеченных точках равно $\frac{64(64-1)}{2}=2016$, что больше, чем 1981. Может показаться, что если среди вершин правильного n-угольника отмечены k точек, причем $k(k-1)/2>n$, то среди отмеченных точек обязательно найдутся четыре, являющиеся вершинами трапеции. Оказывается, что это не так: например, при $k=6$ и $n=14$ имеем $k(k-1)/2>n$, но среди вершин правильного 14-угольника можно отметить 6 точек так, что никакие четыре из них не будут вершинами трапеции, так как любой четырехугольник с вершинами в отмеченных точках, имеющий две параллельные стороны, является прямоугольником.

4. *Ответ.* Не мог.

Решение. Предположим, что папа видел мальчика больше половины указанного времени. Тогда папа видел мальчика больше половины времени, пока мальчик проезжал какой-нибудь один круг.

Рассмотрим этот круг. Пусть он начинался и заканчивался в точке S периметра школы. Обозначим вершины периметра школы через A, B, C и D так, чтобы точка S лежала на отрезке AB, а мальчик, делая круг, проезжал эти вершины в порядке B, C, D и A (см. рисунок). Отметим множество M всех точек, в которых находился мальчик, пока его видел папа. Это множество может состоять из отдельных точек и промежутков, лежащих на сторонах квадрата $ABCD$, причем по нашему предположению суммарная длина этих промежутков больше половины периметра этого квадрата. При симметрии относительно центра O этого квадрата множество M перейдет в множество M', суммарная длина промежутков которого также больше половины



периметра квадрата. Значит, эти множества имеют пересечение, которое содержит бесконечно много точек. Какие-нибудь две из этих точек, назовем их K и L, лежат внутри одного из отрезков: SB, BC или CS', где S' — точка, симметричная S относительно O.

Без ограничения общности будем считать, что точки K и L лежат внутри отрезка SB, причем точку K мальчик проехал раньше. По построению этих точек получаем, что папа видел мальчика не только в точках K и L, но и в симметричных им относительно O точках K' и L'. Значит, папа находился на стороне AB, когда мальчик находился в точке L, и на стороне CD, когда мальчик находился в точке K'. Сумма длин отрезков LB, BC и BK' меньше половины периметра квадрата. Значит, мальчик от точки L до точки K' проехал меньше половины периметра школы, а папа за то же время прошел меньше четверти периметра школы. Пришли к противоречию, ведь чтобы добраться от стороны AB до стороны CD папе нужно было пройти не менее четверти периметра школы.

5. *Ответ*. Да.

Решение. Для любого натурального $k \geqslant 2$ положим

$$P_k(x) = \underbrace{P(P(\ldots P}_{k \text{ раз}}(x)\ldots)), \quad P_1(x) = P(x).$$

По условию задачи $P_m(x)$ имеет действительные корни, причем только положительные. Покажем, что $P(x)$ имеет действительные корни, причем только положительные.

Предположим, что $P(x)$ не имеет положительных корней. Тогда $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 > 0$ при достаточно больших x и не меняет знак при $x > 0$, т. е. P переводит положительные числа в положительные. Значит, тем же свойством обладают все многочлены P_k. Это противоречит тому, что у $P_m(x)$ есть положительные корни. Поэтому многочлен $P(x)$ также имеет положительные корни.

Если $P(0) = 0$, то $P_m(0) = 0$. Значит, ноль не является корнем многочлена $P(x)$.

Предположим, что у $P(x)$ есть и отрицательный, и положительный корни. Докажем методом математической индукции, что тогда при всех натуральных k многочлен $P_k(x)$ также имеет и отрицательный, и положительный корни.

При $k = 1$ утверждение верно. Предположим, что оно верно при некотором $k = j$. Обозначим через x_1 и x_2 соответственно наименьший и наибольший корни многочлена $P(x)$, а через x_3 и x_4 соответственно наименьший и наибольший корни многочлена $P_j(x)$. Тогда $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_3 < 0$, $x_4 > 0$. Если число n нечетно, многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ принимает все значения от $-\infty$ до 0 до на луче $(-\infty, x_1]$. Значит, на этом луче найдется такое число x_5, что $P(x_5) = x_3$. Если число n четно, многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ принимает все значения от 0 до $+\infty$ на луче $(-\infty, x_1]$. Значит, на этом луче найдется такое число x_5, что $P(x_5) = x_4$. В обоих случаях многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ принимает все значения от 0 до $+\infty$ на луче $[x_2, +\infty)$. Значит, на этом луче найдется такое число x_6, что $P(x_6) = x_4$. Следовательно, в обоих случаях $P_{j+1}(x_5) = P_j(P(x_5)) = 0$ и $P_{j+1}(x_6) = P_j(P(x_6)) = 0$. При этом $x_5 < 0$ и $x_6 > 0$. Утверждение доказано.

Значит, если у $P(x)$ есть и отрицательный, и положительный корни, то у $P_m(x)$ есть и отрицательный, и положительный корни. Пришли к противоречию.

Остается единственная возможность: многочлен $P(x)$ имеет действительные корни, причем только положительные.

6 класс (*2863 работы*)

	1	2	3	4	5	6
0	1251	1945	2472	2760	1345	2487
1	3	310	31	55	771	215
2	4	116	4	22	161	71
3	1605	65	149	5	81	38
4		164	16	10	156	22
5		263	10	2	169	0
6			181	8	50	1
7					130	1
8						28

7 класс (*2094 работы*)

	1	2	3	4	5	6а	6б
0	1560	1010	1752	1896	2075	1141	1990
1	0	241	0	0	0	257	19
2	5	116	0	0	9	331	9
3	0	84	0	0	0	15	35
4	529	51	0	0	0	350	14
5		38	0	0	7		21
6		554	342	198	0		6
9					1		
10					2		

8 класс (*1214 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	448	191	172	34	3	0
$+.$	2	54	12	24	1	0
$\pm$	10	104	4	33	0	1
$\mp$	2	178	2	33	13	2
$-.$	3	50	10	54	13	2
$-$	631	542	383	620	568	594
0	118	95	631	416	616	615

9 класс (*890 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	324	349	32	26	15	2
$\pm$	59	8	25	4	2	0
$\mp$	32	8	52	5	7	0
$-$	475	525	781	855	866	888

10 класс (*758 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	378	43	46	67	3	1
$+.$	27	0	10	8	0	1
$\pm$	16	80	0	15	4	0
$\mp$	0	9	6	31	14	5
$-.$	0	1	28	11	0	6
$-$	287	227	217	367	462	299
0	50	398	451	259	275	446

11 класс, первый день (*657 работ*)

	1	2	3	4	5а	5б	6
$+$	265	303	115	33	239	3	3
$\pm$	31	23	10	16	22	3	1
$\mp$	125	14	122	208	10	10	93
$-$	236	317	410	400	386	641	560

11 класс, второй день (*286 работ*)

	1	2	3а	3б	4	5
$+$	95	34	90	23	16	6
$\pm$	31	25	68	8	8	2
$\mp$	55	41	1	29	45	5
$-$	105	186	127	226	217	273

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. На факультете действуют научные школы, возглавляемые учеными самого высокого класса. Учебные планы факультета охватывают все современные направления математики и механики. Диплом механико-математического факультета признан во всем мире. Выпускники факультета трудятся во всех крупных научно-исследовательских центрах, учебных и иных учреждениях, не обязательно непосредственно связанных с математикой и механикой. На мехмате учат не столько рецептам решения конкретных задач, сколько умению думать самостоятельно, а также извлекать знания из разных источников. Именно это позволяет выпускникам факультета быстро включаться и быть эффективными практически в любой иной сфере деятельности — от компьютерной или финансовой до управления производством и политики.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ВШЭ

С момента своего основания в 2008 году факультет математики НИУ ВШЭ поддерживает и развивает традиции российской математической школы, которая по праву считается одной из сильнейших в мире.

Среди сотрудников факультета и ассоциированных научных подразделений — ученые из Великобритании, Германии, Канады, США и Японии, более половины — доктора наук, 25 имеют степень западного университета, 14 — приглашенные докладчики Международного Математического Конгресса, многие являются обладателями престижных международных и российских премий.

Первые выпуски бакалаврской и двух магистерских образовательных программ факультета показали их удивительную эффективность для каждой из столь разнообразных категорий студентов: желающие получить степень

PhD по математике, матфизике или экономике оказались востребованы в лучших западных университетах (включая Гарвард, Принстон и MIT) и российских университетах, а желающие найти себя вне академической среды (ведь креативность и «тренированные мозги», которыми славятся математики, нужны везде) работают в наукоемких направлениях, в том числе в сферах страхования, аналитики, IT.

Сайт факультета: `math.hse.ru`

ФАКУЛЬТЕТ ИННОВАЦИЙ И ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ МФТИ

Признанный лидер в области образования и науки на стыке математики, программирования и computer science.

На факультете представлены уникальные учебные планы по математике, в которых традиционное фундаментальное математическое образование подкреплено не имеющим аналогов набором курсов по дискретной математике: комбинаторике, теории графов, логике и теории алгоритмов, теории чисел, дискретным функциям, дискретному анализу, дискретной оптимизации.

Преподавание программирования на факультете осуществляется талантливыми преподавателями, непосредственно работающими в высокотехнологичных и наукоемких компаниях — Яндексе, Абби и др.

На факультете ведется большая научная и исследовательская работа, к которой студенты активно привлекаются уже на ранних курсах.

По окончании факультета студент имеет широкий спектр перспектив — занятия чистой наукой, прикладные исследования, аналитика и разработка в крупнейших компаниях России и мира.

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru
www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ
www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях. Приглашаем совершить познавательные экскурсии по красивым математическим задачам. Их постановка понятна школьнику, но до сих пор некоторые задачи не решены учеными.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»
www.problems.ru

Все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.) размещены на сайте www.problems.ru

Первые научно-популярные журналы начали выходить в России более двух веков назад. На их статьях выросло не одно поколение российских ученых, инженеров, просто думающих и читающих людей самых разных родов занятий. Сейчас старые номера этих журналов доступны читателям лишь в ничтожном числе библиотек. Электронные архивы призваны сделать их материалы доступными для широкой аудитории.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (1886—1917)

vofem.ru

Журнал, фактически заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год его существования вышло 674 выпуска В.О.Ф.Э.М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое. Среди постоянных рубрик журнала были, например: «Статьи, посвященные вопросам преподавания математики и физики», «Опыты и приборы», «Математические мелочи», «Библиографический отдел».

Статьи составлялись настолько популярно, насколько это возможно без ущерба для научной стороны дела.

ЖУРНАЛ «ПРИРОДА» (1912—)

priroda.ras.ru

Ежемесячный научно-популярный журнал Российской академии наук (РАН) «Природа» — одно из старейших в России изданий. Первый номер этого журнала вышел в 1912 году.

Фактически перед вами огромная энциклопедия по естественным наукам, составленная и регулярно пополнявшаяся отечественными учеными на протяжении 100 лет.

ЖУРНАЛ «КВАНТ» (1970—)

kvant.ras.ru

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 8—11 КЛАССОВ

состоится 17 апреля 2016 года

Олимпиада рассчитана на школьников, успешно выступающих в городских математических олимпиадах, а также на школьников, увлекающихся геометрией.

Олимпиада по геометрии проводится в рамках Всероссийской олимпиады по геометрии памяти Игоря Федоровича Шарыгина. В ней могут принять участие школьники 8—11 классов. Призеры олимпиады будут награждены дипломами оргкомитета и математической литературой. Победители олимпиады — учащиеся 8—10 классов — будут приглашены на финальный тур Всероссийской олимпиады по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, который состоится в июле 2016 года в г. Дубне под Москвой.

Для участия в олимпиаде необходима предварительная регистрация. Подробности на сайте

olympiads.mccme.ru/ustn

ВЫЕЗДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

Подробную оперативную информацию о выездных математических и околоматематических школах смотрите на странице www.mccme.ru/leto

Шестнадцатая летняя школа
«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

пройдет с 19 по 30 июля 2016 года в Дубне (на базе дома отдыха «Ратмино») для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс).

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, заполните до 10 мая анкету участника. (Персонально приглашаются на школу обладатели дипломов I—II степени в параллели 10 и 11 классов на этой или предыдущей ММО.)

Председатель научного комитета школы — профессор А. Б. Сосинский.

Предварительное согласие провести занятия на школе дали академик РАН В. А. Васильев, чл.-корр. РАН Д. О. Орлов и И. А. Панин, проф. А. Б. Сосинский, В. М. Тихомиров, М. Э. Казарян, С. К. Ландо, А. М. Райгородский и И. В. Аржанцев, а также В. А. Клепцын, С. М. Львовский, В. А. Тиморин, Г. Ю. Панина, И. В. Ященко и другие.

Материалы прошедших школ и информацию о ЛШСМ-2016 смотрите на сайте

`www.mccme.ru/dubna`

Контактный e-mail оргкомитета `dubna@mccme.ru`

ИНФОРМАЦИЯ О НАБОРЕ
в московские специализированные школы и классы на 2016/2017 учебный год

Школа	Телефон, URL	Адрес	Классы
2	(499) 137-17-69 sch2.ru	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	6—8 физ.-мат.; добор в 7—10 физ.-мат.
54	(499) 245-54-25 (499) 245-99-72 moscowschool54.ru	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	8 матем.
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58 sch57.ru	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8, 9 матем., 9 гум., биол.; добор в 10 биол.
179	(495) 692-48-51 www.179.ru	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	6 изобр., 7—9 матем., 9 биол.
218	(499) 976-19-85 blinkov@mccme.ru school218.ru	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская»)	8 (индивид. уч. план);
444	(495) 465-23-52 (495) 465-60-52 schv444.mskobr.ru	ул. Ниж. Первомайская, 14 (м. «Первомайская»)	5; добор в 7, 8, 10 физ.-мат.
1329	sch1329.mskobr.ru	Никулинская улица, 10 (м. «Юго-Западная»)	6 физ.-мат., 7 физ.-хим., 8 фил.
1534	gym1534.ru gym1534@mail.ru	ул. Кедрова, 11 (м. «Академическая»)	5 матем.; добор в 7—9 матем., 8—10 физ.-мат. и биол.-хим.
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-44 www.1543.ru	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8 матем., физ.-хим., биол., гум.
2007	(495) 716-29-35 fmsh2007.ru	ул. Горчакова, 9, корп. 1 (м. «ул. Горчакова»)	5—10
2101	(499) 144-26-65 sch2101.mskobr.ru baryshev@sch2101.ru	ул. Кастанаевская, 29, корп. 1 (м. «Филевский парк»)	8 матем.; добор в 9—10 матем.
«2×2»	mathbaby.ru nabor@mathbaby.ru	в шк. 1329, 2086, 1210, 1580	5—7 матем.; добор в 7, 8 матем.
Интеллектуал	sch-int.ru priem.intellectual@yandex.ru	ул. Кременчугская, 13 (м. «Славянский бульвар»)	5; добор в 7, 8 (индивид. уч. план)
Курчатовская школа	(499) 194-10-44 kurchat.mskobr.ru	ул. Маршала Василевского, 9, корп. 1 (м. «Щукинская»)	5 матем., 7, 10 физ.-мат.; добор в 11 физ.-мат.
СУНЦ	(499) 445-11-08 internat.msu.ru	ул. Кременчугская, 11 (м. «Славянский бульвар», «Кунцевская»)	10 физ.-мат., хим., биол., 11 физ.-мат.

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXIX Московская математическая олимпиада
Задачи и решения

Подписано в печать 28/III 2016 г.
Формат бумаги 60 × 90/16. Объём 3,5 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 1000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-08-04

LXXIX Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Яндекс

Москва
Издательство МЦНМО
2016

Книгоиздательство научныхъ и популярно научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ

maTHesis.ru

Одесское издательство «Mathesis» с 1904 по 1925 год выпускало удивительно интересные книги. Некоторые из них стали классикой, часть сейчас незаслуженно забыта.

Ясность и доступность изложения, подбор научно-популярных книг поможет лучше понять математику, физику, астрономию, другие естественные науки, а также историю их познания.

Чтение этих книг заведомо будет полезно молодому поколению, а также тем, кто занимается его образованием и воспитанием.

К 2014 году электронная коллекция собрана практически полностью и выпущена на диске локальная версия архива.

МЕХАНИЗМЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА
tcheb.ru

В проекте собираются все механизмы, созданные Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821—1894), великим российским математиком. Задача проекта — навсегда сохранить уникальное наследие путем создания высокоточных компьютерных моделей уцелевших механизмов, воссоздать уже утраченные по архивным документам. По договоренности с музеями моделирование производится на основе тщательного измерения всех параметров оригиналов.

РАСПИСАНИЕ МЕРОПРИЯТИЙ
3 апреля 2016 года

Время	Мероприятие	Место проведения (аудитория ГЗ)			
		8 класс	9 класс	10 класс	11 класс
11^{30}	Показ работ				12–24
13^{00}		01	02	14–08	
14^{30}	Лекция С. К. Ландо в ауд. 16–10 (16 этаж)				
16^{00}	Торжественное закрытие, награждение победителей	ауд. 02 (1 этаж)			

Награждение наградами награжденных, не награжденных наградами на награждении, будет происходить по средам с 15^{00} до 19^{00} в МЦНМО (Большой Власьевский пер., 11).
`www.mccme.ru`, `mmo@mccme.ru`

СХЕМА ПРОЕЗДА В МЦНМО