LXXIX Московская математическая олимпиада

13 марта 2016 года • 8 класс

Задача 1. Можно ли число $\frac{1}{10}$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей? (То есть выражений вида $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа и $p < q$.)

Задача 2. За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Двое из них заявили: «Оба моих соседа — лжецы», а остальные восемь заявили: «Оба моих соседа — рыцари». Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

Задача 3. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

Задача 4. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99, в десятичной записи которого участвуют только четные цифры.

Задача 5. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, все стороны которого равны между собой. Известно, что угол A равен 120°, угол C равен 135°, а угол D равен $n°$. Найдите все возможные целые значения n.

Задача 6. Четное число орехов разложено на три кучки. За одну операцию можно переложить половину орехов из кучки с четным числом орехов в любую другую кучку. Докажите, что, как бы орехи ни были разложены изначально, такими операциями можно в какой-нибудь кучке собрать ровно половину всех орехов.

XIV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 17 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/` (после 20 марта)

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXIX Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXIX Московская математическая олимпиада

13 марта 2016 года • 9 класс

Задача 1. Сумма трех положительных чисел равна их произведению. Докажите, что хотя бы два из них больше единицы.

Задача 2. В треугольнике ABC на продолжении медианы CM за точку C отметили точку K так, что $AM = CK$. Известно, что угол BMC равен 60°. Докажите, что $AC = BK$.

Задача 3. Васе задали на дом уравнение $x^2+p_1x+q_1 = 0$, где p_1 и q_1 — целые числа. Он нашел его корни p_2 и q_2 и написал новое уравнение $x^2+p_2x+q_2 = 0$. Повторив операцию еще трижды, Вася заметил, что он решал 4 квадратных уравнения, и все они имели целые корни (если из двух возможных уравнений корни имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба — любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело вещественные корни, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом?

Задача 4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне AC, пересекает отрезок BC и прямую AB в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки B, O и середины отрезков AP и CQ лежат на одной окружности.

Задача 5. Есть ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 разных 2016-значных полных квадратов?

Задача 6. В стране лингвистов существует n языков. Там живет m людей, каждый из которых знает ровно 3 языка, причем для разных людей эти наборы различны. Известно, что максимальное число людей, любые два из которых могут поговорить без посредников, равно k. Оказалось, что $11n \leqslant k \leqslant \frac{m}{2}$. Докажите, что тогда в стране найдутся хотя бы mn пар людей, которые не смогут поговорить без посредников.

XIV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 17 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/` (после 20 марта)

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXIX Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXIX Московская математическая олимпиада

13 марта 2016 года • 10 класс

Задача 1. Можно ли число $\frac{1}{10}$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей? (То есть выражений вида $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа и $p < q$.)

Задача 2. Внутри выпуклого четырехугольника $A_1A_2B_2B_1$ нашлась такая точка C, что треугольники CA_1A_2 и CB_1B_2 правильные. Точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно прямых A_2B_2 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

Задача 3. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет 4 положительных корня с учетом кратности (т.е. сумма кратностей всех положительных корней этого уравнения равна 4). Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

Задача 4. Бесконечную клетчатую доску раскрасили шахматным образом, и в каждую белую клетку вписали по отличному от нуля целому числу. После этого для каждой черной клетки посчитали разность: произведение того, что написано в соседних по горизонтали клетках, минус произведение того, что написано в соседних по вертикали. Могут ли все такие разности равняться 1?

Задача 5. В куб с ребром 1 поместили 8 непересекающихся шаров (возможно, разного размера). Может ли сумма диаметров этих шаров быть больше 4?

Задача 6. В однокруговом хоккейном турнире принимало участие 2016 команд. По регламенту турнира за победу дается 3 очка, за поражение 0 очков, а в случае ничьей играется дополнительное время, победитель которого получает 2 очка, а проигравший — 1 очко. По окончании турнира Остапу Бендеру сообщили количество очков, набранных каждой командой, на основании чего он сделал вывод, что не менее N матчей закончились дополнительным временем. Найдите наибольшее возможное значение N.

XIV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 17 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/` (после 20 марта)

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXIX Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXIX Московская математическая олимпиада

13 марта 2016 года • 11 класс, первый день

Задача 1. На шахматном турнире для 12 участников каждый сыграл ровно по одной партии с каждым из остальных. За выигрыш давали 1 очко, за ничью $\frac{1}{2}$, за проигрыш 0. Вася проиграл только одну партию, но занял последнее место, набрав меньше всех очков. Петя занял первое место, набрав больше всех очков. На сколько очков Вася отстал от Пети?

Задача 2. Существует ли такое значение x, что выполняется равенство $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1$?

Задача 3. Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отмечены точки M и N так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырехугольники $AMND$ и $BMNC$ вписанные. Докажите, что прямая MN параллельна основаниям трапеции.

Задача 4. В английском клубе вечером собрались n его членов ($n \geqslant 3$). По традициям клуба каждый принес с собой сок того вида, который он предпочитает, в том количестве, которое он планирует выпить в течение вечера. Согласно правилам клуба, в любой момент любые три его члена могут присесть за столик и выпить сока (каждый — своего) в любом количестве, но обязательно все трое поровну. Докажите, что для того, чтобы все члены могли в течение вечера полностью выпить принесенный с собой сок, необходимо и достаточно, чтобы доля сока, принесенного любым членом клуба, не превосходила одной трети от общего количества.

Задача 5. Можно ли четырьмя плоскостями разрезать куб с ребром 1 на части так, чтобы для каждой из частей расстояние между любыми двумя ее точками было: а) меньше 4/5; б) меньше 4/7? Предполагается, что все плоскости проводятся одновременно, куб и его части не двигаются.

Задача 6. С левого берега реки на правый с помощью одной лодки переправились N туземцев, каждый раз плавая направо вдвоем, а обратно — в одиночку. Изначально каждый знал по одному анекдоту, каждый — свой. На берегах они анекдотов не рассказывали, но в лодке каждый рассказывал попутчику все известные ему на данный момент анекдоты. Для каждого натурального k найдите наименьшее возможное значение N, при котором могло случиться так, что в конце каждый туземец знал, кроме своего, еще не менее чем k анекдотов.

XIV устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 17 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/` (после 20 марта)

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXIX Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`