В.Ю.Протасов (МГУ, мех-мат, ВШЭ)

Теорема Понселе – яркая и загадочная

Как одна задача элементарной геометрии вот уже два века не дает покоя профессиональным математикам

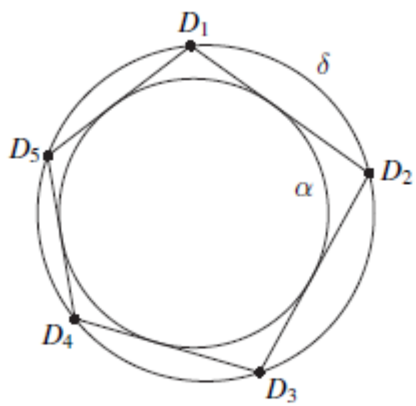
Одной из важнейших и в то же время красивейших теорем классической геометрии является теорема Понселе.

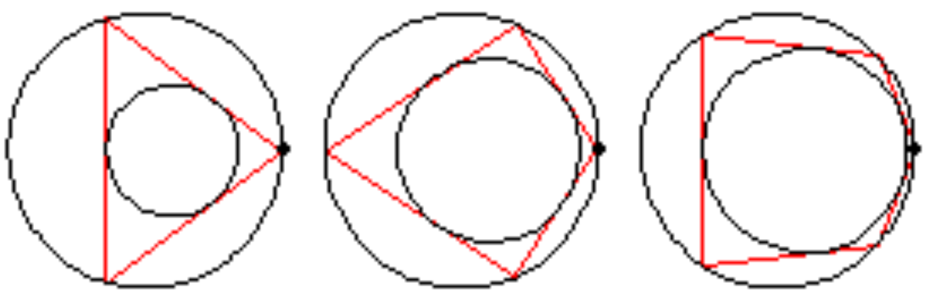
Ф. Гриффитс, Дж. Харрис (1977)

В деревню, к тетке, в глушь, в Саратов,
Там будешь горе горевать!

А.С.Грибоедов, «Горе от ума» (1824)

Теорема. Если для двух окружностей существует вписанно-описаннаый многоугольник, с вершиной D_1 , то таких многоугольников бесконечно много, причем в качестве первой вершины можно взять любую точку окружности.





Дата открытия: **1814**

Дата опубликования: **1822**

среднее арифметическое = 1818

1788. Жан Виктор Понселе родился г. Мец во Франции.

ВЕЛИКОБРИТАНИЯ
Северное море
НИДЕРЛАНДЫ
БЕЛЬГИЯ
ГЕРМАНИЯ
ЛЮКСЕМБУРГ
пролив Ла-Манш (Английский канал)
Па-де-Кале
Кале
Дюнкерк
Булонь-сюр-Мер
Лилль
Рубе
Бетюн
Аррас
Ланс
Мобёж
Абвиль
ПИКАРДИЯ
Дьеп
Амьен
Сен-Кантен
Шарлевиль-Мезьер
Шербур
зал. Сены
Гавр
Руан
Уаза
Лан
Суасон
Реймс
Тьонвиль
Ме
Нормандские о-ва (Брит.)
Кан
Крей
Эперне
Эвре
Версаль
ПАРИЖ
Марна
НОРМАНДИЯ
Сена
ЛОТАРИНГИЯ
Нанси
Брест
Сен-Бриё
Сен-Мало
ИЛЬ-ДЕ-ФРАНС
Сен-Дизье
Страсбур
БРЕТАНЬ
Алансон
Шартр
Сена
Труа
Сен-Дье
ЭЛЬЗАС
Кемпер
Рен
Лаваль
Ле-Ман
Орлеан
Шомон
Эпиналь
Вогезы
Кольмар
Лорьян
Ван
Луара
ШАМПАНЬ
Мюлуз
Анже
Тур
Блуа
Осер
Бельфор
Сен-Назер
Луара
Сона
Безансон
ЛИХТЕНШТЕЙН
АВСТРИЯ
Нант
Сомюр
Вьерзон
Бурж
Дижон
Доль
Шоле
Невер
ФРАНШ-КОНТЕ
ШВЕЙЦАРИЯ
АТЛАНТИЧЕСКИЙ ОКЕАН
Ла-Рош-сюр-Йон
Пуатье
Шатору
БУРГУНДИЯ
Ле-Крёзо
Шалон-сюр-Сон
Юра
Ньор
Мулен
Ла-Рошель
Монлюсон
Макон
Бург-ан-Брес
ПУАТУ
Виши
Сент
Лимож
Лион
г. Монблан (4807 м)
Ангулем
Клермон-Ферран
Шамбери
Центральный
Сент-Этьен
Перигё
Изер
Гренобль
Бискайский залив
Бордо
Брив-ла-Гайард
Валанс
ИТАЛИЯ
Песак
Орийак
ГИЕНЬ
Бержерак
Монтелимар
Каор
массив
Рона
Дюранс
Альпы
ПРОВАНС
Ажен
Алес
ГАСКОНЬ
Авиньон
Мон-де-Марсан
Монтобан
Альби
Ним
Ницца
Лигурийское море
Байонна
Тулуза
Монпелье
Арль
МОНАКО
Биарриц
Сет
Антиб
Кан
По
Каркасон
Од
Марсель
Йер
Пиренеи
ЛАНГЕДОК
Нарбон
Лионский залив
Тулон
Бастия
АНДОРРА
Перпиньян
о. Корсика
Аяччо
ИСПАНИЯ
Средиземное море
0 50 100 200 км

1788. Родился г. Мец во Франции.

1810. Окончил Политехническую школу в Париже. Научный руководитель – Гаспар Монж.

1812. Окончил инженерную школу в Меце.

Жан-Виктор Понселе
(1788 - 1867)

1812. Понселе -- в чине поручика инженерных войск – в Наполеоновской армии.

11 июня 1812 года   переход Великой Армии через Неман

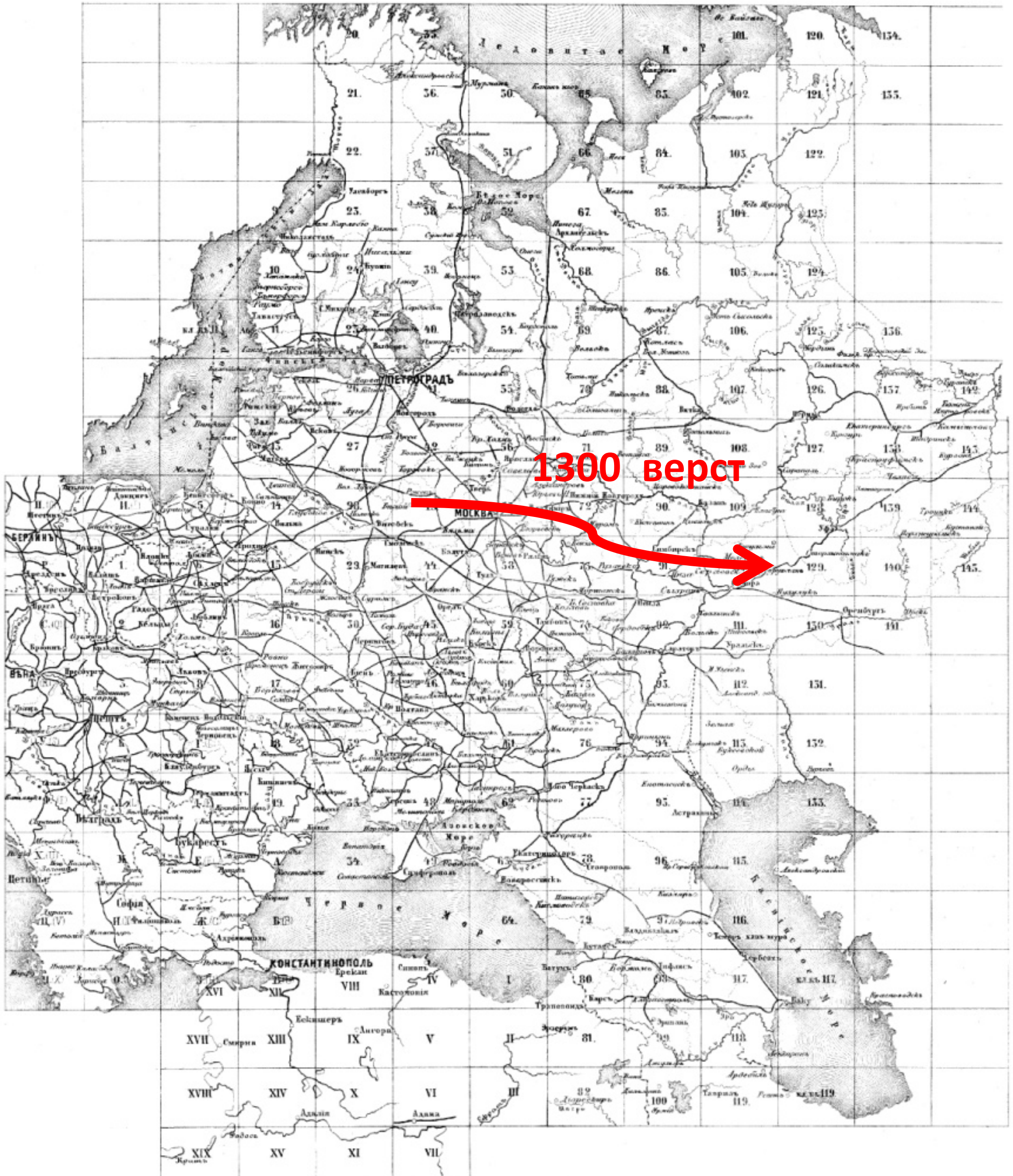
26 августа 1812 года Бородинское сражение

15 - 18 ноября 1812. Сражение под Красным (около Смоленска).

Армия Наполеона понесла ощутимые потери.
18 ноября 1812. Понселе тяжело ранен.

Взят в плен и отправлен в ссылку в г. Саратов

СБОРНАЯ ТАБЛИЦА ЛИСТОВ КАРТЫ.



В марте 1812 года пленные пребывают в Саратов

1812 – 1814. Ссылка в Саратове

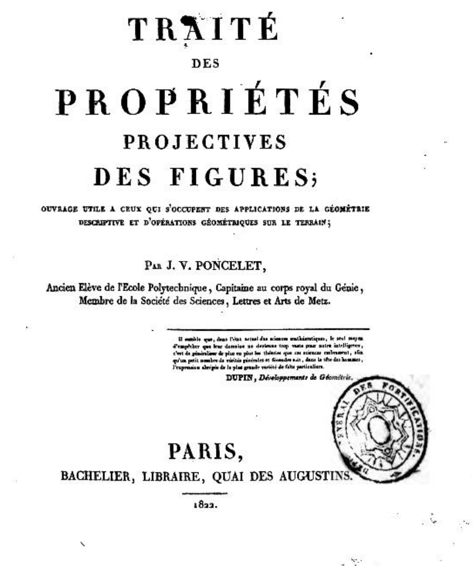
Понселе живет в отдельном доме,
ведет активную светскую жизнь.

Пленные французы посадили дубовую рощу в загородном доме саратовского губернатора А.Д.Панчулидзе.

Теперь здесь центральный парк Саратова.
Один из этих дубов посажен Понселе!

1812 – 1814. **Активно занимается научной работой.**

- *Traité des propriétés projectives des figures (О проективных свойствах фигур) -- несколько толстых тетрадей. Издано в 1822.*


TRAITÉ

DES

PROPRIÉTÉS

PROJECTIVES

DES FIGURES;

OUVRAGE UTILE A CEUX QUI S'OCCUPENT DES APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET D'OPÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES SUR LE TERRAIN;

PAR J. V. PONCELET,

Ancien Elève de l'Ecole Polytechnique, Capitaine au corps royal du Génie, Membre de la Société des Sciences, Lettres et Arts de Metz.

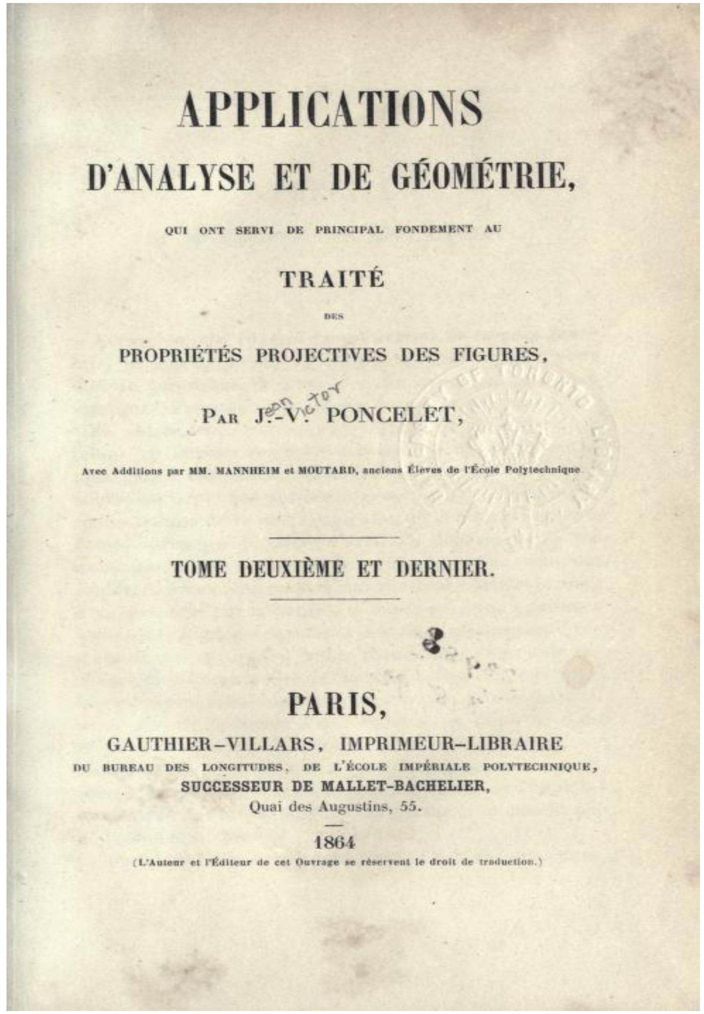
DUPIN, *Développements de Géométrie.*

PARIS,

BACHELIER, LIBRAIRE, QUAI DES AUGUSTINS.

1822.

- В этой книге заложены основы проективной геометрии. Сформулирована и доказана теорема о вписанно-описанных многоугольниках (теорема Понселе).



APPLICATIONS
D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE,

QUI ONT SERVI DE PRINCIPAL FONDEMENT AU

TRAITÉ

DES

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES FIGURES,

PAR J.-V. PONCELET,

Avec Additions par MM. MANNHEIM et MOUTARD, anciens Élèves de l'École Polytechnique.

TOME DEUXIÈME ET DERNIER.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1864

Applications d'analyse et de géométrie.
Теория кривых и поверхностей, конические сечения.
7 тетрадей. Издано в 1862-64 гг.

1815. Возвращается во Францию.
Преподает в инженерной школе в Меце.

Понселе привез с собой из России 7 тетрадей и…

русские счеты.

1838 -- 1848. Профессор Парижского университета.

1842. Президент Парижской академии наук

1857. Избран иностранным членом Санкт-Петербургской академии наук.

570. Soit maintenant ABCDEF (Fig. 104) un hexagone quelconque à la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une autre ; supposons que l'on trace les diagonales qui joignent ses sommets respectivement opposés ; d'abord elles se croiseront toutes, comme l'on sait (208), en un seul et même point K : or le raisonnement général de l'art. 568 peut, de nouveau, servir à prouver que la courbe unique qu'enveloppent ces diagonales, dans le mouvement possible (566) du polygone autour des deux courbes, doit nécessairement être infiniment petite ou se réduire à un point, qui est évidemment encore ici le point de croisement K de ces diagonales.

D'ailleurs, la portion de quadrilatère ABCD, par exemple, composée de trois côtés consécutifs quelconques de l'hexagone proposé, s'appliquant successivement, dans les diverses positions du système, sur les cinq portions semblables déterminées par les autres diagonales de cet hexagone, on voit, *à priori*, que la section conique unique (534), enveloppée par la diagonale AD ou le côté libre du quadrilatère, devra toucher à la fois et doublement cette diagonale et chacune des deux autres ; ce qui ne peut être évidemment à moins que cette section conique ne soit infiniment petite, et ne se confonde avec le point K.

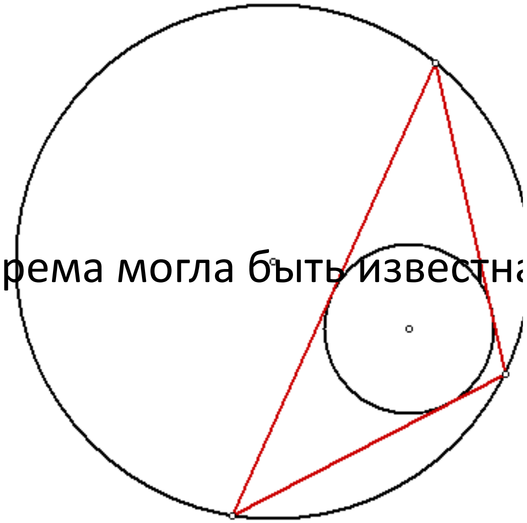
La même démonstration s'appliquant, mot à mot, à un polygone quelconque, d'un nombre pair de sommets, qui serait à la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une autre, on peut conclure le théorème général qui suit :

Un polygone quelconque, d'un nombre pair de sommets, étant inscrit à la fois à une section conique et circonscrit à une autre, 1°. *toutes les diagonales qui joignent les sommets respectivement opposés de ce polygone se croiseront en un seul et même point;* 2°. *ce point demeurera invariable de position, quand on viendra à faire mouvoir le polygone, entre les deux courbes, d'après les conditions primitives* (566); 3°. *ce point sera* (532) *l'un des points de concours des sécantes conjuguées communes à ces courbes.*

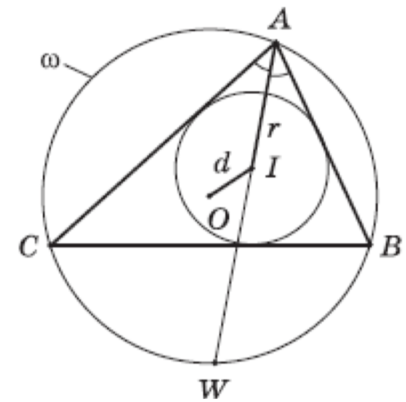
571. Supposons, en outre, qu'on forme le nouveau polygone A'B'C'D'E'F', dont les sommets sont précisément les points de contact des côtés du premier ABCDEF ; il résultera, de la théorie des polaires réciproques (230), qu'il sera en même temps circonscriptible à une troisième section conique, et que par conséquent il se trouvera absolument dans la même situation que l'autre à l'égard des courbes respectives auxquelles il appartient. Donc les diagonales qui joignent ses sommets opposés, et qui sont en même temps les cordes

Как доказать теорему Понселе ?

Начнем со случая **n = 3.**



Для треугольника эта теорема могла быть известна долго до Понселе.



Формула Эйлера:

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

1767. Леонард Эйлер

На самом деле:

1746. Уильям Чаппел

«An essay on the properties of triangles inscribed in and circumscribed about two given circles»,
Miscellanea Curiosa Mathematica (1746), no. 4, 117–124.

Формула Эйлера:

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}$$

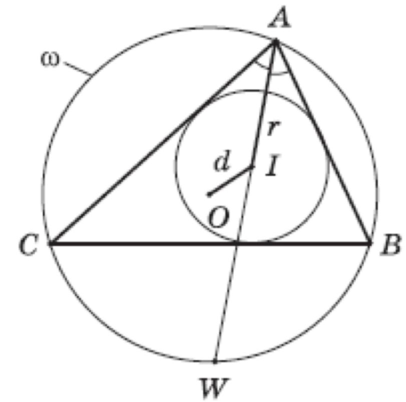
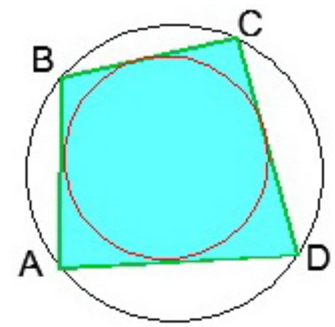


Рис. 4

n=4. Формула Фусса:

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}$$



1792. Николай Иванович Фусс,
ученик и помощник Л.Эйлера

n=5 $$\sqrt{(R-r)^2-d^2}+\sqrt{2R(R-r-d)}=r\,\frac{R-d}{R+d}$$

(Я.Штейнер, 1827)

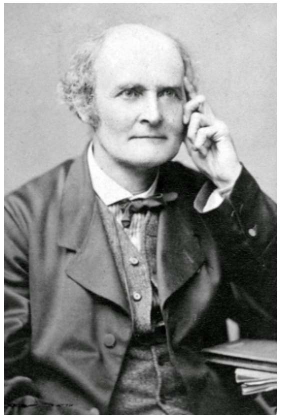
n=6 $$\frac{1}{(R^2-d^2)^2-4Rr^2d}+\frac{1}{(R^2-d^2)^2+4Rr^2d}=\frac{1}{2r^2(R^2+d^2)^2-(R^2-d^2)^2}$$

(Я.Штейнер, 1827)

n=8 $$\frac{1}{((R^2-d^2)^2-4Rr^2d)^2}+\frac{1}{((R^2-d^2)^2+4Rr^2d)^2}=\frac{1}{(2r^2(R^2+d^2)^2-(R^2-d^2)^2)^2}$$

(К.Г.Якоби, 1823)

Для произвольного n есть формулы Кэли (1854)



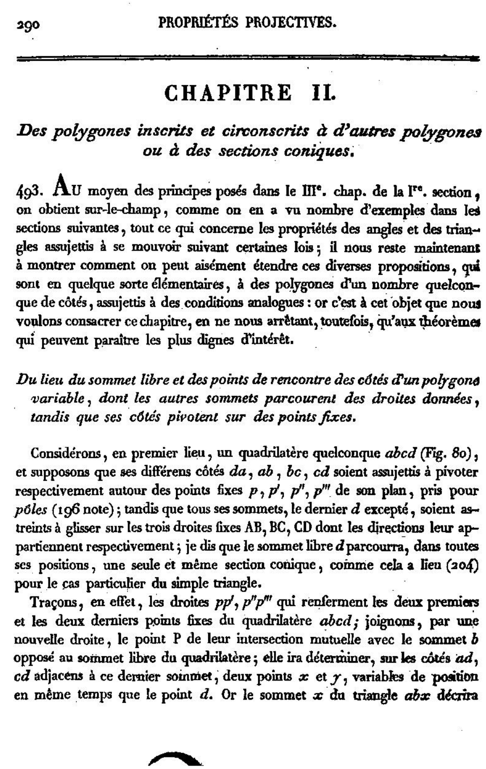
Артур Кэли (1821-1895)

Доказать больше иногда проще.

Д.Пойа, «Математика и правдоподобные рассуждения»

Докажем сразу для всех n.

Оригинальное доказательство Понселе было аналитическим. Позже он придумал чисто геометрическое (но длинное)



290 PROPRIÉTÉS PROJECTIVES.

CHAPITRE II.

Des polygones inscrits et circonscrits à d'autres polygones ou à des sections coniques.

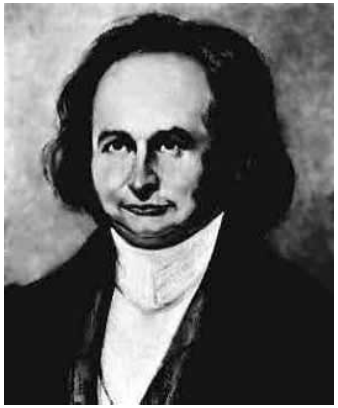
493. Au moyen des principes posés dans le III[e]. chap. de la I[re]. section, on obtient sur-le-champ, comme on en a vu nombre d'exemples dans les sections suivantes, tout ce qui concerne les propriétés des angles et des triangles assujettis à se mouvoir suivant certaines lois; il nous reste maintenant à montrer comment on peut aisément étendre ces diverses propositions, qui sont en quelque sorte élémentaires, à des polygones d'un nombre quelconque de côtés, assujettis à des conditions analogues : or c'est à cet objet que nous voulons consacrer ce chapitre, en ne nous arrêtant, toutefois, qu'aux théorèmes qui peuvent paraître les plus dignes d'intérêt.

Du lieu du sommet libre et des points de rencontre des côtés d'un polygone variable, dont les autres sommets parcourent des droites données, tandis que ses côtés pivotent sur des points fixes.

Considérons, en premier lieu, un quadrilatère quelconque *abcd* (Fig. 80), et supposons que ses différens côtés *da*, *ab*, *bc*, *cd* soient assujettis à pivoter respectivement autour des points fixes p, p', p'', p''' de son plan, pris pour *pôles* (196 note); tandis que tous ses sommets, le dernier *d* excepté, soient astreints à glisser sur les trois droites fixes AB, BC, CD dont les directions leur appartiennent respectivement; je dis que le sommet libre *d* parcourra, dans toutes ses positions, une seule et même section conique, comme cela a lieu (204) pour le cas particulier du simple triangle.

Traçons, en effet, les droites pp', $p''p'''$ qui renferment les deux premiers et les deux derniers points fixes du quadrilatère *abcd*; joignons, par une nouvelle droite, le point P de leur intersection mutuelle avec le sommet *b* opposé au sommet libre du quadrilatère; elle ira déterminer, sur les côtés *ad*, *cd* adjacens à ce dernier sommet, deux points x et y, variables de position en même temps que le point *d*. Or le sommet x du triangle *abx* décrira

Доказательство с помощью инвариантной меры



Карл Густав Якоби (1804-1851)

Жозе Луи Франсуа Бертран (1822-1900)

Анри Леон Лебег (1875-1941)

Исаак Якоб Шёнберг

Валерий Васильевич Козлов

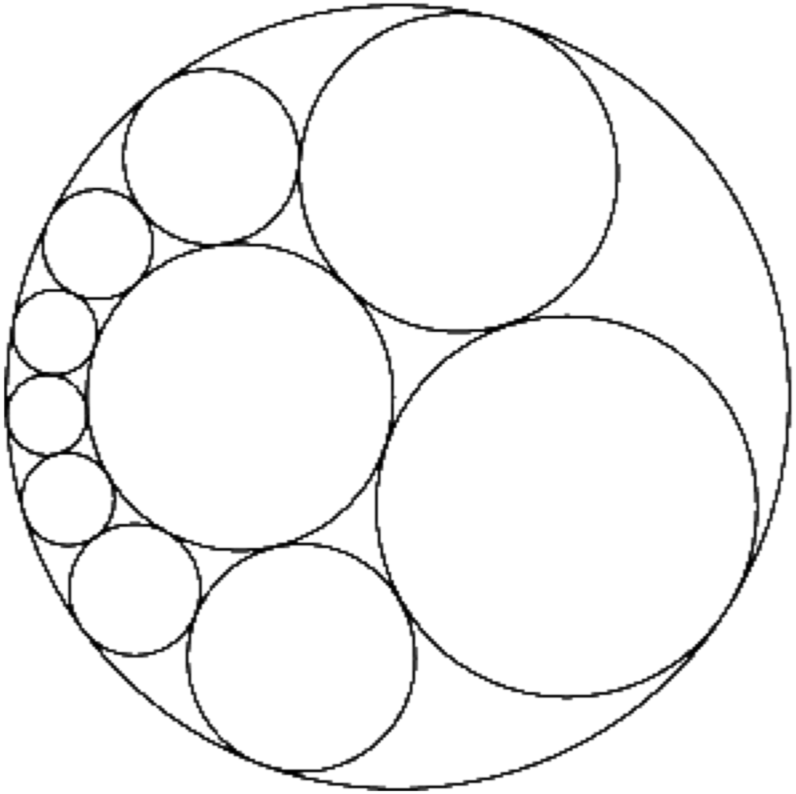
Аскольд Георгиевич Хованский

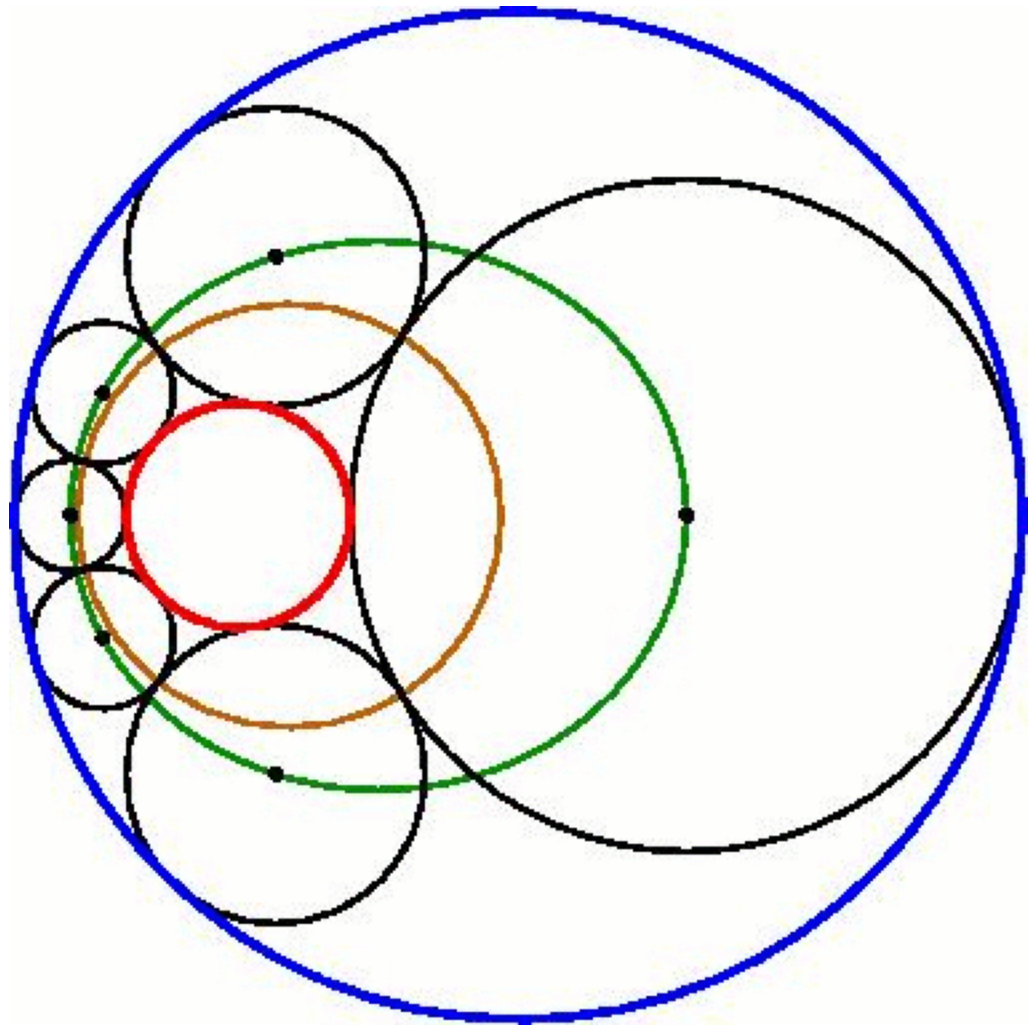
Дата (?) **Теорема Я.Штейнера**

«Ожерелье Штейнера»

«Телефонный диск»

Якоб Штейнер
(1796-1863)



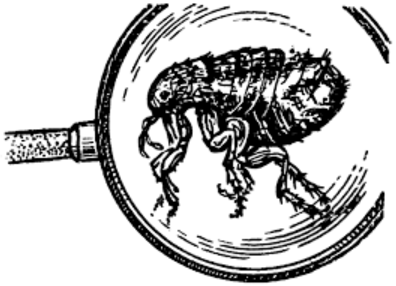


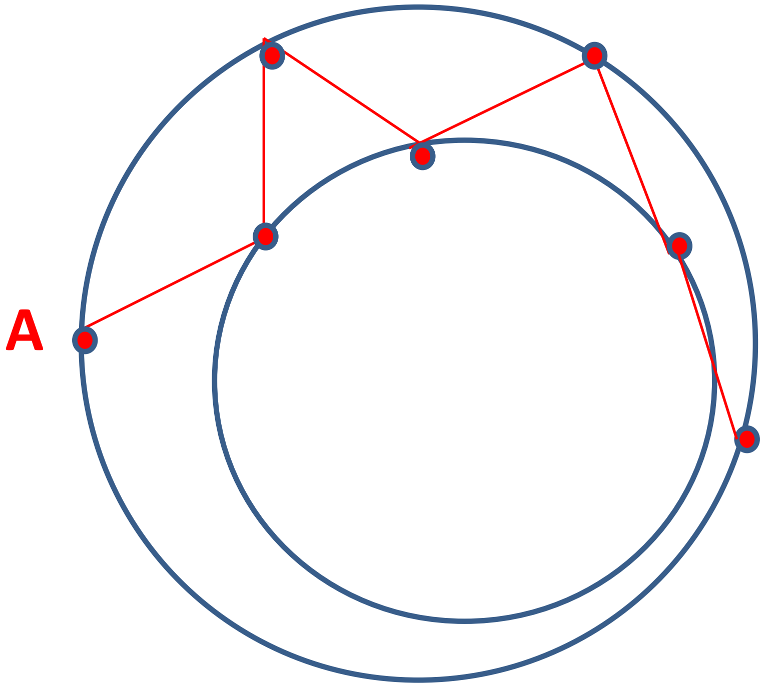
1960. **Теорема о зигзаге (О.Боттема)**

«Теорема о блохе»

«Теорема о кузнечике»

Оэйн Боттема
(1901-1892)





Arnold F. Emch
(1871 – 1959)

1903. Теорема Эмха

Понселе **зигзаг** **Штейнер**