10 класс

10.1. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ – целые числа, отличные от нуля. Докажите, что число $p^2 + (q - 1)^2$ составное.

Решение. Пусть a и b – корни данного уравнения. Тогда, используя теорему Виета, получим: $p^2 + (q - 1)^2 = (a + b)^2 + (ab - 1)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2b^2 - 2ab + 1 = (a^2 + 1) + (b^2 + a^2b^2) = (a^2 + 1)(b^2 + 1)$. Так как $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $a^2 + 1 \neq 1$ и $b^2 + 1 \neq 1$. Следовательно, число $p^2 + (q - 1)^2$ составное.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Верно выполнено разложение на множители, но не объяснено, что они отличны от единицы*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

10.2. Можно ли квадрат со стороной 8 полностью покрыть двумя кругами диаметра 9?

Ответ: можно.

Решение. Разделим квадрат на два равных прямоугольника размером 4×8. Диагональ такого прямоугольника равна $\sqrt{4^2+8^2} = 4\sqrt{5} < 9$. Следовательно, каждый из полученных прямоугольников можно покрыть описанным около него кругом, диаметр которого равен длине диагонали прямоугольника. Значит, и кругом с диаметром 9 такой прямоугольник покрыть можно. Тогда данный квадрат можно покрыть двумя кругами диаметра 9.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведён чертеж разбиения данного квадрата на два прямоугольника и покрытия их равными кругами, но вычисления отсутствуют*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

10.3. Пусть n – натуральное число. Какая цифра стоит сразу после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{n^2+n}$?

Ответ: 4.

Решение. Докажем, что $(n + 0{,}4)^2 < n^2 + n < (n + 0{,}5)^2$, откуда и будет следовать указанный ответ. Действительно:

1) $(n + 0{,}4)^2 < n^2 + n \Leftrightarrow 0{,}8n + 0{,}16 < n \Leftrightarrow n > 0{,}8$. Последнее неравенство верно для любого натурального n.

2) $n^2 + n < (n + 0{,}5)^2 \Leftrightarrow n < n + 0{,}25$, а это очевидно.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«∓» *Приведён верный ответ, но доказано только одно из двух требуемых неравенств*

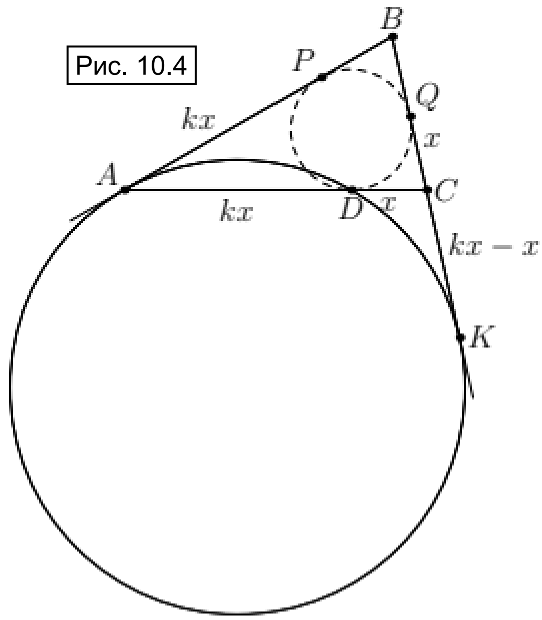
«–» *Верный ответ получен рассмотрением конкретных примеров*

«–»*Приведён только ответ*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

10.4. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D. Вторая окружность проходит через точку D, касается луча BA в точке A и, кроме того, касается продолжения стороны BC за точку C. Найдите отношение $AD : DC$.

Рис. 10.4



Ответ: 3 : 1.

Решение. Пусть вторая окружность касается луча BC в точке K, а вписанная окружность касается сторон AB и BC треугольника в точках P и Q соответственно (см. рис. 10.4). Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть $CD = CQ = x$ и $AD = AP = kx$. Так как $BA = BK$ и $BP = BQ$, то $PA = QK$, откуда $CK = kx - x$. По теореме о касательной и секущей: $CD{\cdot}CA$

= CK^2, то есть $x(x + kx) = (kx - x)^2$. Разделив обе части этого равенства на x^2, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим: $k^2 = 3k$, то есть $k = 3$.

Второй способ. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, тогда $CD = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}$, $CK = BK - BC = AB - BC = c - a$. По теореме о касательной и секущей: $CD \cdot CA = CK^2$, то есть $\frac{a+b-c}{2} \cdot b = (c-a)^2 \Leftrightarrow b^2 - (c-a)b - 2(c-a)^2 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно b, получим: $b = a - c$ или $b = 2(c-a)$.

Равенство $b = a - c$ противоречит неравенству треугольника, а если $b = 2(c-a)$, то $\frac{AD}{DC} = \frac{b+c-a}{2} : \frac{a+b-c}{2} = \frac{3c-3a}{c-a} = 3$.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, и получен верный ответ*

«±» *Верно и обоснованно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка*

«–»*Приведён только ответ*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

10.5. У царя восемь сыновей, и все дураки. Каждую ночь царь отправляет троих из них стеречь золотые яблоки от жар-птицы. Поймать жар-птицу царевичи не могут, винят в этом друг друга, и поэтому никакие двое не соглашаются пойти вместе в караул второй раз. Какое наибольшее количество ночей это может продолжаться?

Ответ: 8 ночей.

Решение. Оценка. Рассмотрим любого из сыновей. В каждом карауле он находится вместе с двумя братьями, поэтому после трёх его выходов останется один брат, вместе с которым он не ходил в караул, и уже не сможет пойти, так для них не будет третьего. Эта ситуация «симметрична», то есть если сын A после трёх своих выходов не ходил в караул с сыном B, то и сын B после трёх своих выходов не ходил в караул с сыном A. Следовательно, есть как минимум четыре пары сыновей, которые в одном карауле не были и не будут. Всевозможных пар: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, поэтому в караулах побывают не более чем $28 - 4 = 24$ пары. Так как за одну ночь задействованы по три пары сыновей, то ночей может быть не больше чем $24 : 3 = 8$.

Пример. Обозначим сыновей: 1, 2, 3, 4, A, B, C, D. Тогда восемь троек, удовлетворяющих условию задачи: A12, B23, C34, D41, AB4, BC1, CD2, DA3.

Можно также привести пример в виде картинки (см. рис. 10.5). Восемь сыновей обозначены точками, восемь троек, удовлетворяющих условию задачи – линиями.

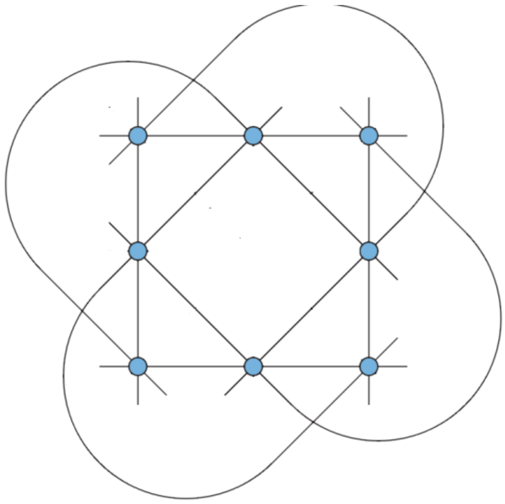


Рис. 10.5

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, и получен верный ответ*

«∓» *Приведёны верный ответ и верная оценка, но пример отсутствует или неверен*

«∓» *Приведёны верный ответ и верный пример, но оценка отсутствует или неверна*

«–» *Приведён только ответ*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

10.6. Петя разложил карточки с числами от 1 до 10 в ряд в каком-то порядке, затем для каждой пары соседних карточек записал число $\frac{1}{x+y}$, где *x* и *y* – числа на этих карточках. Докажите, что сумма записанных Петей чисел больше, чем 0,75.

Решение. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним гармоническим, которое выполняется для любых наборов положительных чисел: $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \Leftrightarrow (a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2$.

Пусть a_1, a_2, ..., a_9 – суммы чисел на соседних карточках, тогда, используя это неравенство, получим: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_9} \ge \frac{9^2}{a_1+a_2+\ldots+a_9}$. Левая часть этого неравенства – это и есть сумма чисел, записанных Петей. Сумма чисел в знаменателе правой части равна 2(1 + 2 + ... + 9 + 10) – (*p* + *q*) = 110 – (*p* + *q*), где *p* и *q* – числа, записанные на крайних карточках. Их наименьшая сумма равна 3 (когда это 1 и 2). В этом случае правая часть неравенства принимает наименьшее значение, поэтому $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_9} \ge \frac{9^2}{110-3} > \frac{81}{110-2}$ $= \frac{3}{4}$, что и требовалось.

От школьников не требуется доказывать неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим.

Критерии проверки.
«+» *Приведено полное обоснованное решение*
«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
«–» *Рассмотрены только любые частные случаи или проведены только какие-то нестрогие рассуждения*
«–» *Задача не решена или решена неверно*